

绝密★本科目考试启用前

## 2022年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）

### 数学

本试卷共5页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

#### 第一部分（选择题 共40分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知全集  $U = \{x | -3 < x < 3\}$ ，集合  $A = \{x | -2 < x \leq 1\}$ ，则  $C_U A =$  ( )

A.  $(-2, 1]$                       B.  $(-3, -2) \cup [1, 3)$                       C.  $[-2, 1)$                       D.  $(-3, -2] \cup (1, 3)$

【答案】D

【解析】

【分析】利用补集的定义可得正确的选项。

【详解】由补集定义可知： $C_U A = \{x | -3 < x \leq -2 \text{ 或 } 1 < x < 3\}$ ，即  $C_U A = (-3, -2] \cup$

$(1, 3)$

故选：D.

2. 若复数  $z$  满足  $i \cdot z = 3 - 4i$ ，则  $|z| =$  ( )

A. 1                      B. 5                      C. 7                      D. 25

【答案】B

【解析】

【分析】利用复数四则运算，先求出  $z$ ，再计算复数的模。

【详解】由题意有  $z = \frac{3-4i}{i} = \frac{(3-4i)(-i)}{i \cdot (-i)} = -4-3i$ ，故  $|z| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5$ .

故选：B.

3. 若直线  $2x + y - 1 = 0$  是圆  $(x - a)^2 + y^2 = 1$  的一条对称轴，则  $a =$  ( )

A.  $\frac{1}{2}$                       B.  $-\frac{1}{2}$                       C. 1                      D. -1

【答案】A

【解析】

【分析】若直线是圆的对称轴，则直线过圆心，将圆心代入直线计算求解。

【详解】由题可知圆心为  $(a, 0)$ ，因为直线是圆的对称轴，所以圆心在直线上，即



对于 D 选项, 当  $\frac{\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{12}$  时,  $\frac{\pi}{2} < 2x < \frac{7\pi}{6}$ , 则  $f(x)$  在  $(\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{12})$  上不单调, D 错.

故选: C.

6. 设  $\{a_n\}$  是公差不为 0 的无穷等差数列, 则“ $\{a_n\}$  为递增数列”是“存在正整数  $N_0$ , 当  $n > N_0$  时,  $a_n > 0$ ”的 ( )

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】C

【解析】

【分析】设等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ , 则  $d \neq 0$ , 利用等差数列的通项公式结合充分条件、必要条件的定义判断可得出结论.

【详解】设等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ , 则  $d \neq 0$ , 记  $[x]$  为不超过  $x$  的最大整数.

若  $\{a_n\}$  为单调递增数列, 则  $d > 0$ ,

若  $a_1 \geq 0$ , 则当  $n \geq 2$  时,  $a_n > a_1 \geq 0$ ; 若  $a_1 < 0$ , 则  $a_n = a_1 + (n-1)d$ ,

由  $a_n = a_1 + (n-1)d > 0$  可得  $n > 1 - \frac{a_1}{d}$ , 取  $N_0 = \left[1 - \frac{a_1}{d}\right] + 1$ , 则当  $n > N_0$  时,  $a_n > 0$ ,

所以, “ $\{a_n\}$  是递增数列”  $\Rightarrow$  “存在正整数  $N_0$ , 当  $n > N_0$  时,  $a_n > 0$ ”;

若存在正整数  $N_0$ , 当  $n > N_0$  时,  $a_n > 0$ , 取  $k \in \mathbb{N}^*$  且  $k > N_0$ ,  $a_k > 0$ ,

假设  $d < 0$ , 令  $a_n = a_k + (n-k)d < 0$  可得  $n > k - \frac{a_k}{d}$ , 且  $k - \frac{a_k}{d} > k$ ,

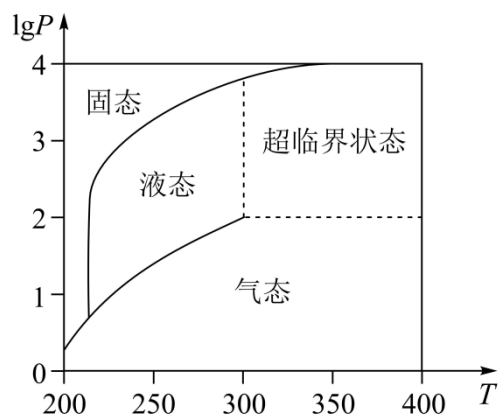
当  $n > \left[k - \frac{a_k}{d}\right] + 1$  时,  $a_n < 0$ , 与题设矛盾, 假设不成立, 则  $d > 0$ , 即数列  $\{a_n\}$  是递增数列.

所以, “ $\{a_n\}$  是递增数列”  $\Leftarrow$  “存在正整数  $N_0$ , 当  $n > N_0$  时,  $a_n > 0$ ”.

所以, “ $\{a_n\}$  是递增数列”是“存在正整数  $N_0$ , 当  $n > N_0$  时,  $a_n > 0$ ”的充分必要条件.

故选: C.

7. 在北京冬奥会上, 国家速滑馆“冰丝带”使用高效环保的二氧化碳跨临界直冷制冰技术, 为实现绿色冬奥作出了贡献. 如图描述了一定条件下二氧化碳所处的状态与  $T$  和  $\lg P$  的关系, 其中  $T$  表示温度, 单位是  $K$ ;  $P$  表示压强, 单位是  $\text{bar}$ . 下列结论中正确的是 ( )



- A. 当  $T = 220$  ,  $P = 1026$  时, 二氧化碳处于液态  
 B. 当  $T = 270$  ,  $P = 128$  时, 二氧化碳处于气态  
 C. 当  $T = 300$  ,  $P = 9987$  时, 二氧化碳处于超临界状态  
 D. 当  $T = 360$  ,  $P = 729$  时, 二氧化碳处于超临界状态

【答案】D

【解析】

【分析】根据  $T$  与  $\lg P$  的关系图可得正确的选项.

