# 2009年湖南省高考数学试卷（文科）

参考答案与试题解析

## 一、选择题（共8小题，每小题5分，满分40分）

1．（5分）（2009•湖南）$\log_2\sqrt{2}$的值为（　　）

A．$-\sqrt{2}$　B．$\sqrt{2}$　C．$-\frac{1}{2}$　D．$\frac{1}{2}$

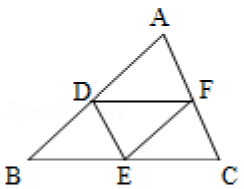
2．（5分）（2009•湖南）抛物线$y^2=4x$的焦点坐标是（　　）

A．（4，0）　B．（2，0）　C．（1，0）　D．$(\frac{1}{2}，0)$

3．（5分）（2009•湖南）设$S_n$是等差数列$\{a_n\}$的前n项和，已知$a_2=3$，$a_6=11$，则$S_7$等于（　　）

A．13　B．35　C．49　D．63

4．（5分）（2009•湖南）如图，D，E，F分别是△ABC的边AB，BC，CA的中点，则（　　）




A．$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$　B．$\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{DF}=\vec{0}$　C．$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CF}=\vec{0}$　D．$\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{FC}=\vec{0}$



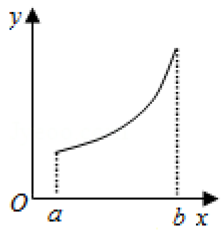
5．（5分）（2009•湖南）某地政府召集5家企业的负责人开会，已知甲企业有2人到会，其余4家企业各有1人到会，会上有3人发言，则这3人来自3家不同企业的可能情况的种数为（　　）

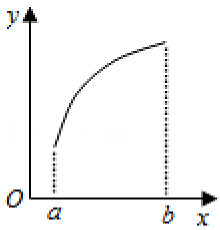
A．14　B．16　C．20　D．48

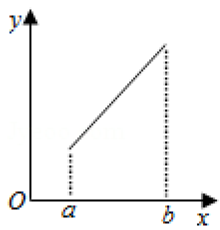
6．（5分）（2009•湖南）平行六面体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，既与AB共面也与$CC_1$共面的棱的条数为（　　）

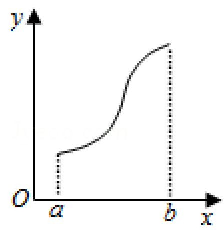
A．3　B．4　C．5　D．6

7．（5分）（2009•湖南）若函数y=f（x）的导函数在区间[a，b]上是增函数，则函数y=f（x）在区间[a，b]上的图象可能是（　　）

A．

B．

C．

D．

8. （5分）（2009•湖南）设函数=f（x）在（－∞，+∞）内有定义，对于给定的正数K，定义函数$f_K$（x）=$\begin{cases} f(x), & f(x)\leqslant K \\ K, & f(x)>K. \end{cases}$取函数f（x）=$2^{-|x|}$．当K=$\frac{1}{2}$时，函数$f_K$（x）的单调递增区间为（　　）

A．（－∞，0）　B．（0，+∞）　C．（－∞，－1）　D．（1，+∞）

**二、填空题（共7小题，每小题5分，满分35分）**

9．（5分）（2009•湖南）某班共30人，其中15人喜爱篮球运动，10人喜爱乒乓球运动，8人对这两项运动都不喜爱，则喜爱篮球运动但不喜爱乒乓球运动的人数为____．

10．（5分）（2009•湖南）若x＞0，则$x+\frac{2}{x}$的最小值为____．

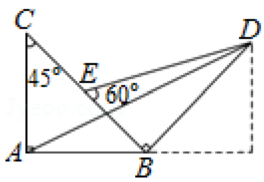
11．（5分）（2009•湖南）在$(1+\sqrt{x})^4$的展开式中，x的系数为__．

12．（5分）（2009•湖南）一个总体分为A，B两层，用分层抽样方法从总体中抽取一个容量为10的样本．已知B层中每个个体被抽到的概率都为$\frac{1}{12}$，则总体中的个体数为____．

13．（5分）（2009•湖南）过双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0，b＞0）的一个焦点作圆$x^2+y^2=a^2$的两条切线，切点分别为A、B．若∠AOB=120°（O是坐标原点），则双曲线C的离心率为____．

14．（5分）（2009•湖南）在锐角△ABC中，BC=1，B=2A，则$\frac{AC}{\cos A}$的值等于____，AC的取值范围为____．

15．（5分）（2009•湖南）如图所示，把两块斜边长相等的直角三角板拼在一起，若$\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，则x=____，y=____．




**三、解答题（共6小题，满分75分）**

16．（12分）（2009•湖南）已知向量$\vec{a}$=（sinθ，cosθ－2sinθ），$\vec{b}$=（1，2）．

（1）若$\vec{a}\parallel\vec{b}$，求tanθ的值；

（2）若 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$，$0<\theta<\pi$，求θ的值．

17．（12分）（2009•湖南）为拉动经济增长，某市决定新建一批重点工程，分别为基础设施工程、民生工程和产业建设工程三类，这三类工程所含项目的个数分别占总数的$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{6}$，现在3名工人独立地从中任选一个项目参与建设，选择哪个工程是随机的．

