

2012年普通高等学校招生全国统一考试(辽宁卷)文 数学(供文科考生使用)

【试题总体说明】本试卷遵循考纲的要求，精心设计，力求创新。所命试卷呈现以下几个特点：(1)注重对基础知识、基本能力和基本方法的考查，严格控制试题难度(2)知识点覆盖全面，既注重对传统知识的考查，又注重对新增内容的考查，更注重对主干知识的考查；(3)遵循源于教材、高于教材的原则，部分试题根据教材中的典型例题或习题改编而成；(4)在知识网络的交汇处命题，强调知识的整合，突出考查学生综合运用数学知识分析问题、解决问题的能力。

注意事项：

1. 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分。答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答第 I 卷时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。写在本试卷上无效。
3. 回答第 II 卷时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
4. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第 I 卷

一、选择题：本大题共 12 小题，每题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的。

(1) 已知向量 $\vec{a} = (1, -1)$ ， $\vec{b} = (2, x)$ 。若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ ，则 $x =$

- (A) -1 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

答案：D

解析：由 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ 得 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 2 - 1 \times x = 1$ ，解得 $x = 1$ ，故选 D

考点定位：本题是平面向量问题，意在考查学生对于平面向量点乘知识的理解。

(2) 已知全集 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ，集合 $A = \{0, 1, 3, 5, 8\}$ ，集合 $B = \{2, 4, 5, 6, 8\}$ ，则

$(C_U A) \cap (C_U B) =$

- (A) $\{5, 8\}$ (B) $\{7, 9\}$ (C) $\{0, 1, 3\}$ (D) $\{2, 4, 6\}$

答案：B

解析：由已知可得， $C_U A = \{2, 4, 6, 7, 9\}$ ， $C_U B = \{0, 1, 3, 7, 9\}$ ，于是

$(C_U A) \cap (C_U B) = \{7, 9\}$ ，故选 B

考点定位：本题集合的运算，意在考查考生对集合的补集交集的计算能力；

(3) 复数 $\frac{1}{1+i} =$

- (A) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ (B) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ (C) $1 - i$ (D) $1 + i$

答案：A

解析： $\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ ，故选 A

考点定位：本题考查复数的运算，意在考查考生对复数的计算能力；

(4) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_4 + a_8 = 16$ ，则 $a_2 + a_{10} =$

- (A) 12 (B) 16 (C) 20 (D) 24

答案：B

解析：由等差数列的性质知， $a_1 + a_{10} = a_4 + a_8 = 16$ ，故选 B

考点定位：本题是等差数列问题，意在考查学生对于等差数列的性质：若 $m+n = p+q$ 则

$a_m + a_n = a_p + a_q$ 的运用能力。

(5) 已知命题 $p: \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, (f(x_2) - f(x_1))(x_2 - x_1) \geq 0$ ，则 $\neg p$ 是

- (A) $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}, (f(x_2) - f(x_1))(x_2 - x_1) \leq 0$
 (B) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, (f(x_2) - f(x_1))(x_2 - x_1) \leq 0$
 (C) $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}, (f(x_2) - f(x_1))(x_2 - x_1) < 0$
 (D) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, (f(x_2) - f(x_1))(x_2 - x_1) < 0$

答案：C

解析：根据全称命题的否定为存在性命题，即，若 p 为：“ $\forall x \in M, q(x)$ ”，则，

$\neg p$ ：“ $\exists x \in M, \neg q(x)$ ”，故选 C

考点定位：本题是命题问题，意在考查学生对于命题的否定的理解。

(6) 已知 $\sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2}$ ， $\alpha \in (0, \pi)$ ，则 $\sin 2\alpha =$

- (A) -1 (B) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) 1

答案：A

解析：将 $\sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2}$ 两端同时平方得 $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2$ ，整理得

$1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2$ ，于是 $\sin 2\alpha = -1$ ，故选 A

考点定位：本题考查三角函数问题，意在考查学生对于三角函数中齐次式的运用能力和三角方程的解题能力。

(7) 将圆 $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ 平分的直线是

- (A) $x + y - 1 = 0$ (B) $x + y + 3 = 0$ (C) $x - y + 1 = 0$ (D) $x - y + 3 = 0$

答案：C

解析：圆 $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ 可化为标准方程 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ ，要使直线平分圆，

则直线需过圆心.因此可通过代入,看哪一条直线过圆心(1,2)即可.经检验,选项C满足条件,故选C.