【详解】当  $T = 220$  ,  $P = 1026$  时,  $\lg P > 3$  , 此时二氧化碳处于固态, 故 A 错误.

当  $T = 270$  ,  $P = 128$  时,  $2 < \lg P < 3$  , 此时二氧化碳处于液态, 故 B 错误.

当  $T = 300$  ,  $P = 9987$  时,  $\lg P$  与 4 非常接近, 故此时二氧化碳处于固态,

另一方面,  $T = 300$  时对应的是非超临界状态, 故 C 错误.

当  $T = 360$  ,  $P = 729$  时, 因  $2 < \lg P < 3$  , 故此时二氧化碳处于超临界状态, 故 D 正确.

故选: D

8. 若  $(2x - 1)^4 = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$  , 则  $a_0 + a_2 + a_4 = ( \quad )$

- A. 40                                      B. 41                                      C. -40                                      D. -41

【答案】B

【解析】

【分析】利用赋值法可求  $a_0 + a_2 + a_4$  的值.

【详解】令  $x = 1$  , 则  $a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 1$  ,

令  $x = -1$  , 则  $a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0 = (-3)^4 = 81$  ,

$$\text{故 } a_4 + a_2 + a_0 = \frac{1+81}{2} = 41,$$

故选: B.

9. 已知正三棱锥  $P-ABC$  的六条棱长均为 6,  $S$  是  $\triangle ABC$  及其内部的点构成的集合. 设集合  $T = \{Q \in S \mid PQ \leq 5\}$ , 则  $T$  表示的区域的面积为 ( )

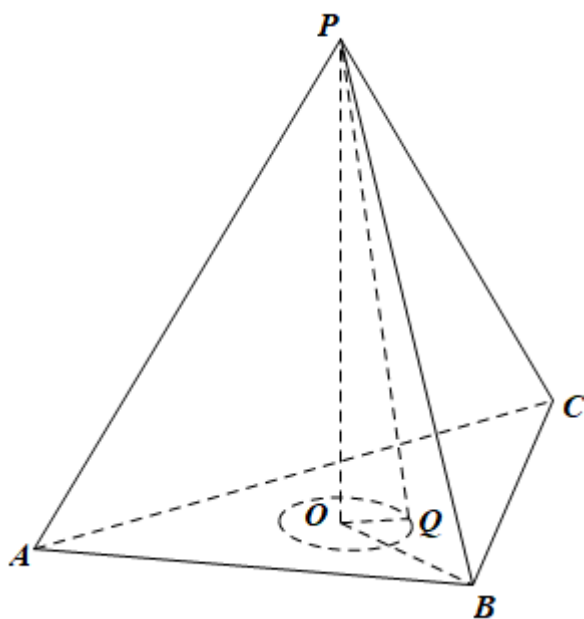
- A.  $\frac{3\pi}{4}$                       B.  $\pi$                       C.  $2\pi$                       D.  $3\pi$

【答案】 B

【解析】

【分析】 求出以  $P$  为球心, 5 为半径的球与底面  $ABC$  的截面圆的半径后可求区域的面积.

【详解】



设顶点  $P$  在底面上的投影为  $O$ , 连接  $BO$ , 则  $O$  为三角形  $ABC$  的中心,

且  $BO = \frac{2}{3} \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ , 故  $PO = \sqrt{36 - 12} = 2\sqrt{6}$ .

因为  $PQ = 5$ , 故  $OQ = 1$ ,

故  $S$  的轨迹为以  $O$  为圆心, 1 为半径的圆,

而三角形  $ABC$  内切圆的圆心为  $O$ , 半径为  $\frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 36}{3 \times 6} = \sqrt{3} > 1$ ,

故  $S$  的轨迹圆在三角形  $ABC$  内部, 故其面积为  $\pi$

故选: B

10. 在  $\triangle ABC$  中,  $AC = 3, BC = 4, \angle C = 90^\circ$ .  $P$  为  $\triangle ABC$  所在平面内的动点, 且

$PC = 1$ , 则  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$  的取值范围是 ( )

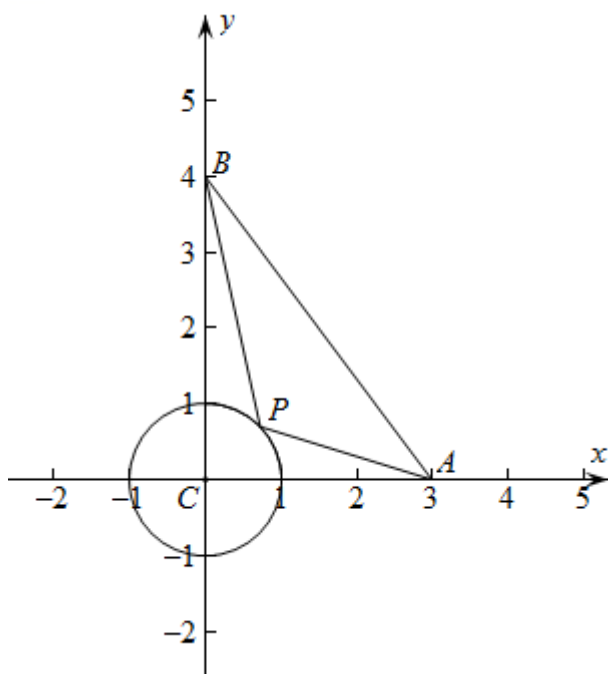
- A.  $[-5, 3]$                       B.  $[-3, 5]$                       C.  $[-6, 4]$                       D.  $[-4, 6]$

