2000年广东高考数学真题及答案

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分。第Ⅰ卷1至2页。第Ⅱ卷3至8页。共150分。考试时间120分钟。

第Ⅰ卷（选择题共60分）

注意事项：

1．答第Ⅰ卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、座位号、考试科目、试卷类型（A或B）用铅笔涂写在答题卡上，同时将才生号条形码粘贴在答题卡“条形码粘贴处”。

2．每小题选出答案后，用铅笑把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案，不能答在试题卷上。

3．考试结束，监考人将本试卷和答题卡一并收回。

参考公式：

三角函数的积化和差公式

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\phi)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

正棱台、圆台的侧面积公式

$$S_{台侧}=\frac{1}{2}(c'+c)l$$

其中c'、c分别表示上、下底面周长，l表示斜高或母线长

台体的体积公式

$$V_{台体}=\frac{1}{3}(S+\sqrt{S'\,S}+S)h$$

其中S'、S分别表示上、下底面积，h表示高。

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

（1）已知集合$A=\{1,2,3,4\}$，那么A的真子集的个数是：

（A）15　（B）16　（C）3　（D）4

（2）在复平面内，把复数$3-\sqrt{3}i$对应的向量按顺时钟方向旋转$\frac{\pi}{3}$，所得向量对应的复数是：

（A）$2\sqrt{3}$　（B）$-2\sqrt{3}i$　（C）$\sqrt{3}-3i$　（D）$3+\sqrt{3}i$

（3）一个长方体共一顶点的三个面的面积分别是$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{6}$，这个长方体对角线的长是：

（A）$2\sqrt{3}$　（B）$3\sqrt{2}$　（C）6　（D）$\sqrt{6}$

（4）已知$\sin\alpha>\sin\beta$，那么下列命题成立的是

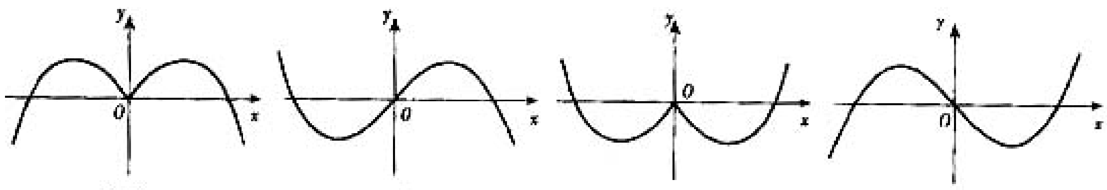
（A）若α、β是第一象限角，则$\cos\alpha>\cos\beta$

（B）若α、β是第二象限角，则$tg\ \alpha>tg\ \beta$

（C）若α、β是第三象限角，则$\cos\alpha>\cos\beta$

（D）若α、β是第四象限角，则$tg\ \alpha > tg\ \beta$

（5）函数 $y=-x\cos x$ 的部分图象是



（A）　　（B）　　（C）　　（D）

（6）《中华人民共和国个人所得税法》规定，公民全月工资、薪金所得不超过 800 元的部分不必纳税，超过 800 元的部分为全月应纳税所得额，此项税款按下表分段累进计算：

全月应纳税所得额	税率
不超过 500 元的部分	5%
超过 500 元至 2000 元的部分	10%
超过 2000 元至 5000 元的部分	15%
…	…

某人一月份应交纳此项税款 26.78 元，则他的当月工资、薪金所得介于

（A）800~900 元　（B）900~1200 元　（C）1200~1500 元　（D）1500~2800 元

（7）若 $a>b>1$，$P=\sqrt{\lg a\cdot\lg b},Q=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b),R=\lg\left(\frac{a+b}{2}\right)$，则

（A）R＜P＜Q　（B）P＜Q＜R　（C）Q＜P＜R　（D）P＜R＜Q

（8）以极坐标系中的点（1，1）为圆心，1 为半径的圆的方程是

（A）$\rho=2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$　（B）$\rho=2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$