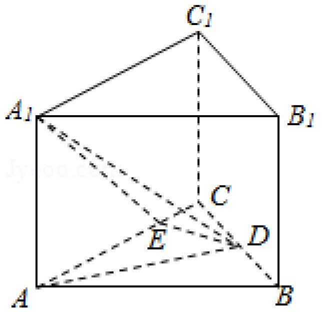
（I）求他们选择的项目所属类别互不相同的概率；

（II）记X为3人中选择的项目属于基础设施工程的人数，求X的分布列及数学期望．

18．（12分）（2009•湖南）如图，在正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB=4$，$AA_1=\sqrt{7}$，点D是BC的中点，点E在AC上，且$DE\perp A_1E$．

（1）证明：平面$A_1DE\perp$平面$ACC_1A_1$；

（2）求直线AD和平面$A_1DE$所成角的正弦值．




19．（13分）（2009•湖南）已知函数$f(x)=x^3+bx^2+cx$的导函数的图象关于直线$x=2$对称．

（1）求b的值；

（2）若f（x）在x=t处取得极小值，记此极小值为g（t），求g（t）的定义域和值域．

20．（13分）（2009•湖南）已知椭圆C的中心在原点，焦点在x轴上，以两个焦点和短轴的两个端点为顶点的四边形是一个面积为8的正方形（记为Q）

（1）求椭圆C的方程；

（2）设点P是椭圆C的左准线与x轴的交点，过点P的直线l与椭圆C相交于M、N两点，当线段MN的中点落在正方形Q内（包括边界）时，求直线l的斜率的取值范围．

21．（13分）（2009•湖南）对于数列$\{u_n\}$若存在常数M＞0，对任意的$n\in N^+$，恒有$|u_{n+1}-u_n|+|u_n-u_{n1}|+\ldots+|u_2-u_1|\leq M$则称数列$u_n$为B﹣数列

（1）首项为1，公比为$-\frac{1}{2}$的等比数列是否为B﹣数列？请说明理由；

（2）设$s_n$是数列$\{x_n\}$的前n项和，给出下列两组判断：

A组：①数列$\{x_n\}$是B﹣数列．　②数列$\{x_n\}$不是B﹣数列．

B组　③数列$\{s_n\}$是B﹣数列．　④数列$\{s_n\}$不是B﹣数列

请以其中一组的一个论断条件，另一组中的一个论断为结论组成一个命题判断所给命题的真假，并证明你的结论；

（3）若数列$\{a_n\}$是B﹣数列，证明：数列$\{a_n^2\}$也是B﹣数列．

# 2009年湖南省高考数学试卷（文科）

参考答案与试题解析

## 一、选择题（共8小题，每小题5分，满分40分）

1．（5分）（2009•湖南）$\log_2\sqrt{2}$的值为（　　）

A．$-\sqrt{2}$　B．$\sqrt{2}$　C．$-\frac{1}{2}$　D．$\frac{1}{2}$

【考点】对数的运算性质．

【专题】计算题；转化思想．

【分析】先将$\sqrt{2}$转化成$2^{\frac{1}{2}}$，然后根据对数的运算性质进行求解即可．

【解答】解：$\log_2\sqrt{2}=\log_2 2^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$．

故选：D

【点评】本题主要考查了对数的运算性质，$\log_{a^m}b^n=\frac{n}{m}\log_a b$是对数运算中常用的公式，属于基础题．

2．（5分）（2009•湖南）抛物线$y^2=4x$的焦点坐标是（　　）

A．（4，0）B．（2，0）C．（1，0）D．$(\frac{1}{2}，0)$

【考点】双曲线的简单性质．

【分析】先根据抛物线$y^2=4x$的方程求出p的值，进而得到抛物线的焦点坐标．

【解答】解：$\because 2p=4\Rightarrow p=2$，$\therefore \frac{p}{2}=1$，$\therefore$抛物线$y^2=4x$的焦点是（1，0），

故选C；

【点评】本题主要考查抛物线的简单性质．属基础题．

3．（5分）（2009•湖南）设$S_n$是等差数列$\{a_n\}$的前n项和，已知$a_2=3$，$a_6=11$，则$S_7$等于（　　）

A．13　B．35　C．49　D．63

【考点】等差数列的前n项和．

【专题】等差数列与等比数列．

【分析】根据等差数列的性质可知项数之和相等的两项之和相等即$a_1+a_7=a_2+a_6$，求出$a_1+a_7$的值，然后利用等差数列的前n项和的公式表示出$S_7$，将$a_1+a_7$的值代入即可求出．

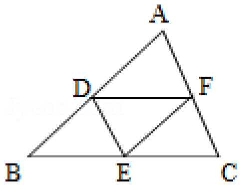
【解答】解：因为$a_1+a_7=a_2+a_6=3+11=14$，

所以$S_7=\frac{7(a_1+a_7)}{2}=\frac{7(a_2+a_6)}{2}=\frac{7\times 14}{2}=49$

故选C．

【点评】此题考查学生掌握等差数列的性质及前n项和的公式，是一道基础题．

4．（5分）（2009•湖南）如图，D，E，F分别是△ABC的边AB，BC，CA的中点，则（　　）




A．$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{0}$B．$\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{0}$　C．$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{0}$　D．$\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{0}$

