1995年四川高考理科数学真题及答案

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分．满分 150 分，考试时间 120 分．

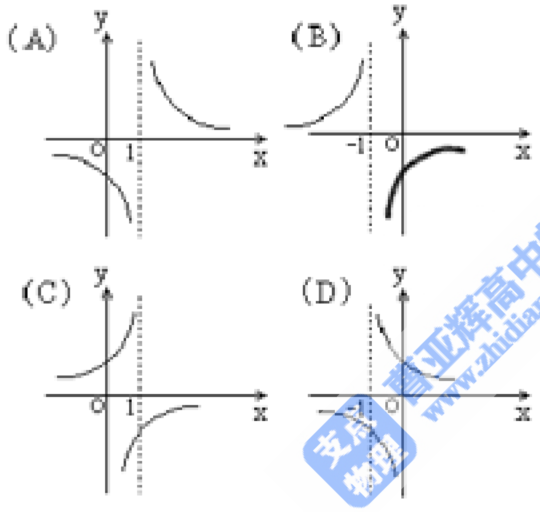
第Ⅰ卷(选择题共 65 分)

一、选择题(本大题共 15 小题,第 1—10 题每小题 4 分，第 11—15 题每小题 5 分，共 65 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）．

1．已知 I 为全集，集合 M，$N\subset I$，若 $M\cap N=N$，则(　　)

(A) $\overline{M}\supseteq\overline{N}$　　(B) $M\subseteq\overline{N}$　　(C) $\overline{M}\subseteq\overline{N}$　　(D) $M\supseteq\overline{N}$

2．函数 $y=-\dfrac{1}{x+1}$ 的图像是(　　)



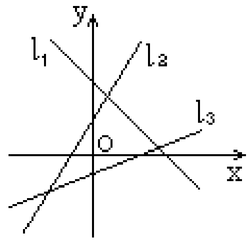
3．函数 $y=4\sin(3x+\dfrac{\pi}{4})+3\cos(3x+\dfrac{\pi}{4})$ 的最小正周期是(　　)

(A) 6π　　(B) 2π　　(C) $\dfrac{2\pi}{3}$　　(D) $\dfrac{\pi}{3}$

4．正方体的全面积是 a^2，它的顶点都在球面上，这个球的表面积是(　　)

(A) $\dfrac{\pi a^2}{3}$　　(B) $\dfrac{\pi a^2}{2}$　　(C) $2\pi a^2$　　(D) $3\pi a^2$

5．若图中的直线 l_1，l_2，l_3 的斜率分别为 k_1，k_2，k_3，则(　　)



(A) $k_1<k_2<k_3$　　(B) $k_3<k_1<k_2$

(C) $k_3<k_2<k_1$　　(D) $k_1<k_3<k_2$

6．在 $(1-x^3)(1+x)^{10}$ 的展开式中，x^5 的系数是(　　)

(A) -297　　(B) -252　　(C) 297　　(D) 207

7．使 $\arcsin x>\arccos x$ 成立的 x 的取值范围是(　　)

(A) $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$　　(B) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$　　(C) $\left[-1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$　　(D) $[-1,0)$

8．双曲线 $3x^2-y^2=3$ 的渐近线方程是(　　)

(A) $y=\pm3x$　　(B) $y=\pm\frac{1}{3}x$　　(C) $y=\pm\sqrt{3}x$　　(D) $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$

9．已知 θ 是第三象限角，且 $\sin^4\theta+\cos^4\theta=\frac{5}{9}$，那么 $\sin2\theta$ 等于(　　)

(A) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　(B) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　(C) $\frac{2}{3}$　　(D) $-\frac{2}{3}$

10．已知直线 $l\perp$ 平面 α，直线 $m\subset$ 平面 β，有下面四个命题：

① $\alpha\parallel\beta\Rightarrow l\perp m$　② $\alpha\perp\beta\Rightarrow l\parallel m$　③ $l\parallel m\Rightarrow\alpha\perp\beta$　④ $l\perp m\Rightarrow\alpha\parallel\beta$

