

2001年北京高考理科数学真题及答案

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分。第 I 卷 1 至 2 页。第 II 卷 3 至 9 页。共 150 分。考试时间 120 分钟。

第 I 卷（选择题 60 分）

注意事项：

1. 答第 I 卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目用铅笔涂写在答题卡上。

2. 每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案，不能答在试题卷上。

3. 考试结束，监考人将本试卷和答题卡一并收回。

参考公式：

三角函数的积化和差公式

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

正棱台、圆台的侧面积公式

$$S_{\text{台侧}} = \frac{1}{2} (c' + c)l$$

其中 c' 、 c 分别表示上、下底面周长， l 表示斜高或母线长

$$V_{\text{台体}} = \frac{1}{3} (S' + \sqrt{S'S} + S)h$$

其中 S' 、 S 分别表示上、下底面积， h 表示高

一、选择题：本大题共 12 小题；第每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

(1) 若 $\sin \theta \cos \theta > 0$ ，则 θ 在

(A) 第一、二象限 (B) 第一、三象限 (C) 第一、四象限 (D) 第二、四象限

(2) 过点 $A(1,-1)$ 、 $B(-1,1)$ 且圆心在直线 $x + y - 2 = 0$ 上的圆的方程是

(A) $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$ (B) $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 4$

(C) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ (D) $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 4$

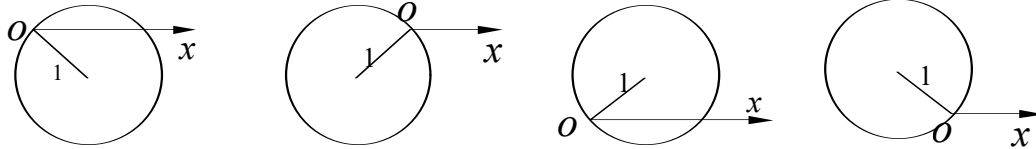
(3) 设 $\{a_n\}$ 是递增等差数列，前三项的和为 12，前三项的积为 48，则它的首项是

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 6

(4) 若定义在区间 $(-1, 0)$ 内的函数 $f(x) = \log_{2a}(x+1)$ 满足 $f(x) > 0$, 则 a 的取值范围是

- (A) $(0, \frac{1}{2})$ (B) $(0, \frac{1}{2}]$ (C) $(\frac{1}{2}, +\infty)$ (D) $(0, +\infty)$

(5) 极坐标方程 $\rho = 2\sin(\theta + \frac{\pi}{4})$ 的图形是



- (A) (B) (C) (D)

(6) 函数 $y = \cos x + 1$ ($-\pi \leq x \leq 0$) 的反函数是

- (A) $y = -\arccos(x-1)$ ($0 \leq x \leq 2$) (B) $y = \pi - \arccos(x-1)$ ($0 \leq x \leq 2$)

- (C) $y = \arccos(x-1)$ ($0 \leq x \leq 2$) (D) $y = \pi + \arccos(x-1)$ ($0 \leq x \leq 2$)

(7) 若椭圆经过原点, 且焦点为 $F_1(1,0), F_2(3,0)$, 则其离心率为

- (A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{4}$

(8) 若 $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{4}$, $\sin \alpha + \cos \alpha = a$, $\sin \beta + \cos \beta = b$, 则

- (A) $a < b$ (B) $a > b$ (C) $ab < 1$ (D) $ab > 2$

(9) 在正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 若 $AB = \sqrt{2}BB_1$, 则 AB_1 与 C_1B 所成的角的大小为

- (A) 60° (B) 90° (C) 105° (D) 75°

(10) 设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 都是单调函数, 有如下四个命题:

① 若 $f(x)$ 单调递增, $g(x)$ 单调递增, 则 $f(x) - g(x)$ 单调递增;

② 若 $f(x)$ 单调递增, $g(x)$ 单调递减, 则 $f(x) - g(x)$ 单调递增;

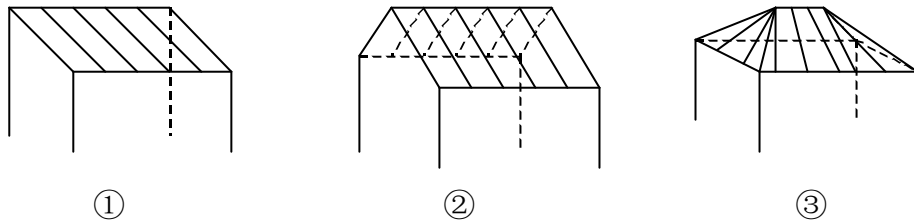
③ 若 $f(x)$ 单调递减, $g(x)$ 单调递增, 则 $f(x) - g(x)$ 单调递减;

④ 若 $f(x)$ 单调递减, $g(x)$ 单调递减, 则 $f(x) - g(x)$ 单调递减;

其中, 正确的命题是

- (A) ①③ (B) ①④ (C) ②③ (D) ②④

(11) 一间民房的屋顶有如图三种不同的盖法: ①单向倾斜; ②双向倾斜; ③四向倾斜. 记三种盖法屋顶面积分别为 P_1 、 P_2 、 P_3 .