【考点】向量加减混合运算及其几何意义．

【分析】模相等、方向相同的向量为相等向量，得出图中的相等向量，再由向量加法法则得选项．

【解答】解：由图可知$\overline{AD}=\overline{DB}$，$\overline{CF}=\overline{FA}=\overline{ED}$

在△DBE中，$\overline{DB}+\overline{BE}+\overline{ED}=0$，即$\overline{AD}+\overline{CF}+\overline{BE}=0$．

故选项为A．

【点评】考查向量相等的定义及向量加法的三角形法则．

5．（5分）（2009•湖南）某地政府召集5家企业的负责人开会，已知甲企业有2人到会，其余4家企业各有1人到会，会上有3人发言，则这3人来自3家不同企业的可能情况的种数为（　　）

A．14　B．16　C．20　D．48

【考点】计数原理的应用．

【专题】计算题．

【分析】本题是一个分类计数问题，由于甲有两个人参加会议需要分两类，含有甲的选法有$C_2^1C_4^2$种；不含有甲的选法有$C_4^3$种，根据分类计数原理得到结果．

【解答】解：由题意知本题是一个分类计数问题，

由于甲有两个人参加会议需要分两类：

①含有甲的选法有$C_2^1C_4^2$种，

②不含有甲的选法有$C_4^3$种，

共有$C_2^1C_4^2+C_4^3=16$（种），

故选B．

【点评】本题考查分类计数问题，在排列的过程中出现有特殊情况的元素，需要分类来解，不然不能保证发言的3人来自3家不同企业．

6．（5分）（2009•湖南）平行六面体ABCD﹣$A_1B_1C_1D_1$中，既与AB共面也与$CC_1$共面的棱的条数为（　　）

A．3　B．4　C．5　D．6

【考点】平面的基本性质及推论．

【专题】计算题．

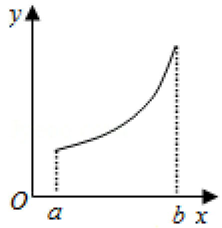
【分析】根据平行六面体的结构特征和公理2的推论进行判断，即找出与AB和$CC_1$平行或相交的棱．

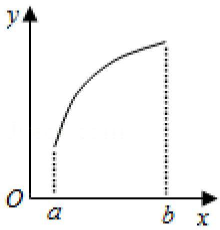
【解答】解：根据两条平行直线、两条相交直线确定一个平面，可得CD、BC、$BB_1$、$AA_1$、$C_1D_1$符合条件．

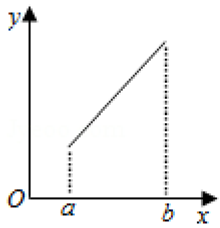
故选C．

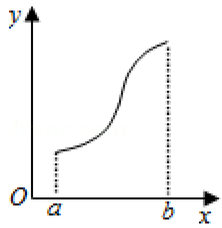
【点评】本题考查了平行六面体的结构特征和公理2的推论的应用，找出与AB和$CC_1$平行或相交的棱即可，考查了空间想象能力．

7．（5分）（2009•湖南）若函数y=f（x）的导函数在区间[a，b]上是增函数，则函数y=f（x）在区间[a，b]上的图象可能是（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 


【考点】利用导数研究函数的单调性．

【专题】数形结合法．

【分析】根据函数的单调性与导函数的关系，用排除法进行判断．

【解答】解：∵函数y=f（x）的导函数在区间[a，b]上是增函数，

∴对任意的a＜x′＜x″＜b，有f′（a）＜f′（x′）＜f′（x″）＜f′（b），

也即在a，x'，x“，b处它们的斜率是依次增大的．

∴A 满足上述条件，

B 存在f′（x′）＞f′（x″），

C 对任意的a＜x′＜x″＜b，f′（x′）=f′（x″），

D 对任意的x∈[a，b]，f′（x）不满足逐项递增的条件，

故选A．

【点评】掌握函数的单调性与导函数的关系，并会观察图形．

8．（5分）（2009•湖南）设函数=f（x）在（－∞，+∞）内有定义，对于给定的正数K，定义函数$f_K$（x）=$\begin{cases} f(x), & f(x)\leqslant K \\ K, & f(x)>K. \end{cases}$取函数f（x）=$2^{-|x|}$．当K=$\frac{1}{2}$时，函数$f_K$（x）的单调递增区间为（　　）

A．（－∞，0）　B．（0，+∞）　C．（－∞，－1）　D．（1，+∞）

【考点】函数单调性的判断与证明．

【专题】计算题；压轴题．

【分析】先根据题中所给的函数定义求出函数函数$f_K$（x）的解析式，是一个分段函数，再利用指数函数的性质即可选出答案．

【解答】解：由f（x）≤$\frac{1}{2}$得：$2^{-|x|}\leqslant\frac{1}{2}$，即$\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}\leqslant\frac{1}{2}$，

解得：x≤－1或x≥1．

$\therefore$函数$f_K(x)=\begin{cases}(\frac{1}{2})^x, & x\geqslant 1\\ 2^x, & x\leqslant -1\\ \frac{1}{2}, & -1<x<1\end{cases}$

由此可见，函数$f_K(x)$在$(-\infty,\ -1)$单调递增，

故选C.