其中正确的两个命题是(　　)

(A) ①与②　　(B) ③与④　　(C) ②与④　　(D) ①与③

11．已知 $y=\log_a(2-ax)$ 在[0，1]上是 x 的减函数，则 a 的取值范围是(　　)

(A) (0，1)　　(B) (1，2)　　(C) (0，2)　　(D) $[2,+\infty)$

12．等差数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n 与 T_n，若 $\frac{S_n}{T_n}=\frac{2n}{3n+1}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ 等于(　　)

(A) 1　　(B) $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　(C) $\frac{2}{3}$　　(D) $\frac{4}{9}$

13．用 1，2，3，4，5 这五个数字，组成没有重复数字的三位数，其中偶数共(　　)

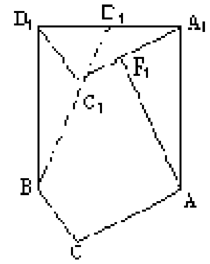
(A) 24 个　　(B) 30 个　　(C) 40 个　　(D) 60 个

14．在极坐标系中，椭圆的二焦点分别在极点和点 $(2c,0)$，离心率为 e，则它的极坐标方程是(　　)

(A) $\rho=\dfrac{c(1-e)}{1-e\cos\theta}$　　　　(B) $\rho=\dfrac{c(1-e^2)}{1-e\cos\theta}$

(C) $\rho=\dfrac{c(1-e)}{1-e\cos\theta}$　　　　(D) $\rho=\dfrac{c(1-e^2)}{e(1-e\cos\theta)}$

15．如图，$A_1B_1C_1-ABC$是直三棱柱，$\angle BCA=90°$，点D_1，F_1分别是A_1B_1，A_1C_1的中点，若$BC=CA=CC_1$，则BD_1与AF_1所成的角的余弦值是(　　)



(A) $\dfrac{\sqrt{30}}{10}$　(B) $\dfrac{1}{2}$　(C) $\dfrac{\sqrt{30}}{15}$　(D) $\dfrac{\sqrt{15}}{10}$

第Ⅱ卷(非选择题，共 85 分)

二、填空题(本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分，把答案填在题中横线上)

16．不等式$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2-8}>3^{-2x}$的解集是__________.

17．已知圆台上、下底面圆周都在球面上，且下底面过球心，母线与底面所成的角为$\dfrac{\pi}{3}$，则圆台的体积与球体积之比为____________.

18．函数$y=\sin(x-\dfrac{\pi}{6})\cos x$的最小值是____________.

19．直线l过抛物线$y^2=a(x+1)(a>0)$的焦点，并且与x轴垂直，若l被抛物线截得的线段长为 4，则$a=$____________.

20．四个不同的小球放入编号为 1，2，3，4 的四个盒中，则恰有一个空盒的放法共有__________种(用数字作答)．

三、解答题(本大题共 6 小题，共 65 分．解答应写出文字说明、证明过程或推演步骤)

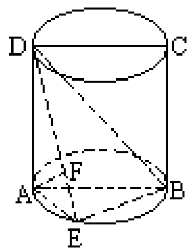
21．(本小题满分 7 分)

在复平面上，一个正方形的四个顶点按照逆时针方向依次为Z_1，Z_2，Z_3，O(其中O是原点)，已知Z_2对应复数$Z_2=1+\sqrt{3}i$．求Z_1和Z_3对应的复数.

22．(本小题满分 10 分)求$\sin^2 20°+\cos^2 50°+\sin 20°\cos 50°$的值.

23．(本小题满分 12 分)

如图，圆柱的轴截面 $ABCD$ 是正方形，点 E 在底面的圆周上，$AF\perp DE$，F 是垂足.



(1)求证：$AF\perp DB$;

(2)如果圆柱与三棱锥 $D-ABE$ 的体积的比等于 3π，求直线 DE 与平面 $ABCD$ 所成的角.