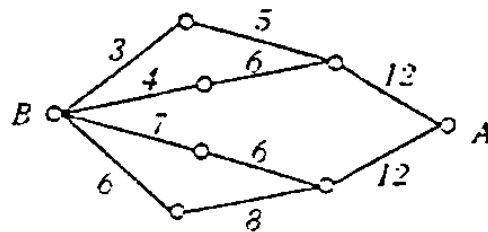


若屋顶斜面与水平面所成的角都是 α ，则

- (A) $P_3 > P_2 > P_1$ (B) $P_3 > P_2 = P_1$ (C) $P_3 = P_2 > P_1$ (D) $P_3 = P_2 = P_1$

(12) 如图，小圆圈表示网络的结点，结点之间的连线表示它们有网线相连。连线标注的数字表示该段网线单位时间内可以通过的最大信息量。现从结点 A 向结点 B 传递信息，信息可以分开沿不同的路线同时传递。则单位时间内传递的最大信息量为

- (A) 26 (B) 24
(C) 20 (D) 19



第 II 卷（非选择题 90 分）

注意事项：

- 第 II 卷共 7 页，用钢笔或圆珠笔直接答在试题卷中。
- 答卷前将密封线内的项目填写清楚。

二. 填空题：本大题共 4 小题；每小题 4 分，共 16 分，把答案填在题中横线上。

(13) 若一个椭圆的轴截面是等边三角形，其面积为 $\sqrt{3}$ ，则这个椭圆的侧面积是_____

(14) 双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 的两个焦点为 F_1 、 F_2 ，点 P 在双曲线上. 若 $PF_1 \perp PF_2$ ，则点 P 到 x 轴的距离为_____.

(15) 设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列， S_n 是它的前 n 项和. 若 $\{S_n\}$ 是等差数列，则 $q =$ _____ .

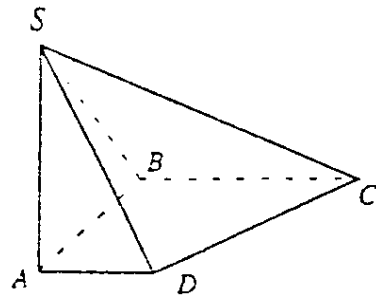
(16) 圆周上有 $2n$ 个等分点 ($n > 1$)，以其中三个点为顶点的直角三角形的个数为_____.

三、解答题：本大题共 6 小题；共 74 分，解答应写出文字说明、证明过程或

演算步骤。

(17) (本小题满分 12 分)

如图, 在底面是直角梯形的四棱锥 $S-ABCD$ 中,
 $\angle ABC = 90^\circ$, $SA \perp$ 面 $ABCD$, $SA = AB = BC = 1$,
 $AD = \frac{1}{2}$.



(I) 求四棱锥 $S-ABCD$ 的体积;

(II) 求面 SCD 与面 SBA 所成的二面角的正切值.

(18) (本小题满分 12 分)

已知复数 $z_1 = i(1-i)^3$.

(I) 求 $\arg z_1$ 及 $|z_1|$;

(II) 当复数 z 满足 $|z| = 1$, 求 $|z - z_1|$ 的最大值.

(19) (本小题满分 12 分)

设抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 经过点 F 的直线交抛物线于 A 、 B 两点. 点 C 在抛物线的准线上, 且 $BC \parallel x$ 轴. 证明直线 AC 经过原点 O .

(20) (本小题满分 12 分)

已知 i, m, n 是正整数, 且 $1 < i \leq m < n$.

(I) 证明 $n^i P_m^i < m^i P_n^i$;

(II) 证明 $(1+m)^n > (1+n)^m$.

(21) (本小题满分 12 分)

从社会效益和经济效益出发, 某地投入资金进行生态环境建设, 并以此发展旅游产业. 根据规划, 本年度投入 800 万元, 以后每年投入将比上年减少 $\frac{1}{5}$. 本年度当地旅游业收入估计为 400 万元, 由于该项建设对旅游业的促进作用, 预计今后的旅游业收入每年会比上年增加 $\frac{1}{4}$.