【点评】本题主要考查了分段函数的性质、函数单调性的判断，属于基础题.

## 二、填空题（共7小题，每小题5分，满分35分）

9．（5分）（2009•湖南）某班共30人，其中15人喜爱篮球运动，10人喜爱乒乓球运动，8人对这两项运动都不喜爱，则喜爱篮球运动但不喜爱乒乓球运动的人数为__12__.

【考点】交、并、补集的混合运算.

【专题】应用题；集合.

【分析】设两者都喜欢的人数为x人，则只喜爱篮球的有（15﹣x）人，只喜爱乒乓球的有（10﹣x）人，由此可得（15﹣x）+（10﹣x）+x+8=30，解之即可两者都喜欢的人数，然后即可得出喜爱篮球运动但不喜爱乒乓球运动的人数.

【解答】解：设两者都喜欢的人数为x人，则只喜爱篮球的有（15﹣x）人，只喜爱乒乓球的有（10﹣x）人，

由此可得（15﹣x）+（10﹣x）+x+8=30，解得x=3，

所以15﹣x=12，

即所求人数为12人，

故答案为：12.

【点评】本题考查了集合的混合运算，属于应用题，关键是运用集合的知识求解实际问题.

10．（5分）（2009•湖南）若x＞0，则$x+\frac{2}{x}$的最小值为__$2\sqrt{2}$.__.

【考点】基本不等式.

【专题】计算题.

【分析】由于x和$\frac{2}{x}$都是正数，x与$\frac{2}{x}$的积是常数，所以使用基本不等式求式子的最小值，注意检验等号成立条件.

【解答】解：$\because x>0$，$\therefore \frac{2}{x}>0$，由基本不等式得：

$x+\frac{2}{x}\geq 2\sqrt{2}$，当且仅当$x=\frac{2}{x}$，即$x=\sqrt{2}$时取等号，

$\therefore$当$x=\sqrt{2}$时，$x+\frac{2}{x}$有最小值为$2\sqrt{2}$，

故答案为$2\sqrt{2}$.

【点评】本题考查基本不等式的应用，注意基本不等式使用条件：一正、二定、三相等，即不等式的各项都是正数，

和或积中出现定值、等号成立条件具备.

11．（5分）（2009•湖南）在$(1+\sqrt{x})^4$的展开式中，x的系数为<u>  6  </u>．

【考点】二项式系数的性质．
【专题】计算题．

【分析】根据题意，$(1+\sqrt{x})^4$的展开式为$T_{r+1}=C_4^r(\sqrt{x})^r$；分析可得，r=2时，有x的项，将x=2代入可得答案．

【解答】解：根据题意，$(1+\sqrt{x})^4$的展开式为$T_{r+1}=C_4^r(\sqrt{x})^r$；

当r=2时，有$T_3=C_4^2(\sqrt{x})^2=6x$；
故答案为：6．
【点评】本题考查二项式系数的性质，特别要注意对x系数的化简．

12．（5分）（2009•湖南）一个总体分为A，B两层，用分层抽样方法从总体中抽取一个容量为10的样本．已知B层中每个个体被抽到的概率都为$\frac{1}{12}$，则总体中的个体数为<u>  120  </u>．

【考点】分层抽样方法；等可能事件的概率．
【专题】计算题．
【分析】本题考查分层抽样，抽样过程中每个个体被抽到的可能性相同，这是解决一部分抽样问题的依据，样本容量、总体个数、每个个体被抽到的概率，这三者可以知二求一．

【解答】解：∵B层中每个个体被抽到的概率都为$\frac{1}{12}$，

∴总体中每个个体被抽到的概率是$\frac{1}{12}$，

∴由分层抽样是等概率抽样得总体中的个体数为$10\div\frac{1}{12}=120$

故答案为：120．
【点评】抽样选用哪一种抽样形式，要根据题目所给的总体情况来决定，若总体个数较少，可采用抽签法，若总体个数较多且个体各部分差异不大，可采用系统抽样，若总体的个体差异较大，可采用分层抽样．

13．（5分）（2009•湖南）过双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0，b＞0）的一个焦点作圆$x^2+y^2=a^2$的两条切线，切点分别为A、B．若∠AOB=120°（O是坐标原点），则双曲线C的离心率为<u>  2  </u>．
【考点】双曲线的简单性质．
【专题】计算题．

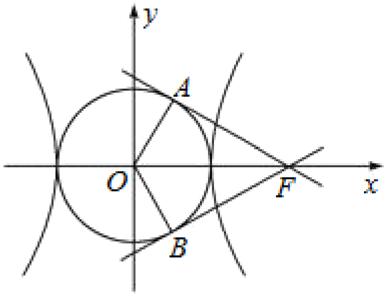
【分析】根据题意可先求得∠AOF利用OF和OA，在直角三角形中求得$\frac{a}{c}$的值，进而可求得双曲线的离心率．
【解答】解：如图，由题知OA⊥AF，OB⊥BF且∠AOB=120°，
∴∠AOF=60°，又OA=a，

OF=c，

$\therefore \frac{a}{c}=\frac{OA}{OF}=\cos 60°=\frac{1}{2}$，

$\therefore \frac{c}{a}=2$.