24．(本小题满分 12 分)

某地为促进淡水鱼养殖业的发展，将价格控制在适当范围内，决定对淡水鱼养殖提供政府补贴．设淡水鱼的市场价格为 x 元/千克，政府补贴为 t 元/千克．根据市场调查，当 $8\leqslant x\leqslant 14$ 时，淡水鱼的市场日供应量 P 千克与市场日需求量 Q 千克近似地满足关系：

$$P=1000(x+t-8)\ (x\geqslant 8,\ t\geqslant 0),$$

$$Q=500\sqrt{40-(x-8)^2}\ (8\leqslant x\leqslant 14).$$

当 $P=Q$ 时市场价格称为市场平衡价格.

(1)将市场平衡价格表示为政府补贴的函数，并求出函数的定义域;

(2)为使市场平衡价格不高于每千克 10 元，政府补贴至少为每千克多少元?

25．(本小题满分 12 分)

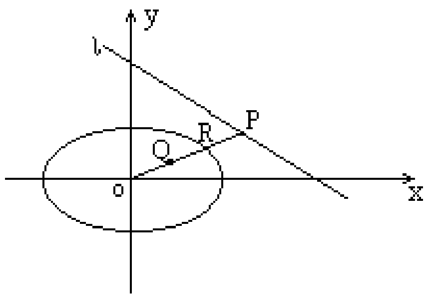
设$\{a_n\}$是由正数组成的等比数列，S_n 是其前 n 项和.

(1)证明 $\dfrac{\lg S_n+\lg S_{n+2}}{2}<\lg S_{n+1}$;

(2)是否存在常数 $c>0$，使得 $\dfrac{\lg(S_n-c)+\lg(S_{n+2}-c)}{2}=\lg(S_{n+1}-c)$成立?并证明你的结论.

26．(本小题满分 12 分)

已知椭圆 $\dfrac{x^2}{24}+\dfrac{y^2}{16}=1$，直线 $l:\dfrac{x}{12}+\dfrac{y}{8}=1$ P 是 l 上点，射线 OP 交椭圆于点 R，点 Q 在 OP 上且满足$|OQ|\cdot|OP|=|OR|^2$,当点 P 在 l 上移动时，求点 Q 的轨迹方程，并说明轨迹是什么曲线.



参考答案

一、选择题(本题考查基本知识和基本运算)

1．C　2．B　3．C　4．B　5．D　6．D　7．B　8．C　9．A

10．D　11．B　12．C　13．A　14．D　15．A

二、填空题(本题考查基本知识和基本运算)

16．$\{x|-2<x<4\}$　17．$\dfrac{7\sqrt{3}}{32}$　18．$-\dfrac{3}{4}$　19．4　20．144

三、解答题

21．本小题主要考查复数基本概念和几何意义，以及运算能力.

解：设 Z_1，Z_3对应的复数分别为 z_1，z_3，依题设得

$$z_1=\frac{1}{\sqrt{2}}z_2[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{3}i\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i$$

$$z_3=\frac{1}{\sqrt{2}}z_2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{3}i\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$=\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}i$$

22．本小题主要考查三角恒等式和运算能力.

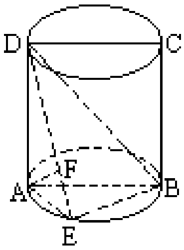
解：　原式$=\dfrac{1}{2}\left(1-\cos 40°\right)+\dfrac{1}{2}\left(1+\cos 100°\right)+\sin 20°\cos 50°$

$$=1+\frac{1}{2}\left(\cos 100°-\cos 40°\right)+\frac{1}{2}\left(\sin 70°-\sin 30°\right)$$

$$=\frac{3}{4}-\sin 70°\sin 30°+\frac{1}{2}\sin 70°$$

$$=\frac{3}{4}$$

23．本小题主要考查空间线面关系、圆柱性质、空间想象能力和逻辑推理能力．



(1)证明：根据圆柱性质，$DA\perp$平面 ABE.

$\because EB\subset$平面 ABE,

$\therefore DA\perp EB$.