【答案】 D

**【解析】**

**【分析】**依题意建立平面直角坐标系，设  $P(\cos\theta, \sin\theta)$ ，表示出  $\overline{PA}$ ， $\overline{PB}$ ，根据数量积的坐标表示、辅助角公式及正弦函数的性质计算可得；

**【详解】**解：依题意如图建立平面直角坐标系，则  $C(0,0)$ ， $A(3,0)$ ， $B(0,4)$ ，



因为  $PC = 1$ ，所以  $P$  在以  $C$  为圆心，1 为半径的圆上运动，

设  $P(\cos\theta, \sin\theta)$ ， $\theta \in [0, 2\pi]$ ，

所以  $\overline{PA} = (3 - \cos\theta, -\sin\theta)$ ， $\overline{PB} = (-\cos\theta, 4 - \sin\theta)$ ，

所以  $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = (-\cos\theta) \times (3 - \cos\theta) + (4 - \sin\theta) \times (-\sin\theta)$

$$= \cos^2\theta - 3\cos\theta - 4\sin\theta + \sin^2\theta$$

$$= 1 - 3\cos\theta - 4\sin\theta$$

$$= 1 - 5\sin(\theta + \varphi), \text{ 其中 } \sin\varphi = \frac{3}{5}, \cos\varphi = \frac{4}{5},$$

因为  $-1 \leq \sin(\theta + \varphi) \leq 1$ ，所以  $-4 \leq 1 - 5\sin(\theta + \varphi) \leq 6$ ，即  $\overline{PA} \cdot \overline{PB} \in [-4, 6]$ ；

故选：D

**第二部分（非选择题 共 110 分）**

**二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.**

11. 函数  $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{1-x}$  的定义域是\_\_\_\_\_.

**【答案】**  $(-\infty, 0) \cup (0, 1]$

**【解析】**

**【分析】** 根据偶次方根的被开方数非负、分母不为零得到方程组，解得即可；

**【详解】** 解：因为  $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{1-x}$ ，所以  $\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$ ，解得  $x \leq 1$  且  $x \neq 0$ ，

故函数的定义域为  $(-\infty, 0) \cup (0, 1]$ ；

故答案为：  $(-\infty, 0) \cup (0, 1]$

12. 已知双曲线  $y^2 + \frac{x^2}{m} = 1$  的渐近线方程为  $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$ ，则  $m =$  \_\_\_\_\_.

**【答案】** -3

**【解析】**

**【分析】** 首先可得  $m < 0$ ，即可得到双曲线的标准方程，从而得到  $a$ 、 $b$ ，再跟渐近线方程得到方程，解得即可；

**【详解】** 解：对于双曲线  $y^2 + \frac{x^2}{m} = 1$ ，所以  $m < 0$ ，即双曲线的标准方程为

$$y^2 - \frac{x^2}{-m} = 1,$$

则  $a = 1$ ， $b = \sqrt{-m}$ ，又双曲线  $y^2 + \frac{x^2}{m} = 1$  的渐近线方程为  $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$ ，

所以  $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，即  $\frac{1}{\sqrt{-m}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，解得  $m = -3$ ；

故答案为： -3

13. 若函数  $f(x) = A \sin x - \sqrt{3} \cos x$  的一个零点为  $\frac{\pi}{3}$ ，则  $A =$  \_\_\_\_\_；  $f\left(\frac{\pi}{12}\right) =$

\_\_\_\_\_.

**【答案】** ①. 1 ②.  $-\sqrt{2}$

**【解析】**

**【分析】** 先代入零点，求得  $A$  的值，再将函数化简为  $f(x) = 2 \sin(x - \frac{\pi}{3})$ ，代入自变量

$x = \frac{\pi}{12}$ ，计算即可.

**【详解】**  $\because f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}A - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ ， $\therefore A = 1$

$$\therefore f(x) = \sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \sin(x - \frac{\pi}{3})$$

$$f(\frac{\pi}{12}) = 2 \sin(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{3}) = -2 \sin \frac{\pi}{4} = -\sqrt{2}$$

故答案为: 1,  $-\sqrt{2}$

14. 设函数  $f(x) = \begin{cases} -ax+1, & x < a, \\ (x-2)^2, & x \geq a. \end{cases}$  若  $f(x)$  存在最小值, 则  $a$  的一个取值为\_\_\_\_\_ ;  $a$

的最大值为\_\_\_\_\_.

【答案】 ①. 0 (答案不唯一) ②. 1

【解析】

【分析】根据分段函数中的函数  $y = -ax + 1$  的单调性进行分类讨论, 可知,  $a = 0$  符合条件,  $a < 0$  不符合条件,  $a > 0$  时函数  $y = -ax + 1$  没有最小值, 故  $f(x)$  的最小值只能取  $y = (x-2)^2$  的最小值, 根据定义域讨论可知  $-a^2 + 1 \geq 0$  或  $-a^2 + 1 \geq (a-2)^2$ , 解得  $0 < a \leq 1$ .