故答案为2




【点评】本题主要考查了双曲线的简单性质．解题的过程中采用了数形结合的思想，使问题的解决更直观．

14．（5分）（2009•湖南）在锐角△ABC中，BC=1，B=2A，则$\frac{AC}{\cos A}$的值等于\_\_2\_\_，AC的取值范围为\_\_$(\sqrt{2}，\sqrt{3})$__．

【考点】正弦定理；同角三角函数基本关系的运用．

【专题】综合题；压轴题．

【分析】（1）根据正弦定理和B=2A及二倍角的正弦公式化简可得值；

（2）由（1）得到AC=2cosA，要求AC的范围，只需找出2cosA的范围即可，根据锐角△ABC和B=2A求出A的范围，然后根据余弦函数的增减性得到cosA的范围即可．

【解答】解：（1）根据正弦定理得：$\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}$，

因为B=2A，化简得$\frac{AC}{2\sin A\cos A}=\frac{1}{\sin A}$即$\frac{AC}{\cos A}=2$；

（2）因为△ABC是锐角三角形，C为锐角，

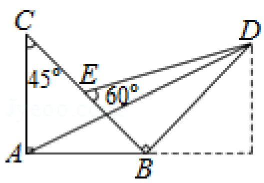
所以$A+B>\frac{\pi}{2}$，由B=2A得到$A+2A>\frac{\pi}{2}$且$2A=B<\frac{\pi}{2}$，从而解得：$\frac{\pi}{6}<A<\frac{\pi}{4}$，

于是$\sqrt{2}<2\cos A<\sqrt{3}$，由（1）的结论得2cosA=AC，故$\sqrt{2}<AC<\sqrt{3}$.

故答案为：2，$(\sqrt{2}，\sqrt{3})$

【点评】考查学生灵活运用正弦定理及二倍角的正弦公式化简求值，本题的突破点是根据三角形为锐角三角形、内角和定理及B=2A变换角得到角的范围．

15．（5分）（2009•湖南）如图所示，把两块斜边长相等的直角三角板拼在一起，若$\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，则x=__$1+\frac{\sqrt{3}}{2}$\_\_，y=\_\_$\frac{\sqrt{3}}{2}$__．



【考点】相等向量与相反向量.
【专题】压轴题；待定系数法；数形结合法.

【分析】设 $|\overrightarrow{AB}|=1$，求出题中有关线段的长度及有关角的大小，利用2个向量的数量积公式，待定系数法求出x、y的值.

【解答】解∵$\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，又 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$，∴$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，

∴$\overrightarrow{BD}=(x-1)\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$.

又∵$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{AB}$，∴$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AB}=(x-1)\overrightarrow{AB}^2$.

设 $|\overrightarrow{AB}|=1$，则由题意知：$|\overrightarrow{DE}|=|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{2}$.

又∵∠BED=60°，∴ $|\overrightarrow{BD}|=\frac{\sqrt{6}}{2}$，显然$\overrightarrow{BD}$与$\overrightarrow{AB}$的夹角为45°.

∴由$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AB}=(x-1)\overrightarrow{AB}^2$得$\frac{\sqrt{6}}{2}\times1\times\cos45°=(x-1)\times1$，∴$x=\frac{\sqrt{3}}{2}+1$.

同理，在$\overrightarrow{BD}=(x-1)\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$中，两边同时乘以$\overrightarrow{AC}$，

由数量积公式可得：$y=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故答案为：$1+\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

【点评】本题考查2个向量的混合运算，两个向量的数量积定义式、公式的应用，待定系数法求参数值，体现了数形结合的数学思想，属于中档题.

## 三、解答题（共6小题，满分75分）

16. （12分）（2009•湖南）已知向量$\overrightarrow{a}=(\sin\theta,\cos\theta-2\sin\theta)$，$\overrightarrow{b}=(1,2)$.

（1）若$\overrightarrow{a}\parallel\overrightarrow{b}$，求tanθ的值；

（2）若 $|\overrightarrow{a}|=|\overrightarrow{b}|$，$0<\theta<\pi$，求θ的值.

【考点】平面向量的坐标运算.
【分析】（1）根据平面向量的共线定理的坐标表示即可解题.

（2）由$|\overrightarrow{a}|=|\overrightarrow{b}|$化简得$\sin2\theta+\cos2\theta=-1$，再由$\theta\in(0,\pi)$可解出θ的值.