$\because AB$ 是圆柱底面的直径，点 E 在圆周上，

$\therefore AE\perp EB$，又 $AE\cap AD=A$,

故得 $EB\perp$平面 DAE.

$\because AF\subset$平面 DAE,

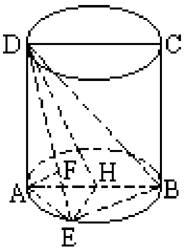
$\therefore EB\perp AF$.

又 $AF\perp DE$，且 $EB\cap DE=E$,

故得 $AF\perp$平面 DEB.

$\because DB\subset$平面 DEB,

$\therefore AF\perp DB$.



(2)解：过点 E 作 $EH\perp AB$，H 是垂足，连结 DH．根据圆柱性质，平面 $ABCD\perp$平面 ABE，AB 是交线．且 $Eh\subset$平面 ABE，所以 $EH\perp$平面 $ABCD$.

又 $Dh\subset$平面 $ABCD$，所以 DH 是 ED 在平面 $ABCD$ 上的射影，从而$\angle EDH$ 是 DE 与平面 $ABCD$ 所成的角．

设圆柱的底面半径为 R，则 $DA=AB=2R$，于是

V圆柱$=2\pi R^3$,

$$V_{D-ABE}=\frac{1}{3}AD\cdot S_{\Delta ABE}=\frac{2R^2}{3}\cdot EH.$$

由 $V_{圆柱}$：$V_{D-ABE}=3\pi$，得 $EH=R$，可知 H 是圆柱底面的圆心，

$AH=R$,

$DH=\sqrt{DA^2+AH^2}=\sqrt{5}R$

$\therefore\angle EDH=\operatorname{arcctg}\dfrac{DH}{EH}=\operatorname{arcctg}\sqrt{5}$，

24．本小题主要考查运用所学数学知识和方法解决实际问题的能力，以及函数的概念、方程和不等式的解法等基础知识和方法．

解：(1)依题设有

$$1000(x+t-8)=500\sqrt{40-(x-8)^2},$$

化简得 $$5x^2+(8t-80)x+(4t^2-64t+280)=0.$$

当判别式$\triangle=800-16t^2\geqslant 0$时，

可得 $$x=8-\frac{4}{5}t\pm\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}.$$

由$\triangle\geqslant 0$，$t\geqslant 0$，$8\leqslant x\leqslant 14$，得不等式组：

① $$\begin{cases}0\le t\le\sqrt{50}\\ 8\le 8-\frac{4}{5}t+\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}\le 14\end{cases}$$

② $$\begin{cases}0\le t\le\sqrt{50}\\ 8\le 8-\frac{4}{5}t-\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}\le 14\end{cases}$$

解不等式组①，得 $0\leqslant t\leqslant\sqrt{10}$，不等式组②无解．故所求的函数关系式为

$$x=8-\frac{4}{5}t+\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}$$

函数的定义域为$[0,\sqrt{10}]$．

(2)为使 $x\leqslant 10$，应有

$$8-\frac{4}{5}t+\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}\leqslant 10$$

化简得 $$t^2+4t-5\geqslant 0.$$

解得 $t\geqslant 1$ 或 $t\leqslant -5$，由 $t\geqslant 0$ 知 $t\geqslant 1$．从而政府补贴至少为每千克 1 元．

25．本小题主要考查等比数列、对数、不等式等基础知识，考查推理能力以及分析问题和解决问题的能力．

(1)证明：设$\{a_n\}$的公比为 q，由题设 $a_1>0$，$q>0$．

(i)当 $q=1$ 时，$S_n=na_1$，从而

$S_n\cdot S_{n+2}-S_{n+1}^2$

$=na_1\cdot(n+2)a_1-(n+1)^2a_1^2$

$=-a_1^2<0$

(ii)当 $q\neq 1$ 时，$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$，从而

$S_n \cdot S_{n+2} - S_{n+1}^2$

$$= \frac{a_1^2(1-q^n)(1-q^{n+2})}{(1-q)^2} - \frac{a_1^2(1-q^{n+1})^2}{(1-q)^2}$$