【详解】解: 若  $a = 0$  时,  $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ (x-2)^2, & x \geq 0 \end{cases}$ ,  $\therefore f(x)_{\min} = 0$ ;

若  $a < 0$  时, 当  $x < a$  时,  $f(x) = -ax + 1$  单调递增, 当  $x \rightarrow -\infty$  时,  $f(x) \rightarrow -\infty$ , 故  $f(x)$  没有最小值, 不符合题目要求;

若  $a > 0$  时,

当  $x < a$  时,  $f(x) = -ax + 1$  单调递减,  $f(x) > f(a) = -a^2 + 1$ ,

当  $x > a$  时,  $f(x)_{\min} = \begin{cases} 0 & (0 < a < 2) \\ (a-2)^2 & (a \geq 2) \end{cases}$

$\therefore -a^2 + 1 \geq 0$  或  $-a^2 + 1 \geq (a-2)^2$ ,

解得  $0 < a \leq 1$ ,

综上可得  $0 \leq a \leq 1$ ;

故答案为: 0 (答案不唯一), 1

15. 已知数列  $\{a_n\}$  各项均为正数, 其前  $n$  项和  $S_n$  满足  $a_n \cdot S_n = 9 (n = 1, 2, \dots)$ . 给出下列四个结论:

①  $\{a_n\}$  的第 2 项小于 3; ②  $\{a_n\}$  为等比数列;

③  $\{a_n\}$  为递减数列; ④  $\{a_n\}$  中存在小于  $\frac{1}{100}$  的项.

其中所有正确结论的序号是\_\_\_\_\_.

【答案】①③④

【解析】

【分析】推导出  $a_n = \frac{9}{a_n} - \frac{9}{a_{n-1}}$ ，求出  $a_1$ 、 $a_2$  的值，可判断①；利用反证法可判断②④；

利用数列单调性的定义可判断③。

【详解】由题意可知， $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ， $a_n > 0$ ，

当  $n=1$  时， $a_1^2 = 9$ ，可得  $a_1 = 3$ ；

当  $n \geq 2$  时，由  $S_n = \frac{9}{a_n}$  可得  $S_{n-1} = \frac{9}{a_{n-1}}$ ，两式作差可得  $a_n = \frac{9}{a_n} - \frac{9}{a_{n-1}}$ ，

所以， $\frac{9}{a_{n-1}} = \frac{9}{a_n} - a_n$ ，则  $\frac{9}{a_2} - a_2 = 3$ ，整理可得  $a_2^2 + 3a_2 - 9 = 0$ ，

因为  $a_2 > 0$ ，解得  $a_2 = \frac{3\sqrt{5}-3}{2} < 3$ ，①对；

假设数列  $\{a_n\}$  为等比数列，设其公比为  $q$ ，则  $a_2^2 = a_1 a_3$ ，即  $\left(\frac{9}{S_2}\right)^2 = \frac{81}{S_1 S_3}$ ，

所以， $S_2^2 = S_1 S_3$ ，可得  $a_1^2 (1+q)^2 = a_1^2 (1+q+q^2)$ ，解得  $q=0$ ，不合乎题意，

故数列  $\{a_n\}$  不是等比数列，②错；

当  $n \geq 2$  时， $a_n = \frac{9}{a_n} - \frac{9}{a_{n-1}} = \frac{9(a_{n-1} - a_n)}{a_n a_{n-1}} > 0$ ，可得  $a_n < a_{n-1}$ ，所以，数列  $\{a_n\}$  为递减

数列，③对；

假设对任意的  $n \in \mathbb{N}^*$ ， $a_n \geq \frac{1}{100}$ ，则  $S_{100000} \geq 100000 \times \frac{1}{100} = 1000$ ，

所以， $a_{100000} = \frac{9}{S_{100000}} \leq \frac{9}{1000} < \frac{1}{100}$ ，与假设矛盾，假设不成立，④对。

故答案为：①③④。

【点睛】关键点睛：本题在推断②④的正误时，利用正面推理较为复杂时，可采用反证法来进行推导。

三、解答题共 6 小愿，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16. 在  $\triangle ABC$  中， $\sin 2C = \sqrt{3} \sin C$ 。

(1) 求  $\angle C$ ；

(2) 若  $b=6$ ，且  $\triangle ABC$  的面积为  $6\sqrt{3}$ ，求  $\triangle ABC$  的周长。

【答案】(1)  $\frac{\pi}{6}$

(2)  $6+6\sqrt{3}$

【解析】

【分析】(1) 利用二倍角的正弦公式化简可得  $\cos C$  的值，结合角  $C$  的取值范围可求得角  $C$  的值；

(2) 利用三角形的面积公式可求得  $a$  的值，由余弦定理可求得  $c$  的值，即可求得  $\triangle ABC$  的周长.

【小问 1 详解】

解：因为  $C \in (0, \pi)$ ，则  $\sin C > 0$ ，由已知可得  $\sqrt{3} \sin C = 2 \sin C \cos C$ ，

可得  $\cos C = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，因此， $C = \frac{\pi}{6}$ .

【小问 2 详解】

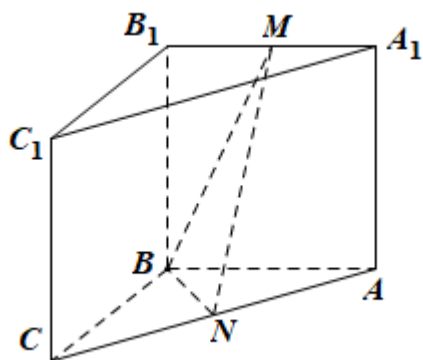
解：由三角形的面积公式可得  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{3}{2} a = 6\sqrt{3}$ ，解得  $a = 4\sqrt{3}$ .

由余弦定理可得  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 48 + 36 - 2 \times 4\sqrt{3} \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12$ ，

$\therefore c = 2\sqrt{3}$ ，

所以， $\triangle ABC$  的周长为  $a + b + c = 6\sqrt{3} + 6$ .