(I) 设 n 年内 (本年度为第一年) 总投入为 a_n 万元, 旅游业总收入为 b_n 万元. 写出 a_n, b_n 的表达式;

(II) 至少经过几年旅游业的总收入才能超过总投入?

(22) (本小题满分 14 分)

设 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，其图象关于直线 $x=1$ 对称，对任意 $x_1, x_2 \in [0, \frac{1}{2}]$ ，都有

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2), \text{ 且 } f(1) = a > 0.$$

(I) 求 $f(\frac{1}{2})$ 及 $f(\frac{1}{4})$;

(II) 证明 $f(x)$ 是周期函数;

(III) 记 $a_n = f(2n + \frac{1}{2n})$ ，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln a_n)$.

普通高等学校招生全国统一考试

数学试题（理工农医类）参考解答及评分标准

说明：

一. 本解答指出了每题要考查的主要知识和能力，并给出了一种或几种解法供参考，如果考生物解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制订相应的评分细则.

二. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定部分的给分，但不得超过该部分正确解答得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分.

三. 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

四. 只给整数分数. 选择题和填空题不给中间分.

一. 选择题：本题考查基本知识和基本运算. 每小题 5 分，满分 60 分.

- (1) B (2) C (3) B (4) A (5) C
(6) A (7) C (8) A (9) B (10) C
(11) D (12) D

二. 填空题：本题考查基本知识和基本运算. 每小题 4 分，满分 16 分.

- (13) 2π (14) $\frac{16}{5}$ (15) 1 (16) $2n(n-1)$

三. 解答题：

(17) 本小题考查线面关系和棱锥体积计算, 以及空间想象能力和逻辑推理能力. 满分 12 分.

解: (I) 直角梯形 $ABCD$ 的面积是

$$M_{\text{底面}} = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot AB = \frac{1+0.5}{2} \times 1 = \frac{3}{4}, \quad \dots\dots 2 \text{ 分}$$

\therefore 四棱锥 $S-ABCD$ 的体积是

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times SA \times M_{\text{底面}} \\ &= \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

(II) 延长 BA 、 CD 相交于点 E , 连结 SE 则 SE 是所求二面角的棱. $\dots\dots 6 \text{ 分}$

$\because AD \parallel BC, BC = 2AD,$

$\therefore EA = AB = SA, \therefore SE \perp SB,$

$\because SA \perp$ 面 $ABCD$, 得 $SEB \perp$ 面 EBC , EB 是交线,

又 $BC \perp EB, \therefore BC \perp$ 面 $SEB,$

故 SB 是 CS 在面 SEB 上的射影,

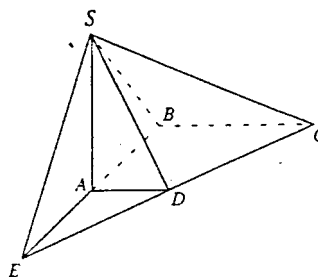
$\therefore CS \perp SE,$

所以 $\angle BSC$ 是所求二面角的平面角. $\dots\dots 10 \text{ 分}$

$$\because SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{2}, \quad BC = 1, \quad BC \perp SB,$$

$$\therefore \tan \angle BSC = \frac{BC}{SB} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

即所求二面角的正切值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$. $\dots\dots 12 \text{ 分}$



(18) 本小题考查复数基本性质和基本运算, 以及分析问题和解决问题的能力. 满分 12 分.

解: (I) $z_1 = i(1-i)^3 = 2-2i,$

将 z_1 化为三角形式, 得

$$z_1 = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right),$$

$$\therefore \arg z_1 = \frac{7\pi}{4}, \quad |z_1| = 2\sqrt{2}. \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$

(II) 设 $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$, 则

$$z - z_1 = (\cos \alpha - 2) + (\sin \alpha + 2)i,$$

$$\begin{aligned}
 |z - z_1|^2 &= (\cos \alpha - 2)^2 + (\sin \alpha + 2)^2 \\
 &= 9 + 4\sqrt{2} \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right), \quad \dots\dots 9 \text{ 分}
 \end{aligned}$$

当 $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = 1$ 时, $|z - z_1|^2$ 取得最大值 $9 + 4\sqrt{2}$.

从而得到 $|z - z_1|$ 的最大值为 $2\sqrt{2} + 1$. \dots\dots 12 分

(19) 本小题考查抛物线的概念和性质, 直线的方程和性质, 运算能力和逻辑推理能力. 满分 12 分.