（C）$\rho=2\cos(\theta-1)$　（C）$\rho=2\sin(\theta-1)$

（9）一个圆柱的侧面展开图是一个正方形，这个圆柱的全面积与侧面积的比是

（A）$\frac{1+2\pi}{2\pi}$　（B）$\frac{1+4\pi}{4\pi}$　（C）$\frac{1+2\pi}{\pi}$　（D）$\frac{1+4\pi}{2\pi}$

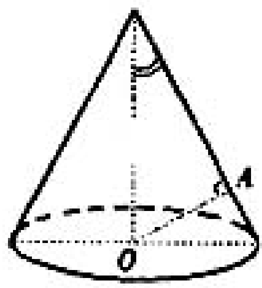
（10）过原点的直线与圆 $x^2+y^2+4x+3=0$ 相切，若切点在第三象限，则该直线的方程是

（A）$y=\sqrt{3x}$　（B）$y=-\sqrt{3x}$　（C）$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$　（D）$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$

（11）过抛物线 $y=ax^2(a\succ 0)$ 的焦点 F 作一直线交抛物线于 P、Q 两点，若线段 PF 与 FQ 的长分别是 p、q，则 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ 等于

（A）$2a$　（B）$\frac{1}{2a}$　（C）$4a$　（D）$\frac{4}{a}$

（12）如图，OA是圆锥底面中心O互母线的垂线，OA绕轴旋转一周所得曲面将圆锥分成体积相等的两部分，则母线与轴的夹角的余弦值为



（A）$\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$　　（B）$\dfrac{1}{2}$　　（C）$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　（D）$\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}$

2000年普通高等学校招生全国统一考试（广东卷）

数学

第Ⅱ卷（非选择题共90分）

注意事项：

1．第Ⅱ卷共6页，用钢笔或圆珠笔直接答在试题卷中。

2．答卷前将密封线内的项目填写清楚，并在试卷右上角填上座位号。

题号	二	三						总分
		17	18	19	20	21	22	
分数								

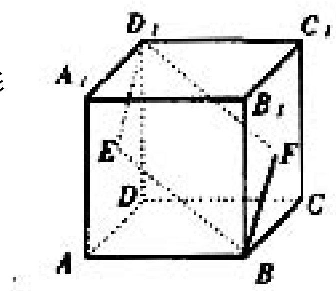
得分	评卷人

二、填空题：本大题共4小题，每小题4分，共16分，把答案填在题中横线上。

（13）乒乓球队的10名队员中有3名主力队员，派5名参加比赛，3名主力队员要安排在第一、三、五位置，其余7名队员选2名安排在第二、四位置，那么不同的出场安排共有________种（用数字作答）。

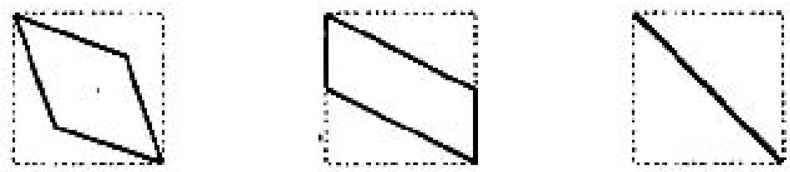
（14）椭圆$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$的焦点$F_1$、$F_2$，点$P$为其上的动点，当∠$F_1PF_2$为钝角时,点$P$横坐标的取值范围是____________。

（15）设$\left|a_n\right|$是首项为1的正项数列，且（n+1）$a_{n+1}^2-na_n^{\ 2}+a_{n+1}a_n=0$（n=1，2，3，…），则它的通项公式是$a_n=$____________。