17. 如图，在三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中，侧面  $BCC_1B_1$  为正方形，平面  $BCC_1B_1 \perp$  平面  $ABB_1A_1$ ， $AB = BC = 2$ ， $M$ ， $N$  分别为  $A_1B_1$ ， $AC$  的中点.



(1) 求证： $MN \parallel$  平面  $BCC_1B_1$ ；

(2) 再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求直线  $AB$  与平面  $BMN$  所成角的正弦值.

条件①： $AB \perp MN$ ；

条件②:  $BM = MN$ .

注: 如果选择条件①和条件②分别解答, 按第一个解答计分.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 取  $AB$  的中点为  $K$ , 连接  $MK, NK$ , 可证平面  $MKN \parallel$  平面  $CBB_1C_1$ , 从而可证  $MN \parallel$  平面  $CBB_1C_1$ .

(2) 选①②均可证明  $BB_1 \perp$  平面  $ABC$ , 从而可建立如图所示的空间直角坐标系, 利用空间向量可求线面角的正弦值.

【小问 1 详解】

取  $AB$  的中点为  $K$ , 连接  $MK, NK$ ,

由三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  可得四边形  $ABB_1A_1$  为平行四边形,

而  $B_1M = MA_1, BK = KA$ , 则  $MK \parallel BB_1$ ,

而  $MK \not\subset$  平面  $CBB_1C_1$ ,  $BB_1 \subset$  平面  $CBB_1C_1$ , 故  $MK \parallel$  平面  $CBB_1C_1$ ,

而  $CN = NA, BK = KA$ , 则  $NK \parallel BC$ , 同理可得  $NK \parallel$  平面  $CBB_1C_1$ ,

而  $NK \cap MK = K, NK, MK \subset$  平面  $MKN$ ,

故平面  $MKN \parallel$  平面  $CBB_1C_1$ , 而  $MN \subset$  平面  $MKN$ , 故  $MN \parallel$  平面  $CBB_1C_1$ ,

【小问 2 详解】

因为侧面  $CBB_1C_1$  为正方形, 故  $CB \perp BB_1$ ,

而  $CB \subset$  平面  $CBB_1C_1$ , 平面  $CBB_1C_1 \perp$  平面  $ABB_1A_1$ ,

平面  $CBB_1C_1 \cap$  平面  $ABB_1A_1 = BB_1$ , 故  $CB \perp$  平面  $ABB_1A_1$ ,

因为  $NK \parallel BC$ , 故  $NK \perp$  平面  $ABB_1A_1$ ,

因为  $AB \subset$  平面  $ABB_1A_1$ , 故  $NK \perp AB$ ,

若选①, 则  $AB \perp MN$ , 而  $NK \perp AB$ ,  $NK \cap MN = N$ ,

故  $AB \perp$  平面  $MNK$ , 而  $MK \subset$  平面  $MNK$ , 故  $AB \perp MK$ ,

所以  $AB \perp BB_1$ , 而  $CB \perp BB_1$ ,  $CB \cap AB = B$ , 故  $BB_1 \perp$  平面  $ABC$ ,

故可建立如图所示的空间直角坐标系, 则  $B(0,0,0), A(0,2,0), N(1,1,0), M(0,1,2)$ ,

故  $\overrightarrow{BA} = (0,2,0), \overrightarrow{BN} = (1,1,0), \overrightarrow{BM} = (0,1,2)$ ,

设平面  $BNM$  的法向量为  $\vec{n} = (x, y, z)$ ,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BN} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \end{cases}, \text{从而} \begin{cases} x + y = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}, \text{取 } z = -1, \text{则 } \vec{n} = (-2, 2, -1),$$

设直线  $AB$  与平面  $BNM$  所成的角为  $\theta$ , 则

$$\sin \theta = \left| \cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{AB} \rangle \right| = \frac{4}{2 \times 3} = \frac{2}{3}.$$

若选②, 因为  $NK \parallel BC$ , 故  $NK \perp$  平面  $ABB_1A_1$ , 而  $KM \subset$  平面  $MKN$ ,

故  $NK \perp KM$ , 而  $B_1M = BK = 1, NK = 1$ , 故  $B_1M = NK$ ,

而  $B_1B = MK = 2, MB = MN$ , 故  $\triangle BB_1M \cong \triangle MKN$ ,

所以  $\angle BB_1M = \angle MKN = 90^\circ$ , 故  $A_1B_1 \perp BB_1$ ,

而  $CB \perp BB_1, CB \cap AB = B$ , 故  $BB_1 \perp$  平面  $ABC$ ,

故可建立如所示的空间直角坐标系, 则  $B(0, 0, 0), A(0, 2, 0), N(1, 1, 0), M(0, 1, 2)$ ,

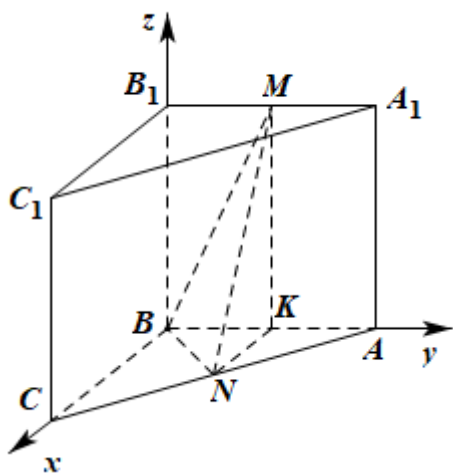
故  $\overrightarrow{BA} = (0, 2, 0), \overrightarrow{BN} = (1, 1, 0), \overrightarrow{BM} = (0, 1, 2)$ ,