考点定位: 本题考查圆的知识,意在考查考生对圆的图形的理解;

(8) 函数 $y = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$ 的单调递减区间为

- (A) (-1,1] (B) (0,1] (C.) [1, +∞) (D) (0, +∞)

答案: B

解析: 对函数 $y = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$ 求导, 得 $y' = x - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 1}{x}$ ($x > 0$), 令 $\begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x} \leq 0 \\ x > 0 \end{cases}$ 解得

$x \in (0, 1]$, 因此函数 $y = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$ 的单调递减区间为 (0,1], 故选 B

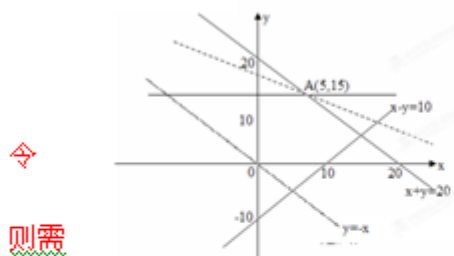
考点定位: 本小题考查导数问题,意在考查考生利用导数求函数单调区间,注意函数本身隐含的定义域;

(9) 设变量 x, y 满足 $\begin{cases} x - y \leq 10, \\ 0 \leq x + y \leq 20, \\ 0 \leq y \leq 15, \end{cases}$ 则 $2x + 3y$ 的最大值为

- (A) 20 (B) 35 (C) 45 (D) 55

答案: D

解析: 作出可行域如图所示



令

$z = 2x + 3y$, 则 $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}z$, 要使 z 取得最大值,

则需

求直线 $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}z$ 截距的最大值, 移动直线

$l_0: y = -\frac{2}{3}x$, 可知当 l_0 过点 C (5,15) 时, z 取最大值, 且

$z_{\max} = 2 \times 5 + 3 \times 15 = 55$, 于是 $2x + 3y$ 的最大值为 55, 故选 D.

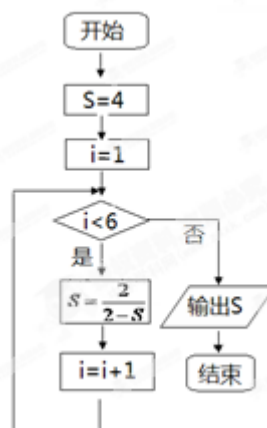
考点定位: 本小题考查线性规划的最值问题, 考查学生的画图能力和转化能力.

(10) 执行如图所示的程序框图, 则输出的 s 的值是

- (A) 4 (B) $\frac{3}{2}$
(C) $\frac{2}{3}$ (D) -1

答案: D

解析: 初始: $S=4, i=1$



第一次循环: $1 < 6, S = \frac{2}{2-4} = -1, i = 2$

第二次循环: $2 < 6, S = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}, i = 3$

第三次循环: $3 < 6, S = \frac{2}{2-\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}, i = 4$

第四次循环: $4 < 6, S = \frac{2}{2-\frac{3}{2}} = 4, i = 5$

第五次循环: $5 < 6, S = \frac{2}{2-4} = -1, i = 6$

$6 < 6$ 不成立, 此时跳出循环, 输出 S 的值, S 值为 -1 , 故选 D.

考点定位: 本题考查程序框图, 意在考查考生对循环结构框图的理解应用能力;

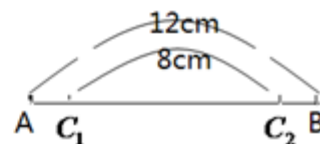
(11) 在长为 12cm 的线段 AB 上任取一点 C . 现作一矩形, 邻边长分别等于线段 AC, CB 的长, 则该矩形面积大于 20cm^2 的概率为

- (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{4}{5}$

答案: C

解析: 此概型为几何概型, 由于在长为 12cm 的线段 AB 上任取一点 C , 因此总的几何度量
为 12 , 满足矩形面积大于 20cm^2 的点在 C_1 与 C_2 之间的部分, 如图所示.