【解答】解：（1）∵$\overrightarrow{a}\parallel\overrightarrow{b}$

∴$2\sin\theta=\cos\theta-2\sin\theta$即$4\sin\theta=\cos\theta$

∴$\tan\theta=\frac{1}{4}$

（2）由$|\overrightarrow{a}|=|\overrightarrow{b}|$

∴$\sin^2\theta+(\cos\theta-2\sin\theta)^2=5$
即$1-2\sin2\theta+4\sin^2\theta=5$化简得$\sin2\theta+\cos2\theta=-1$

故有$\sin(2\theta+\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

又∵$\theta\in(0,\pi)$ ∴$2\theta+\frac{\pi}{4}\in(\frac{\pi}{4},\frac{9}{4}\pi)$

∴$2\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{5}{4}\pi$或$2\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{7}{4}\pi$

∴$\theta=\frac{\pi}{2}$或$\theta=\frac{3}{4}\pi$

【点评】本题主要考查平面向量的共线定理的坐标表示以及向量的求模运算．向量和三角函数的综合题是高考的热点问题，每年必考．

17．（12分）（2009•湖南）为拉动经济增长，某市决定新建一批重点工程，分别为基础设施工程、民生工程和产业建设工程三类，这三类工程所含项目的个数分别占总数的$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{6}$，现在3名工人独立地从中任选一个项目参与建设，选择哪个工程是随机的．

（I）求他们选择的项目所属类别互不相同的概率；

（II）记X为3人中选择的项目属于基础设施工程的人数，求X的分布列及数学期望．

【考点】离散型随机变量及其分布列；相互独立事件的概率乘法公式．

【专题】计算题．

【分析】（I）由题意知3名工人独立地从中任选一个项目参与建设，根据三类工程的概率和相互独立事件同时发生的概率，写出他们选择的项目所属类别互不相同的概率．

（II）由题意知X为3人中选择的项目属于基础设施工程的人数，X的取值为：0，1，2，3．结合变量对应的事件，写出事件的概率，写出分布列和期望．

【解答】解：（I）3名工人独立地从中任选一个项目参与建设

设一次选择基础设施工程、民生工程和产业建设工程依次为事件A、B、C．

则$P(A)=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{1}{3}$，$P(C)=\frac{1}{6}$，

他们选择的项目所属类别互不相同的概率是：

$A_3^3\cdot P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)=6\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$

（II）由题意知X为3人中选择的项目属于基础设施工程的人数，

X的取值为：0，1，2，3．

$P(X=0)=(\frac{1}{3})^3+C_3^2\times(\frac{1}{3})^2\times\frac{1}{6}+C_3^1\times\frac{1}{3}\times(\frac{1}{6})^2+(\frac{1}{6})^3=\frac{1}{8}$；

$P(X=1)=C_3^1\times\frac{1}{2}\times[(\frac{1}{3})^2+C_2^1\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}+(\frac{1}{6})^2]=\frac{3}{8}$；

$P(X=2)=C_3^2\times(\frac{1}{2})^2\times(\frac{1}{3}+\frac{1}{6})=\frac{3}{8}$；

$P(X=3)=(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{8}$．

∴X的分布列为：

| X | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| P | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

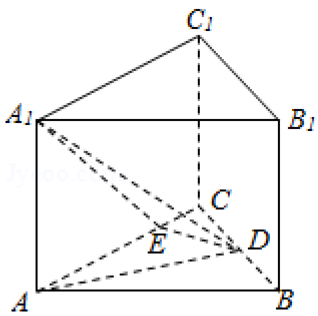
$\therefore EX=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$.

【点评】本题考查离散型随机变量的分布列和期望，考查相互独立事件同时发生的概率，是一个综合题，注意规范答题，这是一个送分的题目．

18．（12分）（2009•湖南）如图，在正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB=4$，$AA_1=\sqrt{7}$，点D是BC的中点，点E在AC上，且$DE\perp A_1E$．

（1）证明：平面$A_1DE\perp$平面$ACC_1A_1$；

（2）求直线AD和平面$A_1DE$所成角的正弦值．




【考点】平面与平面垂直的判定；直线与平面所成的角．

【专题】空间位置关系与距离．

【分析】（1）欲证平面$A_1DE\perp$平面$ACC_1A_1$，根据面面垂直的判定定理可知在平面ADE内一直线与平面$ACC_1A_1$垂直，而根据$DE\perp AA_1$而$DE\perp AE$．$AA_1\cap AE=A$满足线面垂直的判定定理可知$DE\perp$平面$ACC_1A_1$；

（2）过点A做AF垂直$A_1E$于F，连接DF，由（1）知：平面$A_1DE\perp$平面$ACC_1A_1$．所以$AF\perp$平面$A_1DE$，则$\angle ADF$即为直线AD和平面$A_1DE$所成角，在三角形ADF中求出此角即可．

【解答】解：（1）如图所示，由正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的性质知$AA_1\perp$平面$A_1B_1C_1$