设平面  $BNM$  的法向量为  $\vec{n} = (x, y, z)$ ,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BN} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \end{cases}, \text{从而} \begin{cases} x + y = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}, \text{取 } z = -1, \text{则 } \vec{n} = (-2, 2, -1),$$

设直线  $AB$  与平面  $BNM$  所成的角为  $\theta$ , 则

$$\sin \theta = \left| \cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{AB} \rangle \right| = \frac{4}{2 \times 3} = \frac{2}{3}.$$



18. 在校运动会上, 只有甲、乙、丙三名同学参加铅球比赛, 比赛成绩达到  $9.50\text{m}$  以上 (含  $9.50\text{m}$ ) 的同学将获得优秀奖. 为预测获得优秀奖的人数及冠军得主, 收集了甲、乙、丙以往的比赛成绩, 并整理得到如下数据 (单位:  $\text{m}$ ):

甲：9.80, 9.70, 9.55, 9.54, 9.48, 9.42, 9.40, 9.35, 9.30, 9.25;

乙：9.78, 9.56, 9.51, 9.36, 9.32, 9.23;

丙：9.85, 9.65, 9.20, 9.16.

假设用频率估计概率，且甲、乙、丙的比赛成绩相互独立.

(1) 估计甲在校运动会铅球比赛中获得优秀奖的概率;

(2) 设  $X$  是甲、乙、丙在校运动会铅球比赛中获得优秀奖的总人数，估计  $X$  的数学期望  $E(X)$ ;

(3) 在校运动会铅球比赛中，甲、乙、丙谁获得冠军的概率估计值最大？（结论不要求证明）

**【答案】** (1) 0.4      (2)  $\frac{7}{5}$

(3) 丙

**【解析】**

**【分析】** (1) 由频率估计概率即可

(2) 求解得  $X$  的分布列，即可计算出  $X$  的数学期望.

(3) 计算出各自获得最高成绩的概率，再根据其各自的最高成绩可判断丙夺冠的概率估计值最大.

**【小问 1 详解】**

由频率估计概率可得

甲获得优秀的概率为 0.4，乙获得优秀的概率为 0.5，丙获得优秀的概率为 0.5，

故答案为 0.4

**【小问 2 详解】**

设甲获得优秀为事件  $A_1$ , 乙获得优秀为事件  $A_2$ , 丙获得优秀为事件  $A_3$

$$P(X=0) = P(\overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3}) = 0.6 \times 0.5 \times 0.5 = \frac{3}{20},$$

$$\begin{aligned} P(X=1) &= P(\overline{A_1} \overline{A_2} A_3) + P(\overline{A_1} A_2 \overline{A_3}) + P(A_1 \overline{A_2} \overline{A_3}) \\ &= 0.4 \times 0.5 \times 0.5 + 0.6 \times 0.5 \times 0.5 + 0.6 \times 0.5 \times 0.5 = \frac{8}{20}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X=2) &= P(A_1 \overline{A_2} \overline{A_3}) + P(\overline{A_1} A_2 \overline{A_3}) + P(\overline{A_1} \overline{A_2} A_3) \\ &= 0.4 \times 0.5 \times 0.5 + 0.4 \times 0.5 \times 0.5 + 0.6 \times 0.5 \times 0.5 = \frac{7}{20}, \end{aligned}$$

$$P(X=3) = P(A_1 A_2 A_3) = 0.4 \times 0.5 \times 0.5 = \frac{2}{20}.$$

$\therefore X$  的分布列为

$X$	0	1	2	3
$P$	$\frac{3}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{2}{20}$

$$\therefore E(X) = 0 \times \frac{3}{20} + 1 \times \frac{8}{20} + 2 \times \frac{7}{20} + 3 \times \frac{2}{20} = \frac{7}{5}$$

【小问 3 详解】

丙夺冠概率估计值最大.

因为铅球比赛无论比赛几次就取最高成绩.比赛一次,丙获得 9.85 的概率为  $\frac{1}{4}$ ,甲获得

9.80 的概率为  $\frac{1}{10}$ ,乙获得 9.78 的概率为  $\frac{1}{6}$ .并且丙的最高成绩是所有成绩中最高的,比赛

次数越多,对丙越有利.

19. 已知椭圆:  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的一个顶点为  $A(0,1)$ , 焦距为  $2\sqrt{3}$ .

(1) 求椭圆  $E$  的方程;

(2) 过点  $P(-2,1)$  作斜率为  $k$  的直线与椭圆  $E$  交于不同的两点  $B, C$ , 直线  $AB, AC$  分别与  $x$  轴交于点  $M, N$ , 当  $|MN| = 2$  时, 求  $k$  的值.

【答案】(1)  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

(2)  $k = -4$

【解析】

【分析】(1) 依题意可得 
$$\begin{cases} b = 1 \\ 2c = 2\sqrt{3} \\ c^2 = a^2 - b^2 \end{cases}$$
, 即可求出  $a$ , 从而求出椭圆方程;

(2) 首先表示出直线方程, 设  $B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$ , 联立直线与椭圆方程, 消元列出韦达定理, 由直线  $AB, AC$  的方程, 表示出  $x_M, x_N$ , 根据  $|MN| = |x_N - x_M|$  得到方程, 解得即可;

【小问 1 详解】

解: 依题意可得  $b = 1, 2c = 2\sqrt{3}$ , 又  $c^2 = a^2 - b^2$ ,

所以  $a = 2$ , 所以椭圆方程为  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ;