于是所求概率 $P = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$, 故选 C



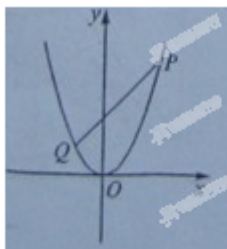
考点定位: 本题考查概率问题, 意在考查考生对概率中的几何概型的理解能力;

(12) 已知 P, Q 为抛物线 $x^2=2y$ 上两点, 点 P, Q 的横坐标分别为 $4, -2$, 过 P, Q 分别作抛物线的切线, 两切线交于点 A , 则点 A 的纵坐标为

- (A) 1 (B) 3 (C) -4 (D) -8

答案: C

解析: 如图所示,



由已知可设 $P(4, y_1), Q(-2, y_2)$, \because 点 P, Q 在抛物线 $x^2=2y$ 上, $\therefore \begin{cases} 4^2 = 2y_1 \\ (-2)^2 = 2y_2 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} y_1 = 8 \\ y_2 = 2 \end{cases} \therefore P(4, 8), Q(-2, 2)$, 又 \because 抛物线可化为 $y = \frac{1}{2}x^2 \therefore y' = x$

\therefore 过点 P 的切线斜率为 $y'|_{x=4} = 4$, \therefore 过点 Q 的切线为 $y - 2 = -2(x + 2)$, 即 $y = -2x - 2$

联立 $\begin{cases} y = 4x - 8 \\ y = -2x - 2 \end{cases}$, 解得 $x = 1, y = -4$, \therefore 点 A 的纵坐标为 -4.

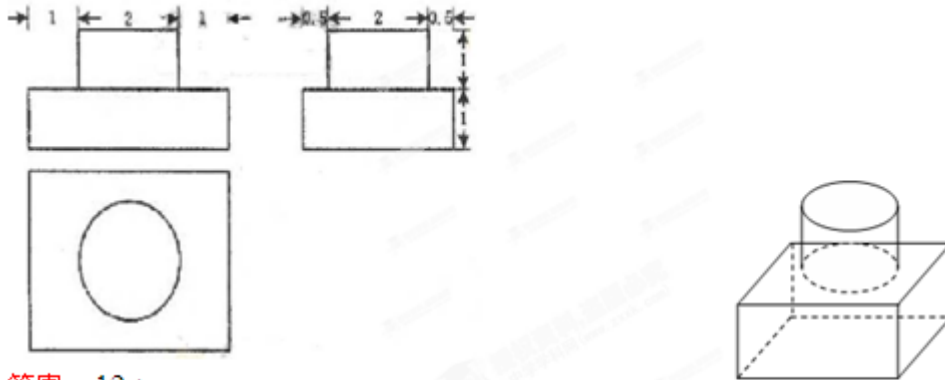
考点定位: 本小题考查抛物线和导数知识, 意在考查考生对抛物线的理解以及对利用导数求切线方程的理解;

第 II 卷

本卷包括必考题和选考题两部分。第 13 题~第 21 题为必考题, 每个试题考生都必须做答。第 22 题~第 24 题为选考题, 考生根据要求做答。

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分。

(13) 一个几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积为_____.



答案: $12 + \pi$

解析: 如图所示, 由已知得该几何体为一组合体, 上面是底面圆半径为 1, 高为 1 的圆柱, 下面是长为 4, 宽为 3, 高为 1 的长方体, 如图所示,

故所求体积 $V = \pi \times 1^2 \times 1 + 4 \times 3 \times 1 = 12 + \pi$.

考点定位: 本题考查三视图, 意在考查考生三视图与几何体之间的转化能力。

(14) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 为递增数列。若 $a_1 > 0$, 且 $2(a_n + a_{n+2}) = 5a_{n+1}$, 则数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q =$ _____.

答案: 2

解析: \because 等比数列 $\{a_n\}$ 为递增数列, 且 $a_1 > 0$, \therefore 公比 $q > 1$, 又 $\because 2(a_n + a_{n+2}) = 5a_{n+1}$,

$\therefore a_n \neq 0$

$\therefore 2q^2 - 5q + 2 = 0 \therefore q = 2$ 或 $q = \frac{1}{2}$ (舍去) \therefore 公比 q 为 2.

考点定位: 本题考查等比数列, 意在考查考生对等比数列的通项公式的应用能力。

(15) 已知双曲线 $x^2 - y^2 = 1$, 点 F_1, F_2 为其两个焦点, 点 P 为双曲线上一点, 若 $PF_1 \perp PF_2$, 则 $|PF_1| + |PF_2|$ 的值为_____.