又$DE\subset$平面$A_1B_1C_1$，

所以$DE\perp AA_1$．

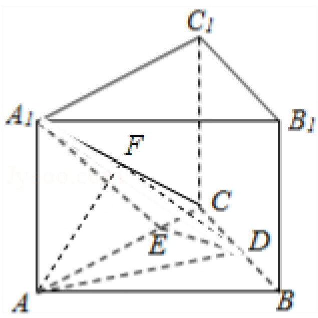
而$DE\perp AE$．$AA_1\cap AE=A$，

所以$DE\perp$平面$ACC_1A_1$，

又$DE\subset$平面$A_1DE$，

故平面$A_1DE\perp$平面$ACC_1A_1$．

（2）过点A做AF垂直$A_1E$于F，连接DF，




由（1）知：平面$A_1DE\perp$平面$ACC_1A_1$．

所以$AF\perp$平面$A_1DE$，

则∠ADF即为直线AD和平面$A_1DE$所成角，
因为DE⊥平面$ACC_1A_1$.
所以DE⊥AC，
而△ABC是边长为4的正三角形，
所以AD=$2\sqrt{3}$，AE=4 - CE=4 - $\frac{1}{2}$CD=3，
又因为$AA_1=\sqrt{7}$，
所以$A_1E=\sqrt{AA_1^{\ 2}+AE^2}=\sqrt{(\sqrt{7})^2+3^2}=4$，
$AF=\frac{AE\cdot AA_1}{A_1E}=\frac{3\sqrt{7}}{4}$，
所以$\sin\angle ADF=\frac{AF}{AD}=\frac{\sqrt{21}}{8}$，
故直线AD和平面$A_1DE$所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{21}}{8}$
【点评】本小题主要考查空间中的线面关系，考查面面垂直的判定及线面所成角的计算，考查逻辑思维能力、运算能力和推理论证能力，考查转化思想，属于基础题.

19．（13分）（2009•湖南）已知函数f（x）=$x^3+bx^2+cx$的导函数的图象关于直线x=2对称.
（1）求b的值；
（2）若f（x）在x=t处取得极小值，记此极小值为g（t），求g（t）的定义域和值域.
【考点】利用导数求闭区间上函数的最值；函数的定义域及其求法；函数的值域.
【专题】计算题.
【分析】（1）函数f（x）=$x^3+bx^2+cx$的导函数的图象关于直线x=2对称，则求出f'（x）得到一个二次函数，利用$x=-\frac{b}{2a}$=2求出b即可；（2）求出f'（x），由（1）得函数的对称轴为x=2，讨论c的取值范围求出g（t）的定义域和值域即可.
【解答】解：（1）f'（x）=$3x^2+2bx+c$
因为函数f'（x）的图象关于直线x=2对称，
所以$-\frac{2b}{6}=2$，于是b= - 6
（2）由（Ⅰ）知，f（x）=$x^3-6x^2+cx$
f'（x）=$3x^2-12x+c=3(x-2)^2+c-12$
（ⅰ）当c≥12时，f'（x）≥0，此时f（x）无极值.
（ii）当c＜12时，f'（x）=0有两个互异实根$x_1$，$x_2$.
不妨设$x_1<x_2$，则$x_1<2<x_2$.
当$x<x_1$时，f'（x）＞0，f（x）在区间（ - ∞，$x_1$）内为增函数；
当$x_1<x<x_2$时，f'（x）＜0，f（x）在区间（$x_1$，$x_2$）内为减函数；
当$x>x_2$时，f'（x）＞0，f（x）在区间（$x_2$，+∞）内为增函数.
所以f（x）在$x=x_1$处取极大值，在$x=x_2$处取极小值.
因此，当且仅当c＜12时，函数f（x）在$x=x_2$处存在唯一极小值，所以$t=x_2>2$.
于是g（t）的定义域为（2，+∞）.

由$f'(t)=3t^2-12t+c=0$得$c=-3t^2+12t$.
于是$g(t)=f(t)=t^3-6t^2+ct=-2t^3+6t^2$，$t\in(2,+\infty)$.
当$t>2$时，$g'(t)=-6t^2+12t=6t(2-t)<0$
所以函数$g(t)$在区间$(2,+\infty)$内是减函数，
故$g(t)$的值域为$(-\infty,8)$
【点评】考查学生利用导数求函数函数的单调性及确定函数极值存在位置的能力，以及利用导数求函数最值的能力．利用导数研究函数的单调性是函数的一个极其重要的应用，它大大简化了证明单调性的方法．

20．（13分）（2009•湖南）已知椭圆C的中心在原点，焦点在x轴上，以两个焦点和短轴的两个端点为顶点的四边形是一个面积为8的正方形（记为Q）
（1）求椭圆C的方程；
（2）设点P是椭圆C的左准线与x轴的交点，过点P的直线l与椭圆C相交于M、N两点，当线段MN的中点落在正方形Q内（包括边界）时，求直线l的斜率的取值范围．
【考点】直线与圆锥曲线的关系；椭圆的标准方程．
【专题】圆锥曲线中的最值与范围问题．
【分析】（1）设椭圆C的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$．由于以两个焦点和短轴的两个端点为顶点的四边形是一个面积为8的正方形，可得$b=c$，$(\sqrt{2}b)^2=8$，$a^2=b^2+c^2$即可得出．
（2）椭圆C的左准线方程为：$x=-4$．设直线l的方程为$y=k(x+4)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，线段MN的中点$G(x_0,y_0)$．与椭圆的方程联立化为$(1+2k^2)x^2+16k^2x+32k^2-8=0$，由△>0，解得$-\frac{\sqrt{2}}{2}<k<\frac{\sqrt{2}}{2}$．利用根与系数的关系与中点坐标公式可得$y_0$，$x_0\le 0$，可得点G不可能在y轴的右边．直线$F_1B_2$，$F_1B_1$的方程分别为$y=x+2$，$y=-x-2$，点G落在正方形Q内（包括边界）的充要条件是$\begin{cases}y_0\leqslant x_0+2\\ y_0\geqslant -x_0-2\end{cases}$，解出即可．
【解答】解：（1）设椭圆C的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$．
∵以两个焦点和短轴的两个端点为顶点的四边形是一个面积为8的
正方形，
∴$b=c$，$(\sqrt{2}b)^2=8$，
∴$b=c=2$，$a^2=b^2+c^2=8$．
∴$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$．
（2）椭圆C的左准线方程为：$x=-4$．∴$P(-4,0)$，设直线l的方程为
$y=k(x+4)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，线段MN的中点$G(x_0,y_0)$．