【小问 2 详解】

解：依题意过点  $P(-2,1)$  的直线为  $y-1=k(x+2)$ ，设  $B(x_1, y_1)$ 、 $C(x_2, y_2)$ ，不妨令

$$-2 \leq x_1 < x_2 \leq 2,$$

$$\text{由} \begin{cases} y-1=k(x+2) \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}, \text{ 消去 } y \text{ 整理得 } (1+4k^2)x^2+(16k^2+8k)x+16k^2+16k=0,$$

$$\text{所以 } \Delta=(16k^2+8k)^2-4(1+4k^2)(16k^2+16k)>0, \text{ 解得 } k<0,$$

$$\text{所以 } x_1+x_2=-\frac{16k^2+8k}{1+4k^2}, \quad x_1 \cdot x_2=\frac{16k^2+16k}{1+4k^2},$$

$$\text{直线 } AB \text{ 的方程为 } y-1=\frac{y_1-1}{x_1}x, \text{ 令 } y=0, \text{ 解得 } x_M=\frac{x_1}{1-y_1},$$

$$\text{直线 } AC \text{ 的方程为 } y-1=\frac{y_2-1}{x_2}x, \text{ 令 } y=0, \text{ 解得 } x_N=\frac{x_2}{1-y_2},$$

$$\text{所以 } |MN|=|x_N-x_M|=\left|\frac{x_2}{1-y_2}-\frac{x_1}{1-y_1}\right|$$

$$=\left|\frac{x_2}{1-[k(x_2+2)+1]}-\frac{x_1}{1-[k(x_1+2)+1]}\right|$$

$$=\left|\frac{x_2}{-k(x_2+2)}+\frac{x_1}{k(x_1+2)}\right|$$

$$=\left|\frac{(x_2+2)x_1-x_2(x_1+2)}{k(x_2+2)(x_1+2)}\right|$$

$$=\frac{2|x_1-x_2|}{|k|(x_2+2)(x_1+2)},$$

$$\text{所以 } |x_1-x_2|=|k|(x_2+2)(x_1+2),$$

$$\text{即 } \sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=|k|[x_2x_1+2(x_2+x_1)+4]$$

$$\text{即 } \sqrt{\left(-\frac{16k^2+8k}{1+4k^2}\right)^2-4 \times \frac{16k^2+16k}{1+4k^2}}=|k|\left[\frac{16k^2+16k}{1+4k^2}+2\left(-\frac{16k^2+8k}{1+4k^2}\right)+4\right]$$

即

$$\frac{8}{1+4k^2}\sqrt{(2k^2+k)^2-(1+4k^2)(k^2+k)}=\frac{|k|}{1+4k^2}[16k^2+16k-2(16k^2+8k)+4(1+4k^2)]$$

$$\text{整理得 } 8\sqrt{-k}=4|k|, \text{ 解得 } k=-4$$

20. 已知函数  $f(x) = e^x \ln(1+x)$ .

- (1) 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(0, f(0))$  处的切线方程;
- (2) 设  $g(x) = f'(x)$ , 讨论函数  $g(x)$  在  $[0, +\infty)$  上的单调性;
- (3) 证明: 对任意的  $s, t \in (0, +\infty)$ , 有  $f(s+t) > f(s) + f(t)$ .

**【答案】** (1)  $y = x$

(2)  $g(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调递增.

(3) 证明见解析

**【解析】**

**【分析】** (1) 先求出切点坐标, 再由导数求得切线斜率, 即得切线方程;

(2) 在求一次导数无法判断的情况下, 构造新的函数, 再求一次导数, 问题即得解;

(3) 令  $m(x) = f(x+t) - f(x)$ ,  $(x, t > 0)$ , 即证  $m(x) > m(0)$ , 由第二问结论可知  $m(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调递增, 即得证.

**【小问 1 详解】**

解: 因为  $f(x) = e^x \ln(1+x)$ , 所以  $f'(0) = 0$ ,

即切点坐标为  $(0, 0)$ ,

$$\text{又 } f'(x) = e^x \left( \ln(1+x) + \frac{1}{1+x} \right),$$

$$\therefore \text{切线斜率 } k = f'(0) = 1$$

$$\therefore \text{切线方程为: } y = x$$

**【小问 2 详解】**

解: 因为  $g(x) = f'(x) = e^x \left( \ln(1+x) + \frac{1}{1+x} \right)$ ,

$$\text{所以 } g'(x) = e^x \left( \ln(1+x) + \frac{2}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} \right),$$

$$\text{令 } h(x) = \ln(1+x) + \frac{2}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2},$$

$$\text{则 } h'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{2}{(1+x)^2} + \frac{2}{(1+x)^3} = \frac{x^2+1}{(1+x)^3} > 0,$$

$\therefore h(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调递增,

$$\therefore h(x) \geq h(0) = 1 > 0$$

$\therefore g'(x) > 0$  在  $[0, +\infty)$  上恒成立,

$\therefore g(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调递增.

**【小问 3 详解】**

解：原不等式等价于  $f(s+t) - f(s) > f(t) - f(0)$ ,

令  $m(x) = f(x+t) - f(x)$ , ( $x, t > 0$ ),

即证  $m(x) > m(0)$ ,

$\because m(x) = f(x+t) - f(x) = e^{x+t} \ln(1+x+t) - e^x \ln(1+x)$ ,

$$m'(x) = e^{x+t} \ln(1+x+t) + \frac{e^{x+t}}{1+x+t} - e^x \ln(1+x) - \frac{e^x}{1+x} = g(x+t) - g(x),$$

由 (2) 知  $g(x) = f'(x) = e^x (\ln(1+x) + \frac{1}{1+x})$  在  $[0, +\infty)$  上单调递增,

$\therefore g(x+t) > g(x)$ ,

$\therefore m'(x) > 0$

$\therefore m(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 又因为  $x, t > 0$ ,

$\therefore m(x) > m(0)$ , 所以命题得证.