答案: $2\sqrt{3}$

解析: 设 $|PF_1| = m, |PF_2| = n$, 根据双曲线的定义及已知条件可得 $|m - n| = 2a = 2$,

$$m^2 + n^2 = 4c^2 = 8, \text{ 故 } mn = 2,$$

$$(|PF_1| + |PF_2|)^2 = (m+n)^2 = (m-n)^2 + 4mn = 4 + 4 \times 2 = 12,$$

$$\text{于是 } |PF_1| + |PF_2| = 2\sqrt{3}.$$

考点定位：本小题考查双曲线知识，意在考查考生对抛物线的定义、焦点的理解；

(16) 已知点 P, A, B, C, D 是球 O 表面上的点, PA ⊥ 平面 ABCD, 四边形 ABCD 是边长为 $2\sqrt{3}$ 正方形. 若 PA = $2\sqrt{6}$, 则 △OAB 的面积为_____.

答案: $3\sqrt{3}$

解析: 如图所示,

∵ PA ⊥ 平面 ABCD ∴ PA ⊥ AC. 可知 PC 为球 O 直径, 取 PC 的中点

为 O, 取 AC 的中点为 O', 则 $OO' = \frac{1}{2}PA = \sqrt{6}$, 又∵

$$AC = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{6}, \quad PA = 2\sqrt{6},$$

∴ $PC = \sqrt{(2\sqrt{6})^2 + (2\sqrt{6})^2} = 4\sqrt{3}$. ∴ 球半径 $R = OC = OA = OB = AB = 2\sqrt{3}$. ∴ △OAB

为等边三角形. ∴ $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} \times \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}$.

考点定位：本小题考查球的知识，意在考查考生对球的图形的理解，利用球中的几何体求解；

三、解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

(17) (本小题满分 12 分)

在 △ABC 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c。角 A, B, C 成等差数列。

(I) 求 cos B 的值；

(II) 边 a, b, c 成等比数列，求 sin A sin C 的值。

解析：(1) 由已知 $2B = A + C$, $A + B + C = \pi$ 解得 $B = \frac{\pi}{3}$, 所以 $\cos B = \frac{1}{2}$

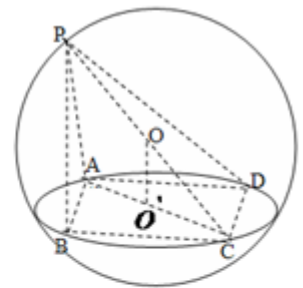
(2) 解法一：由已知 $b^2 = ac$, 及 $\cos B = \frac{1}{2}$, 根据正弦定理得 $\sin^2 B = \sin A \sin C$,

$$\text{所以 } \sin A \sin C = 1 - \cos^2 B = \frac{3}{4}$$

解法二：由已知 $b^2 = ac$, 及 $\cos B = \frac{1}{2}$, 根据余弦定理得 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$, 解得 $a = c$,

$$\text{所以 } B = A = C = 60^\circ, \text{ 故 } \sin A \sin C = \frac{3}{4}$$

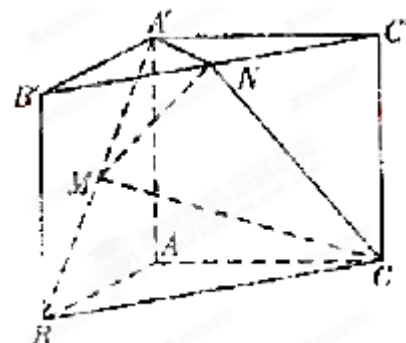
考点定位：本大题主要考查解三角形中的正弦定理或余弦定理的运用，以及运用三角公式进行三角变换的能力。



(18) (本小题满分 12 分)

如图, 直三棱柱 $ABC - A'B'C'$, $\angle BAC = 90^\circ$,

$AB = AC = \sqrt{2}$, $AA' = 1$, 点 M, N 分别为 $A'B$ 和 $B'C'$ 的中点。



(I) 证明: $MN \parallel$ 平面 $A'ACC'$;

(II) 求三棱锥 $A' - MNC$ 的体积。

(锥体体积公式 $V = \frac{1}{3}Sh$, 其中 S 为底面面积, h 为高)

解析: (1) 证法一: 连结 AB', AC' . 由已知 $\angle BAC = 90^\circ$,

$AB = AC$, 三棱柱 $ABC - A'B'C'$ 为直三棱柱, 所以 M 为 AB' 中点,

又因为 N 为 $B'C'$ 的中点, 所以 $MN \parallel AC'$.