（16）如图，E、F分别为正方体面ADD_1A_1、面BCC_1B_1的中心，则四边形BFD_1E在该正方体的面上的射影可能是________________。

（要求：把可能的图序号都填上）



①　　　②　　　③

三、解答题：本大题共6小题，共74分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

得分	评卷人

（17）（本小题满分12分）

已知函数 $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x, x\in R$

（Ⅰ）当函数 y 取得最大值时，求自变量 x 的集合；

（Ⅱ）该函数的图象可由 $y=\sin x(x\in R)$ 的图象经过怎样的平移和伸缩变换得到？

得分	评卷人

（18）（本小题满分 12 分）

设 $\{a_n\}$ 为等比数例，$T_n=na_1+(n-1)a_2\cdots+2a_{n-1}+a_n$，已知 $T_1=1$，$T_2=4$。

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的首项和公式；

（Ⅱ）求数列 $\{T_n\}$ 的通项公式。

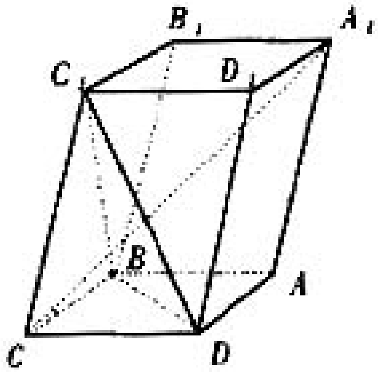
得分	评卷人

（19）（本小题满分 12 分）

如图，已知平行六面体 ABCD—$A_1B_1C_1D_1$ 的底面 ABCD 上菱形，且∠C_1CB=∠C_1CD=∠BCD，

（Ⅰ）证明：C_1C⊥BD；

（Ⅱ）当 $\dfrac{CD}{CC_1}$ 的值为多少时，能使 A_1C⊥平面 C_1BD？请给出证明。



得分	评卷人

（20）（本小题满分 12 分）

设函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-ax$，其中 $a\succ 0$。

（Ⅰ）解不等式 $f(x)\leqslant 1$；

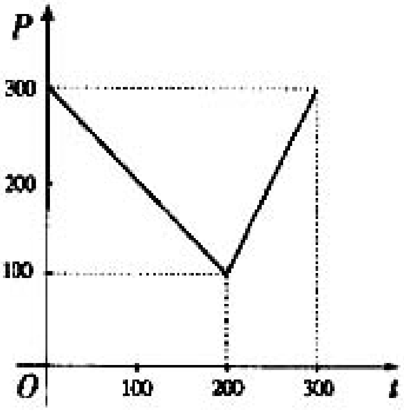
（Ⅱ）证明：当 $a\geqslant 1$ 时，函数 $f(x)$ 在区间[0，+∞]上是单调函数。

得分	评卷人

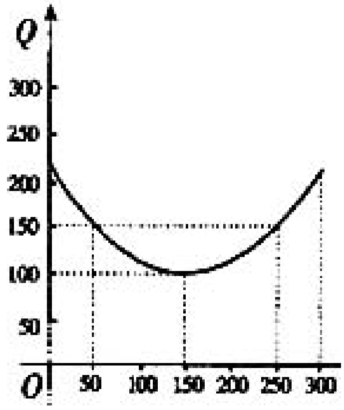
（21）（本小题满分 12 分）

某蔬菜基地种植西红柿，由历年市场行情得知，从二月一日起的 300 天内，西红柿场售价与上市时间的关系用图一的一条折线表示；西红柿的种植成本与上市时间的关系用图二的抛物线段表示。

图一



图二



（Ⅰ）写出图一表示的市场售价与时间的函数关系式 $p=f(t)$；

写出图二表示的种植成本与时间的函数关系式 $Q=g(t)$；

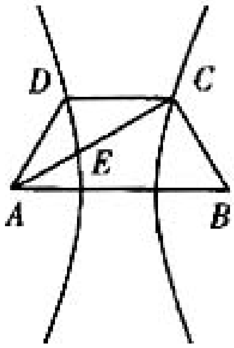
（Ⅱ）认定市场售价减去种植成本为纯收益，问何时上市的西红柿纯收益最大？

（注：市场售价各种植成本的单位：元/10^2kg，时间单位：天）

得分	评卷人

（22）（本小题满分 14 分）

如图，已知梯形 ABCD 中|AB|=2|CD|，点 E 分有向线段 $\overline{AC}$ 所成的比为 λ，双曲线过 C、D、E 三点，且以 A、B 为伪点，当 $\frac{2}{3}\le\lambda\le\frac{3}{4}$ 时，求双曲线离心率 c 的取值范围。



2000 年普通高等学校招生全国统一考试（广东卷）

数学试题参考解答及评分标准

说明：

一、本解答指出了每题要考查的主要知识和能力，并给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不局，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制订相应的评分细则。