$$= -a_1^2 q^n < 0.$$

由(i)和(ii)得 $S_n \cdot S_{n+2} - S_{n+1}^2$．根据对数函数的单调性，知

$$\lg(S_n \cdot S_{n+2}) < \lg S_{n+1}^2,$$

即 $$\frac{\lg S_n + \lg S_{n+2}}{2} < \lg S_{n+1}.$$

(2)解：不存在．

证明一：要使

$\dfrac{\lg(S_n - c) + \lg(S_{n+2} - c)}{2} = \lg(S_{n+1} - c)$．成立，则有

$$\begin{cases}(S_n - c)(S_{n+2} - c) = (S_{n+1} - c)^2, & ① \\ S_n - c > 0. & ②\end{cases}$$

分两种情况讨论：

(i)当 $q=1$ 时，

$(S_n - c)(S_{n+2} - c) = (S_{n+1} - c)^2$

$= (na_1 - c)[(n+2)a_1 - c] - [(n+1)a_1 - c]^2$

$= -a_1^2 < 0.$

可知，不满足条件①，即不存在常数 $c>0$，使结论成立．

(ii)当 $q\neq1$ 时，若条件①成立，因为

$(S_n - c)(S_{n+2} - c) - (S_{n+1} - c)^2$

$$= \left[\frac{a_1(1-q^n)}{1-q} - c\right]\left[\frac{a_1(1-q^{n+2})}{1-q} - c\right] - \left[\frac{a_1(1-q^{n+1})}{1-q} - c\right]^2$$

$= -a_1q^n[a_1 - c(1-q)]$，

且 $a_1q^n\neq0$，故只能有 $a_1 - c(1-q) = 0$，即 $c = \dfrac{a_1}{1-q}$

此时，因为 $c>0$，$a_1>0$，所以 $0<q<1$．

但 0<q<1 时，$S_n-\frac{a_1}{1-q}=-\frac{a_1q^n}{1-q}<0$，不满足条件②，即不存在常数 c>0，使结论成立.

综合(i)、(ii)，同时满足条件①、②的常数 c>0 不存在，即不存在常数 c>0，使

$$\frac{\lg(S_n-c)+\lg(S_{n+2}-c)}{2}=\lg(S_{n+1}-c).$$

证法二：用反证法，假设存在常数 c>0，使

$$\frac{\lg(S_n-c)+\lg(S_{n+2}-c)}{2}=\lg(S_{n+1}-c),$$

则有

$$\begin{cases} S_n-c>0, & ① \\ S_{n+1}-c>0, & ② \\ S_{n+2}-c>0, & ③ \\ (S_n-c)(S_{n+2}-c)=(S_{n+1}-c)^2. & ④ \end{cases}$$

由④得

$S_nS_{n+2}-S_{n+1}^2=c\ (S_n+S_{n+2}-2S_{n+1})$.　⑤

根据平均值不等式及①、②、③、④知

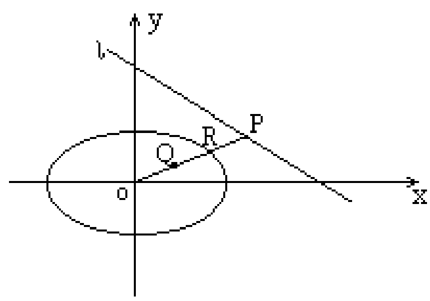
$$S_n+S_{n+2}-2S_{n+1}$$

$$=(S_n-c)+(S_{n+2}-c)-2(S_{n+1}-c)\geqslant 2\sqrt{(S_n-c)(S_{n+2}-c)}-2(S_{n+1}-c)=0.$$

因为 c>0，故⑤式右端非负，而由(1)知，⑤式左端小于零，矛盾．故不存在常数 c>0，使

$$\frac{\lg(S_n-c)+\lg(S_{n+2}-c)}{2}=\lg(S_{n+1}-c)$$

26．本小题主要考查直线、椭圆的方程和性质，曲线与方程的关系，轨迹的概念和求法，利用方程判定曲线的性质等解析几何的基本思想和综合运用知识的能力.