又 $MN \not\subset$ 平面 $A'ACC'$, $AC' \subset$ 平面 $A'ACC'$, 因此 $MN \parallel$ 平面 $A'ACC'$.

证法二: 取 $A'B'$ 中点 P , 连结 MP, NP , 而 M, N 分别为 AB' 与 $B'C'$ 的中点, 所以 $MP \parallel AA'$,

$PN \parallel AC'$, 所以 $MP \parallel$ 平面 $A'ACC'$, $PN \parallel$ 平面 $A'ACC'$, 又 $MP \cap NP = P$,

因此平面 $MPN \parallel$ 平面 $A'ACC'$. 而 $MN \subset$ 平面 MPN , 因此 $MN \parallel$ 平面 $A'ACC'$.

(2) 解法一: 连结 BN , 由题意 $A'N \perp B'C'$, 平面 $A'B'C' \cap$ 平面 $B'BCC'$, 所以

$A'N \perp$ 平面 NBC .

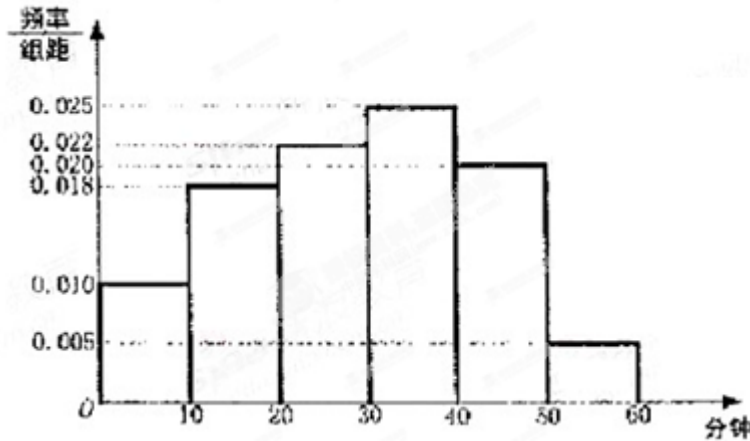
又 $A'N = \frac{1}{2}B'C' = 1$, 故 $V_{A'-MNC} = V_{N-A'MC} = \frac{1}{2}V_{N-A'BC} = \frac{1}{2}V_{A'-NBC} = \frac{1}{6}$.

解法二: $V_{A'-MNC} = V_{A'-NBC} - V_{M-BCC} = \frac{1}{2}V_{A'-NBC} = \frac{1}{6}$.

考点定位: 本大题主要以三棱柱为几何背景考查线面平行的判定和锥体体积的求法, 突出考查空间想象能力和计算能力.

(19) (本小题满分 12 分)

电视传媒公司为了了解某地区电视观众对某类体育节目的收视情况, 随机抽取了 100 名观众进行调查, 其中女性有 55 名. 下面是根据调查结果绘制的观众日均收看该体育节目时间的频率分布直方图;



将日均收看该体育节目时间不低于 40 分钟的观众称为“体育迷”，已知“体育迷”中有 10 名女性。

(I) 根据已知条件完成下面的 2×2 列联表，并据此资料你是否认为“体育迷”与性别有关？

	非体育迷	体育迷	合计
男			
女			
合计			

(II) 将日均收看该体育项目不低于 50 分钟的观众称为“超级体育迷”，已知“超级体育迷”中有 2 名女性，若从“超级体育迷”中任意选取 2 人，求至少有 1 名女性观众的概率。

$$\text{附 } \chi^2 = \frac{n(n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21})^2}{n_{1+}n_{2+}n_{+1}n_{+2}}, \quad P(\chi^2 \geq k) \quad \begin{matrix} 0.05 & 0.01 \\ k & 3.841 & 6.635 \end{matrix}$$

解析：由频率分布直方图可知，在抽取的 100 人中，“体育迷”有 25 人，从而 2×2 列联表如下：

	非体育迷	体育迷	合计
男	30	15	45
女	45	10	55
合计	75	25	100

将 2×2 列联表中的数据代入公式计算，

$$\text{得 } \chi^2 = \frac{n(n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21})^2}{n_{1+}n_{2+}n_{+1}n_{+2}} = \frac{100 \times (30 \times 10 - 45 \times 15)^2}{75 \times 25 \times 45 \times 55} = \frac{100}{33} \approx 3.030$$

因为 $3.030 < 3.841$ ，所以我们没有理由认为“体育迷”与性别有关。

(2) 由频率分布直方图可知，“超级体育迷”为 5 人，从而一切可能结果所组成的基本事件空间为

$$\Omega = \{(a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_2, a_3), (a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_1), (a_3, b_2), (b_1, b_2)\}$$

其中 a_i 表示男性, $i=1,2,3$. b_j 表示女性, $j=1,2$.