证明一: 因为抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点为 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, 所以经过点 F 的直线的方程可设为

$$x = my + \frac{p}{2}; \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

代入抛物线方程得

$$y^2 - 2pmy - p^2 = 0,$$

若记 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 y_1, y_2 是该方程的两个根, 所以

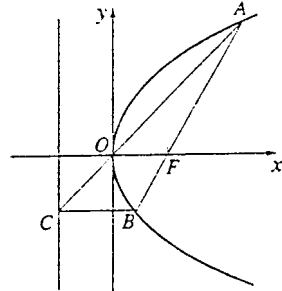
$$y_1 y_2 = -p^2. \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

因为 $BC \parallel x$ 轴, 且点 c 在准线 $x = -\frac{p}{2}$ 上, 所以点 c 的坐标

为 $\left(-\frac{p}{2}, y_2\right)$,

故直线 CO 的斜率为

$$k = \frac{y_2}{-\frac{p}{2}} = \frac{2p}{y_1} = \frac{y_1}{x_1}.$$



即 k 也是直线 OA 的斜率, 所以直线 AC 经过原点 O .

\dots\dots 12 分

证明二: 如图, 记 x 轴与抛物线准线 l 的交点为 E , 过 A 作 $AD \perp l$, D 是垂足. 则

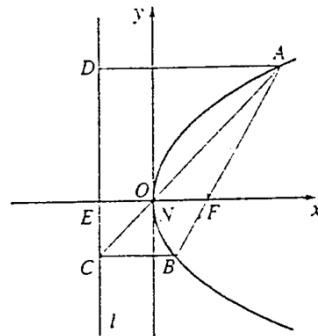
$AD \parallel FE \parallel BC$. \dots\dots 2 分

连结 AC , 与 EF 相交于点 N , 则

$$\frac{|EN|}{|AD|} = \frac{|CN|}{|AC|} = \frac{|BF|}{|AB|},$$

$$\frac{|NF|}{|BC|} = \frac{|AF|}{|AB|},$$

\dots\dots 6 分



根据抛物线的几何性质, $|AF| = |AD|$,

$$|BF| = |BC|, \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\therefore |EN| = \frac{|AD| \cdot |BF|}{|AB|} = \frac{|AF| \cdot |BC|}{|AB|} = |NF|,$$

即点 N 是 EF 的中点, 与抛物线的顶点 O 重合, 所以直线 AC 经过原点 O . $\dots\dots 12 \text{ 分}$

(20) 本小题考查排列、组合、二项式定理、不等式的基本知识和逻辑推理能力. 满分 12 分.

(I) 证明: 对于 $1 < i \leq m$ 有

$$p_m^i = m \cdot \dots \cdot (m - i + 1),$$

$$\frac{p_m^i}{m^i} = \frac{m}{m} \cdot \frac{m-1}{m} \cdot \dots \cdot \frac{m-i+1}{m},$$

$$\text{同理 } \frac{p_n^i}{n^i} = \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-i+1}{n}, \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

由于 $m < n$, 对整数 $k = 1, 2, \dots, i-1$, 有 $\frac{n-k}{n} > \frac{m-k}{m}$,

$$\text{所以 } \frac{p_n^i}{n^i} > \frac{p_m^i}{m^i}, \text{ 即 } m^i p_n^i > n^i p_m^i. \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$

(II) 证明由二项式定理有

$$(1+m)^n = \sum_{i=0}^n m^i C_n^i,$$

$$(1+n)^m = \sum_{i=0}^m n^i C_m^i, \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

由 (I) 知 $m^i p_n^i > n^i p_m^i$ ($1 < i \leq m < n$),

$$\text{而 } C_m^i = \frac{p_m^i}{i!}, \quad C_n^i = \frac{p_n^i}{i!}, \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

所以, $m^i C_n^i > n^i C_m^i$ ($1 < i \leq m < n$).

$$\text{因此, } \sum_{i=2}^m m^i C_n^i > \sum_{i=2}^m n^i C_m^i.$$

$$\text{又 } m^0 C_n^0 = n^0 C_m^0 = 1, \quad m C_n^1 = n C_m^1 = mn, \quad m^i C_n^i > 0 (m < i \leq n).$$

$$\therefore \sum_{i=0}^n m^i C_n^i > \sum_{i=0}^m n^i C_m^i.$$

即 $(1+m)^n > (1+n)^n$. ……12分

(21) 本小题主要考查建立函数关系式、数列求和、不等式等基础知识；考查综合运用数学知识解决实际问题的能力. 满分12分.