解法一：由题设知点 Q 不在原点．设 P、R、Q 的坐标分别为$(x_P,\ y_P)$，$(x_R,\ y_R)$，(x, y)，其中 x，y 不同时为零.

当点 P 不在 y 轴上时，由于点 R 在椭圆上及点 O、Q、R 共线，得方程组

$$\begin{cases}\dfrac{x_R^2}{24}+\dfrac{y_R^2}{16}=1\\ \dfrac{y_R}{x_R}=\dfrac{y}{x}\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x_R^2=\dfrac{48x^2}{2x^2+3y^2} & ①\\ y_R^2=\dfrac{48y^2}{2x^2+3y^2} & ②\end{cases}$$

由于点 P 在直线 l 上及点 O、Q、P 共线，得方程组

$$\begin{cases}\dfrac{x_p}{12}+\dfrac{y_p}{8}=1\\ \dfrac{y_p}{x_p}=\dfrac{y}{x}\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}x_p=\dfrac{24x}{2x+3y} & ③\\ y_p=\dfrac{24y}{2x+3y} & ④\end{cases}$

当点 P 在 y 轴上时，经验证①－④式也成立.

由题设 $|OQ|\cdot|OP|=|OR|^2$，得

$$\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x_P^2+y_P^2}=\left(\sqrt{x_R^2+y_R^2}\right)^2$$

将①－④代入上式，化简整理得

$$\sqrt{\frac{24^2\left(x^2+y^2\right)^2}{(2x+3y)^2}}=\frac{48\left(x^2+y^2\right)}{2x^2+3y^2}$$

因 x 与 x_p 同号或 y 与 yp 同号，以及③、④知 $2x+3y>0$，故点 Q 的轨迹方程为

$$\frac{(x-1)^2}{\frac{5}{2}}+\frac{(y-1)^2}{\frac{5}{3}}=1 \text{（其中 } x，y \text{ 不同时为零）.}$$

所以点 Q 的轨迹是以 $(1，1)$ 为中心，长、短半轴分别为 $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ 和 $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$ 且长轴与 x 轴平行的椭圆、去掉坐标原点.

解法二：由题设知点 Q 不在原点．设 P，R，Q 的坐标分别为 (x_p, y_p)，(x_R, y_R)，(x, y)，其中 x，y 不同时为零．

设 OP 与 x 轴正方向的夹角为 α，则有

$x_p=|OP|\cos\alpha$，$y_p=|OP|\sin\alpha$；

$x_R=|OR|\cos\alpha$，$y_R=|OR|\sin\alpha$；

$x=|OQ|\cos\alpha$，$y=|OQ|\sin\alpha$；

由上式及题设 $|OQ|\cdot|OP|=|OR|^2$，得

$$\begin{cases} x_P=\dfrac{|OP|}{|OQ|}x, & ① \\ y_P=\dfrac{|OP|}{|OQ|}y, & ② \\ x_R^2=\dfrac{|OP|}{|OQ|}x^2, & ③ \\ y_R^2=\dfrac{|OP|}{|OQ|}y^2, & ④ \end{cases}$$

由点 P 在直线 l 上，点 R [illegible] 上，得方程组

$$\begin{cases} \dfrac{x_P}{12}+\dfrac{y_P}{8}=1, & ⑤ \\ \dfrac{x_R^2}{24}+\dfrac{y_R^2}{16}=1, & ⑥ \end{cases}$$

将①，②，③，④代入⑤，⑥，整理得点 Q 的轨迹方程为

$$\frac{(x-1)^2}{\frac{5}{2}}+\frac{(y-1)^2}{\frac{5}{3}}=1 \text{（其中 } x，y \text{ 不同时为零）}.$$

所以点 Q 的轨迹是以 $(1，1)$ 为中心，长、短半轴分别为 $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ 和 $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$ 且长轴与 x 轴平行的椭圆、去掉坐标原点．