Ω 由 10 个基本事件组成, 而且这些基本事件的出现是等可能的.

用 A 表示“任选 2 人中, 至少有 1 人是女性”这一事件, 则

$$A = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_1), (a_3, b_2), (b_1, b_2)\}$$

事件 A 由 7 个基本事件组成, 因此 $P(A) = \frac{7}{10}$

考点定位: 本大题主要考查生活中的概率统计知识和方法以及线性相关问题. 第二问求概率关键是“从“超级体育迷”中任意选取 2 人”的所有情况找清楚.

(20) (本小题满分 12 分)

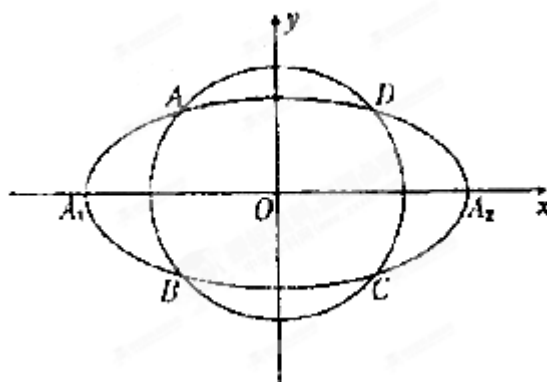
如图, 动圆 $C_1: x^2 + y^2 = t^2, 1 < t < 3$,

与椭圆 $C_2: \frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ 相交于 A, B, C, D 四点, 点

A_1, A_2 分别为 C_2 的左, 右顶点.

(I) 当 t 为何值时, 矩形 $ABCD$ 的面积取得最大值? 并求出其最大面积;

(II) 求直线 AA_1 与直线 A_2B 交点 M 的轨迹方程.



解析: (1) 设 $A(x_0, y_0)$, 则矩形 $ABCD$ 的面积

$$S = 4 |x_0| |y_0|.$$

由 $\frac{x_0^2}{9} + y_0^2 = 1$ 得 $y_0^2 = 1 - \frac{x_0^2}{9}$, 从而

$$x_0^2 y_0^2 = x_0^2 \left(1 - \frac{x_0^2}{9}\right) = -\frac{1}{9} \left(x_0^2 - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

当 $x_0^2 = \frac{9}{2}$, $y_0^2 = \frac{1}{2}$ 时, $S_{\max} = 6$. 从而 $t = \sqrt{5}$ 时, 矩形 $ABCD$ 的面积最大, 最大面积为 6.

(2) 证明: 由 $A(x_0, y_0)$, $B(x_0, -y_0)$, $A_1(-3, 0)$, $A_2(3, 0)$ 知

$$\text{直线 } AA_1 \text{ 的方程为 } y = \frac{y_0}{x_0 + 3}(x + 3) \quad \textcircled{1}$$

$$\text{直线 } A_2B \text{ 的方程为 } y = \frac{-y_0}{x_0 - 3}(x - 3) \quad \textcircled{2}$$

$$\text{由 } \textcircled{1}\textcircled{2} \text{ 得 } y^2 = \frac{-y_0^2}{x_0^2 - 9}(x^2 - 9) \quad \textcircled{3}$$

又点 $A(x_0, y_0)$ 在椭圆 c 上, 故 $y_0^2 = 1 - \frac{x_0^2}{9}$ ④

将④代入③得 $\frac{x^2}{9} - y^2 = 1 (x < -3, y < 0)$

因此点 M 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{9} - y^2 = 1 (x < -3, y < 0)$.

考点定位: 本大题主要考查椭圆、圆、直线的标准方程的求法以及直线与椭圆、圆的位置关系, 突出解析几何的基本思想和方法的考查: 如数形结合思想、坐标化方法等.