二、对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。

三、解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

四、只给整数分数，选择题和填空不给中间分。

一、选择题：本题考查基本知识和基本运算，每小题 5 分，满分 60 分。

A 型卷答案

（1）A　（2）B　（3）D　（4）D　（5）D　（6）C　（7）B　（8）C　（9）A

（10）C　（11）C　（12）D

B 型卷答案

（1）C　（2）B　（3）D　（4）D　（5）D　（6）A　（7）B　（8）A　（9）C　（10）A　（11）A　（12）D

二、填空题：本题考查基本知识和基本运算，每小题 4 分，满分 16 分。

（13）252　（14）$-\frac{3}{\sqrt{5}} \prec x \prec \frac{3}{\sqrt{5}}$　（15）$\frac{1}{n}$　（16）②③

三、解答题

（17）本小题主要考查三角函数的图象和性质、利用三角公式进行恒等变形的技能以及运算能力。满分 12 分。

解：（1）

$$
\begin{aligned}
y &= \sqrt{3}\sin x + \cos x \\
&= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right) \\
&= 2\left(\sin x \cos\frac{\pi}{6} + \cos x \sin\frac{\pi}{6}\right) \\
&= 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right), x \in R\text{。}
\end{aligned}
$$

…………3 分

γ 取得最大值必须且只需

即

$$x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z,$$

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z,$$

所以，使函数 γ 取得最大值的自变量 x 的集合为

$\{x \mid x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z\}$,　…………6 分

（Ⅱ）变换的步骤是：

（1）把函数 $y = \sin x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$, 得到　…………9 分

$y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象；

（2）令所得到的图象上各点横坐标不变，把纵坐标伸长到原来的 2 倍，得到

$y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象；

经过这样的变换就得到函数 $y = \sqrt{3}\sin x + \cos x$ 的图象。　…………12 分

（18）本小题主要考查等比数列的基础知识和基本技能，运算能力，满分 12 分。

（Ⅰ）解：设等比数列 $\{a_n\}$ 以比为 q，则

$T_1 = a_1, T_2 = 2a_1 + a_2 = a_1(2+q)$。　…………2 分

$\because T_1=1, T_2=4$，

$\therefore a_1=1, q=2$。　　　　　　　　　　　　…………4 分

（Ⅱ）解法一：由（Ⅰ）知 $a_1=1, q=2$，故 $a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}$，

因此，$T_n=n\cdot 1+(n-1)\cdot 2+\cdots+2\cdot 2^{n-2}+1\cdot 2^{n-1}$，　　　　　　…………6 分

$$
\begin{aligned}
T_n &= 2T_n-T_n \\
&= n\cdot 2+(n-1)\cdot 2^2+\cdots+2\cdot 2^{n-1}+1\cdot 2^n \\
&\quad -[n\cdot 1+(n-1)\cdot 2+\cdots+2\cdot 2^{n-2}+1\cdot 2^{n-1}] \\
\therefore\quad &= -n+2+2^2+\cdots+2^{n-1}+2^n \\
&= -n+\frac{2-2\cdot 2^n}{1\sim 2} \\
&= -n+2^{n+1}-2 \\
&= -(n+2)+2^{n+1}
\end{aligned}
$$

。　　　　　　　　　　　　…………12 分

解法二：设 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$。

由（Ⅰ）知 $a_n=2^{n-1}$。

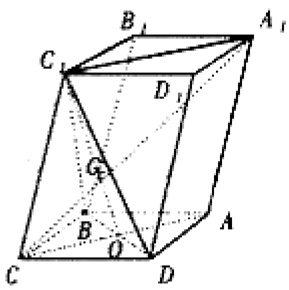
$$
\begin{aligned}
\therefore\quad S_n &= 1+2+\cdots+2^{n-1} \\
&= 2^n-1
\end{aligned}
$$

…………6 分

$$
\begin{aligned}
T_n &= na_1+(n-1)a_2+\cdots+2a_{n-1}+a_n \\
&= \mathrm{a}_1+(a_1+a_2)+\cdots+(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n) \\
&= \mathrm{S}_1+S_2+\cdots+S_n \qquad \text{…………10分} \\
\therefore\quad &= (2+1)+(2^n\text{-}1)+\cdots+(2^n\text{-}1) \\
&= (2+2^n+\cdots+2^n)\text{-}n \\
&= \frac{2-2\cdot 2^n}{1-2}-n \\
&= 2^{n+1}-2-n \qquad \text{………12分}
\end{aligned}
$$