解：(I) 第1年投入为800万元，第2年投入为 $800 \times (1 - \frac{1}{5})$ 万元，……，第 n 年投入为 $800 \times (1 - \frac{1}{5})^{n-1}$ 万元.

所以， n 年内的总投入为

$$\begin{aligned} a_n &= 800 + 800 \times (1 - \frac{1}{5}) + \dots + 800 \times (1 - \frac{1}{5})^{n-1} \\ &= \sum_{k=1}^n 800 \times (1 - \frac{1}{5})^{k-1} \\ &= 4000 \times [1 - (\frac{4}{5})^n]; \end{aligned} \quad \text{……3分}$$

第1年旅游业收入为400万元，第2年旅游业收入为 $400 \times (1 + \frac{1}{4})$ 万元，……，第 n 年旅游业收入为 $400 \times (1 + \frac{1}{4})^{n-1}$ 万元.

所以， n 年内的旅游业总收入为

$$\begin{aligned} b_n &= 400 + 400 \times (1 + \frac{1}{4}) + \dots + 400 \times (1 + \frac{1}{4})^{n-1} \\ &= \sum_{k=1}^n 400 \times (\frac{5}{4})^{k-1} \\ &= 1600 \times [(\frac{4}{5})^n - 1]. \end{aligned} \quad \text{……6分}$$

(II) 设至少经过 n 年旅游业的总收入才能超过总投入，由此

$$b_n - a_n > 0,$$

$$\text{即 } 1600 \times [(\frac{5}{4})^n - 1] - 4000 \times [1 - (\frac{4}{5})^n] > 0.$$

$$\text{化简得 } 5 \times (\frac{4}{5})^n + 2 \times (\frac{4}{5})^n - 7 > 0, \quad \text{……9分}$$

设 $x = (\frac{4}{5})^n$ ，代入上式得

$$5x^2 - 7x + 2 > 0,$$

解此不等式，得

$$x < \frac{2}{5}, \quad x > 1 (\text{舍去}).$$

即
$$\left(\frac{4}{5}\right)^n < \frac{2}{5},$$

由此得
$$n \geq 5.$$

答：至少经过 5 年旅游业的总收入才能超过总投入。 ……12 分

(22) 本小题主要考查函数的概念、图像，函数的奇偶性和周期性以及数列极限等基础知识；考查运算能力和逻辑思维能力。满分 14 分。

(I) 解：因为对 $x_1, x_2 \in [0, \frac{1}{2}]$ ，都有 $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$ ，所以

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0, x \in [0, 1].$$

$$\therefore f(1) = f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) = [f\left(\frac{1}{2}\right)]^2,$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right) \cdot f\left(\frac{1}{4}\right) = [f\left(\frac{1}{4}\right)]^2. \quad \text{……3 分}$$

$$f(1) = a > 0,$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = a^{\frac{1}{2}}, f\left(\frac{1}{4}\right) = a^{\frac{1}{4}}. \quad \text{……6 分}$$

(II) 证明：依题设 $y = f(x)$ 关于直线 $x = 1$ 对称，

故 $f(x) = f(1+1-x)$,

即 $f(x) = f(2-x)$, $x \in \mathbb{R}$. ……8 分

又由 $f(x)$ 是偶函数知 $f(-x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$,

$$\therefore f(-x) = f(2-x), x \in \mathbb{R},$$

将上式中 $-x$ 以 x 代换，得

$$f(x) = f(x+2), x \in \mathbb{R}.$$

这表明 $f(x)$ 是 \mathbb{R} 上的周期函数，且 2 是它的一个周期。 ……10 分

(III) 解：由 (I) 知 $f(x) \geq 0, x \in [0, 1]$ 。

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(n \cdot \frac{1}{2n}\right) = f\left(\frac{1}{2n} + (n-1) \cdot \frac{1}{2n}\right)$$

$$= f\left(\frac{1}{2n}\right) \cdot f\left((n-1) \cdot \frac{1}{2n}\right)$$

$$= f\left(\frac{1}{2n}\right) \cdot f\left(\frac{1}{2n}\right) \cdot \dots \cdot f\left(\frac{1}{2n}\right)$$

$$= [f\left(\frac{1}{2n}\right)]^n,$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = a^{\frac{1}{2}},$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2^n}\right) = a^{\frac{1}{2^n}}.$$

$\therefore f(x)$ 的一个周期是2,

$$\therefore f\left(2n + \frac{1}{2^n}\right) = f\left(\frac{1}{2^n}\right), \text{ 因此 } a_n = a^{\frac{1}{2^n}}, \quad \dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^n} \ln a\right) = 0. \quad \dots\dots 14 \text{ 分}$$