(21) (本小题满分 12 分)

设 $f(x) = \ln x + \sqrt{x} - 1$, 证明:

(I) 当 $x > 1$ 时, $f(x) < \frac{3}{2}(x-1)$;

(II) 当 $1 < x < 3$ 时, $f(x) < \frac{9(x-1)}{x+5}$.

解析: (I) 证法一: 记 $g(x) = \ln x + \sqrt{x} - 1 - \frac{3}{2}(x-1)$,

则当 $x > 1$ 时, $g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2} < 0$.

又 $g(1) = 0$ 有 $g(x) < 0$, 即 $f(x) < \frac{3}{2}(x-1)$

证法二: 由均值不等式, 当 $x > 1$ 时, $2\sqrt{x} < x+1$, 故 $\sqrt{x} < \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ ①

令 $k(x) = \ln x - x + 1$, 则 $k(1) = 0$, $k'(x) = \frac{1}{x} - 1 < 0$.

故 $k(x) < 0$, 即 $\ln x < x - 1$ ②

由①②得, 当 $x > 1$ 时, $f(x) < \frac{3}{2}(x-1)$.

(II) (证法一)

记 $h(x) = f(x) - \frac{9(x-1)}{x+5}$,

由(I)得 $h'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{54}{(x+5)^2}$

$$= \frac{2 + \sqrt{x}}{2x} - \frac{54}{(x+5)^2}$$

$$< \frac{x+5}{4x} - \frac{54}{(x+5)^2}$$

$$= \frac{(x+5)^3 - 216x}{4x(x+5)^2}$$

$$\text{令 } g(x) = (x+5)^3 - 216x,$$

$$\text{则当 } 1 < x < 3 \text{ 时, } g'(x) = 3(x+5)^2 - 216 < 0$$

因此 $g(x)$ 在 $(1,3)$ 内是递减函数,

$$\text{又由 } g(1) = 0, \text{ 得 } g(x) < 0,$$

$$\text{所以 } h'(x) < 0$$

因此 $h(x)$ 在 $(1,3)$ 内是递减函数,

$$\text{又由 } h(1) = 0, \text{ 得 } h(x) < 0.$$

$$\text{于是, 当 } 1 < x < 3 \text{ 时, } f(x) < \frac{9(x-1)}{x+5}$$

(证法二):

$$\text{记 } h(x) = (x+5)f(x) - 9(x-1)$$

则当 $1 < x < 3$ 时, 由(I)得

$$h'(x) = f(x) + (x+5)f'(x) - 9$$

$$< \frac{3}{2}(x-1) + (x+5)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) - 9$$

$$= \frac{1}{2x}[3x(x-1) + (x+5)(2 + \sqrt{x}) - 18x]$$

$$< \frac{1}{2x}[3x(x-1) + (x+5)\left(2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) - 18x]$$

$$= \frac{x}{4x}(7x^2 - 32x + 25) < 0$$

因此 $h(x)$ 在 $(1,3)$ 内单调递减

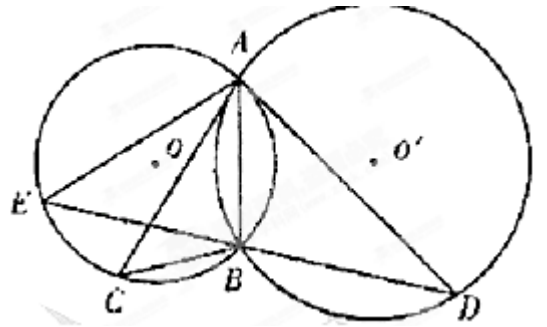
$$\text{又 } h(1) = 0, \text{ 所以 } h(x) < 0 \text{ 即 } f(x) < \frac{9(x-1)}{x+5}.$$

考点定位: 本大题考查导数题目中较为常规的类型题目, 考查的切线, 单调性, 以及最值问题都是课本中要求的重点内容, 考查构造函数用求导的方法求最值的能力。

请考生在第 22、23、24 三题中任选一题做答，如果多做，则按所做的第一题记分。做答时用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应题号下方的方框涂黑。

(22)(本小题满分 10 分)选修 4-1: 几何证明选讲

如图, $\odot O$ 和 $\odot O'$ 相交于 A, B 两点, 过 A 作两圆的切线分别交两圆于 C, D 两点, 连接 DB 并延长交 $\odot O$ 于点 E. 证明:



(I) $AC \cdot BD = AD \cdot AB$;

(II) $AC = AE$ 。

证明: (I) 由 AC 与 $\odot O'$ 相切于 A, 得 $\angle CAB = \angle ADB$,

同理 $\angle ACB = \angle DAB$

所以 $\triangle ACB \sim \triangle DAB$,

从而 $\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{BD}$, 即 $AC \cdot BD = AD \cdot AB$

(II) 由 AD 与 $\odot O$ 相切于 A, 得 $\angle AED = \angle BAD$,

又 $\angle ADE = \angle BDA$ 得 $\triangle EAD \sim \triangle ABD$,

从而 $\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{BD}$ 即 $AE \cdot BD = AD \cdot AB$ 。

结合(I)的结论, $AC=AE$ 。

考点定位: 本大题主要以圆为几何背景考查线线相等的证明及相似三角形的证明, 可以运用直线与圆相切的性质证角相等, 运用相似三角形的基本证明方法求证。

(23)(本小题满分 10 分)选修 4-4: 坐标系与参数方程

在直角坐标 xOy 中, 圆 $C_1: x^2 + y^2 = 4$, 圆 $C_2: (x-2)^2 + y^2 = 4$ 。

(I) 在以 O 为极点, x 轴正半轴为极轴的极坐标系中, 分别写出圆 C_1, C_2 的极坐标方程,

并求出圆 C_1, C_2 的交点坐标(用极坐标表示);

(II) 求圆 C_1 与 C_2 的公共弦的参数方程。

解析: (I) 圆 C_1 的极坐标方程为 $\rho = 2$,

圆 C_2 的极坐标方程为 $\rho = 4 \cos \theta$ 。

$$\text{解} \begin{cases} \rho = 2 \\ \rho = 4 \cos \theta \end{cases} \text{ 得 } \rho = 2, \theta = \pm \frac{\pi}{3},$$

故圆 C_1 与圆 C_2 交点的坐标为 $(2, \frac{\pi}{3}), (2, -\frac{\pi}{3})$ 。

注: 极坐标系下点的表示不唯一。

(II) (解法一)

由 $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$ 得圆 C_1 与圆 C_2 交点的直角坐标分别为 $(1, \sqrt{3}), (1, -\sqrt{3})$.

故圆 C_1 与圆 C_2 的公共弦的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases} \quad -\sqrt{3} \leq t \leq \sqrt{3}$.

(或参数方程写成 $\begin{cases} x = 1 \\ y = y \end{cases}, -\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3}$)

(解法二)

将 $x=1$ 代入 $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$, 得 $\rho \cos \theta = 1$,

从而 $\rho = \frac{1}{\cos \theta}$.

于是圆 C_1 与圆 C_2 的公共弦的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 \\ y = \tan \theta \end{cases}, -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$.

考点定位: 本大题主要考查直角坐标系与极坐标系之间的互化, 意在考查考生利用坐标之间的转化求解。

(24)(本小题满分 10 分)选修 4-5: 不等式选讲

已知 $f(x) = |ax+1| (a \in \mathbb{R})$, 不等式 $f(x) \leq 3$ 的解集为 $\{x | -2 \leq x \leq 1\}$ 。

(I) 求 a 的值; (II) 若 $|f(x) - 2f(\frac{x}{2})| \leq k$ 恒成立, 求 k 的取值范围。

解析: (I) 由 $|ax+1| \leq 3$ 得 $-4 \leq ax \leq 2$. 又 $f(x) \leq 3$ 的解集为 $\{x | -2 \leq x \leq 1\}$,

所以当 $a \leq 0$ 时, 不合题意.

当 $a > 0$ 时, $-\frac{4}{a} \leq x \leq \frac{2}{a}$, 得 $a=2$.

(II) 记 $h(x) = f(x) - 2f(\frac{x}{2})$,

$$\text{则 } h(x) = \begin{cases} 1, & x \leq -1 \\ -4x-3, & -1 < x < -\frac{1}{2} \\ -1, & x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

所以 $|h(x)| \leq 1$, 因此 $k \geq 1$.

考点定位: 本大题主要考查解不等式及利用解集求实数的取值范围, 意在考查考生运用函数零点分类讨论的解题思想求最值来解决恒成立问题。