（19）本小题主要考查直线与直线、直线与平面的关系，逻辑推理能力，满分 12 分。

（Ⅰ）证明：连结 A_1C_1、AC 和 BD 交于 O，连结 C_1O。



$\because$ 四边形 ABCD 是菱形，

$\therefore AC\perp BD$，$BC=CD$。

又 $\because \angle BCC_1=\angle DCC_1$，$C_1C=C_1C$，

$\therefore \Delta C_1BC\cong\Delta C_1DC$，

$\therefore C_1$B=C_1D，

$\because DO=OB$

$\therefore C_1O\perp BD$，　　　　　　　　3 分

但 $AC\perp BD, AC\cap C_1O=O$，

$\therefore BD\perp$ 平面 AC_1。

又 $C_1C\subset$ 平面 AC_1，

$\therefore C_1C\perp BD$。　　　　　　…………6 分

（Ⅱ）当 $\frac{CD}{CC_1}=1$ 时，能使 $A_1C\perp$ 平面 C_1BD。

证明一：

$\because \frac{CD}{CC_1}=1$，

$\therefore BC=CD=C_1C$，

又 $\angle BCD=\angle C_1CB=\angle C_1CD$，

由此可推得 $BD=C_1B=C_1D$。

$\therefore$ 三棱锥 $C-C_1BD$ 是正三棱锥。　　　　　　…………9 分

设 A_1C 与 C_1O 相交于 G。

$\because A_1C_1 // AC$，且 A_1C_1：$OC=2$：1，

$\therefore C_1G$：GO=2：1。

又 C_1O 是正三角形 C_1BD 的 BD 边上的高和中线，

$\therefore$ 点 G 是正三角形 C_1BD 的中心，

$\therefore CG\perp$ 平面 C_1BD，

即 $A_1C\perp$ 平面 C_1BD。　　　　　　…………12 分

证明：

由（Ⅰ）知，$BC\perp$ 平面 AC_1，

$\because A_1C\subset$ 平面 AC_1，$\therefore BD\perp A_1C$。　　　　　　…………9 分

当 $\frac{CD}{CC_1}=1$ 时，平行六面体的六个面是全等的菱形，

同 $BD \perp A_1C$ 的正法可得 $BC_1 \perp A_1C$。

又 $BD \cap BC_1 = B$，

$\therefore A_1C \perp$ 平面 C_1BD。　　　　　　　　　　…………12 分

（20）本小题主要考查不等式的解法、函数的单调性等基本知识，分类讨论的数学思想方法和运算、推理能力，满分 12 分。

（Ⅰ）解：不等式 $f(x) \le 1$ 即

$\sqrt{x^2+1} \le 1+ax$，

由此得 $1 \le 1+ax$，即 $ax \ge 0$，其中常数 $a \succ 0$。

所以，原不等式等价于

$$\begin{cases} x^2+1 \le (1+ax)^2, \\ x \ge 0. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x \ge 0, \\ (a^2-1)x+2a \ge 0 \end{cases}$$　　　　　　　　　　…………3 分

所以，当 $0 \prec a \prec 1$ 时，所给不等式的解集为 $\{x \mid 0 \le x \le \dfrac{2a}{1-a^2}\}$；

当 $a \ge 1$ 时，所给不等式的解集为 $\{x \mid x \ge 0\}$。　　　　　　　　　　…………6 分

（Ⅱ）证明：在区间 $[0,+\infty)$ 上任取 x_1, x_2 使得 $x_1 \prec x_2$

$$\begin{aligned} f(x_1)-f(x_2) &= \sqrt{x_1^2+1}-\sqrt{x_2^2+1}-a(x_1-x_2) \\ &= \frac{x_1^2-x_2^2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-a(x_1-x_2) \\ &= (x_1-x_2)\left(\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-a\right). \end{aligned}$$　　　　　　　　　　…………9分