21. 已知  $Q: a_1, a_2, \dots, a_k$  为有穷整数数列. 给定正整数  $m$ , 若对任意的  $n \in \{1, 2, \dots, m\}$ , 在  $Q$  中存在  $a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_{i+j}$  ( $j \geq 0$ ), 使得  $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + \dots + a_{i+j} = n$ , 则称  $Q$  为  $m$ -连续可表数列.

- (1) 判断  $Q: 2, 1, 4$  是否为  $5$ -连续可表数列? 是否为  $6$ -连续可表数列? 说明理由;
- (2) 若  $Q: a_1, a_2, \dots, a_k$  为  $8$ -连续可表数列, 求证:  $k$  的最小值为  $4$ ;
- (3) 若  $Q: a_1, a_2, \dots, a_k$  为  $20$ -连续可表数列, 且  $a_1 + a_2 + \dots + a_k < 20$ , 求证:  $k \geq 7$ .

**【答案】** (1) 是  $5$ -连续可表数列; 不是  $6$ -连续可表数列.

(2) 证明见解析. (3) 证明见解析.

**【解析】**

**【分析】** (1) 直接利用定义验证即可;

(2) 先考虑  $k \leq 3$  不符合, 再列举一个  $k = 4$  合题即可;

(3)  $k \leq 5$  时, 根据和的个数易得显然不行, 再讨论  $k = 6$  时, 由  $a_1 + a_2 + \dots + a_6 < 20$  可知里面必然有负数, 再确定负数只能是  $-1$ , 然后分类讨论验证不行即可.

**【小问 1 详解】**

$a_2 = 1, a_1 = 2, a_1 + a_2 = 3, a_3 = 4, a_2 + a_3 = 5$ , 所以  $Q$  是  $5$ -连续可表数列; 易知, 不存在  $i, j$  使得  $a_i + a_{i+1} + \dots + a_{i+j} = 6$ , 所以  $Q$  不是  $6$ -连续可表数列.

**【小问 2 详解】**

若  $k \leq 3$ , 设为  $Q: a, b, c$ , 则至多  $a+b, b+c, a+b+c, a, b, c$ ,  $6$  个数字, 没有  $8$  个, 矛盾;

当  $k=4$  时, 数列  $Q: 1, 4, 1, 2$ , 满足  $a_1=1, a_4=2, a_3+a_4=3, a_2=4, a_1+a_2=5, a_1+a_2+a_3=6, a_2+a_3+a_4=7, a_1+a_2+a_3+a_4=8, \therefore k_{\min}=4$ .

【小问 3 详解】

$Q: a_1, a_2, \dots, a_k$ , 若  $i=j$  最多有  $k$  种, 若  $i \neq j$ , 最多有  $C_k^2$  种, 所以最多有

$$k + C_k^2 = \frac{k(k+1)}{2} \text{ 种,}$$

若  $k \leq 5$ , 则  $a_1, a_2, \dots, a_k$  至多可表  $\frac{5(5+1)}{2} = 15$  个数, 矛盾,

从而若  $k < 7$ , 则  $k=6, a, b, c, d, e, f$  至多可表  $\frac{6(6+1)}{2} = 21$  个数,

而  $a+b+c+d+e+f < 20$ , 所以其中有负的, 从而  $a, b, c, d, e, f$  可表 1~20 及那个负数 (恰 21 个), 这表明  $a \sim f$  中仅一个负的, 没有 0, 且这个负的在  $a \sim f$  中绝对值最小, 同时  $a \sim f$  中没有两数相同, 设那个负数为  $-m (m \geq 1)$ ,

则所有数之和  $\geq m+1+m+2+\dots+m+5-m = 4m+15, 4m+15 \leq 19 \Rightarrow m=1$ ,

$\therefore \{a, b, c, d, e, f\} = \{-1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , 再考虑排序, 排序中不能有和相同, 否则不足 20 个,

$\therefore 1 = -1+2$  (仅一种方式),

$\therefore -1$  与 2 相邻,

若  $-1$  不在两端, 则 "x, -1, 2, \_\_, \_\_, \_\_" 形式,

若  $x=6$ , 则  $5=6+(-1)$  (有 2 种结果相同, 方式矛盾),

$\therefore x \neq 6$ , 同理  $x \neq 5, 4, 3$ , 故  $-1$  在一端, 不妨为 "-1, 2, A, B, C, D" 形式,

若  $A=3$ , 则  $5=2+3$  (有 2 种结果相同, 矛盾),  $A=4$  同理不行,

$A=5$ , 则  $6=-1+2+5$  (有 2 种结果相同, 矛盾), 从而  $A=6$ ,

由于  $7=-1+2+6$ , 由表法唯一知 3, 4 不相邻、

故只能  $-1, 2, 6, 3, 5, 4$ , ①或  $-1, 2, 6, 4, 5, 3$ , ②

这 2 种情形,

对①:  $9=6+3=5+4$ , 矛盾,

对②:  $8=2+6=5+3$ , 也矛盾, 综上  $k \neq 6$

$\therefore k \geq 7$ .

【点睛】关键点睛, 先理解题意, 是否为  $m$ -可表数列核心就是是否存在连续的几项 (可以是一项) 之和能表示从 1 到  $m$  中间的任意一个值. 本题第二问  $k \leq 3$  时, 通过和值可能个数否定  $k \leq 3$ ; 第三问先通过和值的可能个数否定  $k \leq 5$ , 再验证  $k=6$  时, 数列中的几项如果符合必然是  $\{-1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  的一个排序, 可验证这组数不合题.