$\because \dfrac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}} \prec 1$, 且 $a \ge 1$，

$\therefore \dfrac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}} - a \prec 0$，

又 $x_1 - x_2 \prec 0$，

$\therefore f(x_1)-f(x_2) \succ 0$，

即 $f(x_1) \succ f(x_2)$。

所以，当 $a \ge 1$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调递减函数。　　　　…………12 分

（21）本小题主要考查由函数图建立函数关系式和求函数最大值的问题，考查运用所学知识解决实际问题的能力，满分 12 分。

解：（Ⅰ）由图一可得市场售价与时间的函数关系为

$$f(t)=\begin{cases}300-t, & 0\le t\le 200,\\ 2t-300 & 200\prec t\le 300\end{cases}$$ …………2分

由图二可得种植成本与时间的函数关系为

$$g(t)=\frac{1}{20}(t-150)^2+100,\qquad 0\le t\le 300。$$ …………4 分

（Ⅱ）设 t 时刻的纯收益为 $h(t)$，则由题意得

$h(t)=f(t)-g(t)$，

即

$$h(t)=\begin{cases}-\frac{1}{200}t^2+\frac{1}{2}t+\frac{175}{2}, & 0\le t\le 200,\\ -\frac{1}{200}t^2+\frac{7}{2}t-\frac{1025}{2}, & 200\prec t\le 300\end{cases}$$ …………6 分

当 $0\le t\le 200$ 时，配方整理得

$h(t)=-\frac{1}{200}(t-50)^2+100$。

所以，当 $t=50$ 时，$h(t)$ 取得区间[0，200]上的最大值 100；

当 $200\prec t\le 300$ 时，配方整理得

$h(t)=-\frac{1}{200}(t-350)^2+100$，

所以，当 $t=300$ 时，$h(t)$ 取得区间（200，300）上的最大值 87.5 …………10 分

综上，由 $100\succ 87.5$ 可知，$h(t)$ 在区间[0，300]上可以取得最大值 100，此时 $t=50$，即从二月一日开始的第 50 天时，上市的西红柿纯收益最大。 …………12 分

（22）本小题主要考查坐标法、定比分点坐标公式、双曲线的概念和性质，推理、运算能力和综合应用数学知识解决问题的能力，满分 14 分。

解：如图，以 AB 的垂直平分线为 γ 轴，直线 AB 为 x 轴，建立直角坐标系 $xO\gamma$，则 $CD\perp\gamma$ 轴。

因为双曲线经过点 C、D，且以 A、B 为焦点，由双曲线的对称性知 C、D 关于 γ 轴对称， …………2 分

依题意，记 $A(-c,0),C\left(\frac{c}{2},h\right),E(x_0,y_0)$，其中 $c=\frac{1}{2}|AB|$ 为双曲线的半焦距，h 是梯形的高，由定比分点坐标公式得

$$x_0=\frac{-c+\frac{c}{2}\lambda}{1+\lambda}=\frac{(\lambda-2)c}{2(\lambda+1)},$$

$$\gamma_0=\frac{\lambda h}{1+\lambda}.$$

设双曲线的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，则离心率$e=\frac{c}{a}$，由点 C、E 在双曲线上，将点 C、E 坐标和$e=\frac{c}{a}$代入双曲线的方程，得

$\frac{e^2}{4}-\frac{h^2}{b^2}=1$， ①

$\frac{e^2}{4}\left(\frac{\lambda-2}{\lambda+1}\right)^2-\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^2\frac{h^2}{b^2}=1$. ② …………7 分

由①式得$\frac{h^2}{b^2}=\frac{e^2}{4}-1$， ③

将③式代入②式，整理得

$\frac{e^2}{4}(4-4\lambda)=1+2\lambda$，

故$\lambda=1-\frac{3}{e^2+2}$ …………10 分

由题设$\frac{2}{3}\le\lambda\le\frac{3}{4}$得，$\frac{2}{3}\le 1-\frac{3}{e^2+2}\le\frac{3}{4}$。

解得$\sqrt{7}\le e\le\sqrt{10}$，

所以，双曲线的离心率的取值范围为[$\sqrt{7},\sqrt{10}$]， …………14 分