由$\begin{cases}y=k(x+4)\\x^2+2y^2=8\end{cases}$化为$(1+2k^2)x^2+16k^2x+32k^2-8=0$，①

由$\triangle=256k^4-4(1+32k^2)(32k^2-8)>0$，解得$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<k<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. ②.

$\therefore x_1+x_2=\dfrac{-16k^2}{1+2k^2}$.

$\therefore x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{8k^2}{1+2k^2}$，$y_0=k(x_0+4)=\dfrac{4k}{1+2k^2}$.

$\because x_0\le 0$，∴点G不可能在y轴的右边.

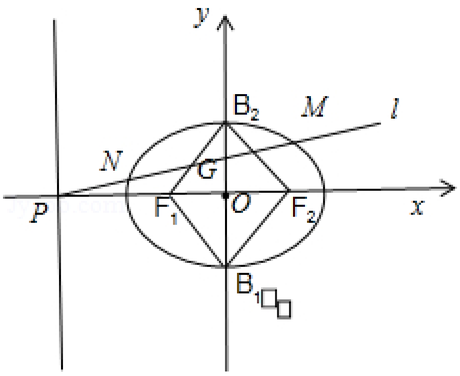
又直线$F_1B_2$，$F_1B_1$的方程分别为$y=x+2$，$y=-x-2$，

∴点G落在正方形Q内（包括边界）的充要条件是$\begin{cases}y_0\leqslant x_0+2\\y_0\geqslant -x_0-2\end{cases}$，

即$\begin{cases}\dfrac{4k}{1+2k^2}\leqslant -\dfrac{8k^2}{1+2k^2}+2\\\dfrac{4k}{1+2k^2}\geqslant\dfrac{8k}{1+2k^2}-2\end{cases}$化为$\begin{cases}2k^2+2k-1\leqslant 0\\2k^2-2k-1\leqslant 0\end{cases}$，

解得$-\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\leqslant k\leqslant\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$，满足②.

因此直线l的斜率的取值范围是$[-\dfrac{\sqrt{3}-1}{2},\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}]$.




【点评】本题考查了椭圆的标准方程及其性质、正方形的性质、直线与椭圆相交问题转化为方程联立可得根与系数的关系、中点坐标公式，考查了推理能力与计算能力，考查了数形结合的思想方法，属于难题.

21．（13分）（2009•湖南）对于数列$\{u_n\}$若存在常数M>0，对任意的$n\in N^+$，恒有$|u_{n+1}-u_n|+|u_n-u_{n1}|+\ldots+|u_2-u_1|\le M$则称数列$u_n$为$B^-$数列

（1）首项为1，公比为$-\dfrac{1}{2}$的等比数列是否为B－数列？请说明理由；

（2）设$s_n$是数列$\{x_n\}$的前n项和，给出下列两组判断：

A组：①数列$\{x_n\}$是B－数列.　　②数列$\{x_n\}$不是B－数列.

B组 ③数列$\{s_n\}$是B - 数列． ④数列$\{s_n\}$不是B - 数列

请以其中一组的一个论断条件，另一组中的一个论断为结论组成一个命题判断所给命题的真假，并证明你的结论；

（3）若数列$\{a_n\}$是B - 数列，证明：数列$\{a_n^2\}$也是B - 数列．

【考点】数列的应用．

【专题】综合题；压轴题；新定义；探究型．

【分析】（1）根据B - 数列的定义，首项为1，公比为$q=\frac{1}{2}$的等比数列，验证$|u_{n+1}-u_n|+|u_n-u_{n-1}|+\ldots+|u_2-u_1|\le M$即可；

（2）首项写出两个命题，根据B - 数列的定义加以证明，如果要说明一个命题不正确，则只需举一反例即可；

（3）数列$\{a_n\}$都是B - 数列，则有$|a_{n+1}-a_n|+|a_n-a_{n-1}|+\ldots+|a_2-a_1|\le M_1$下面只需验证$|a_{n+1}^2-a_n^2|+|a_n^2-a_{n-1}^2|+\ldots+|a_2^2-a_1^2|\le M$．

【解答】解：（1）设满足题设的等比数列为$a_n$，

则$a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$．

于是$|a_n-a_{n-1}|=\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right|=\frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ $n\ge2$

$|a_{n+1}-a_n|+|a_n-a_{n-1}|+\ldots+|a_2-a_1|$

$=\frac{3}{2}\times\left[1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$

$=3\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]<3$，所以首项为1，公比为$-\frac{1}{2}$的等比数列是B - 数列．

（2）命题1：若数列$x_n$是B - 数列，

则数列$S_n$是B - 数列．此命题为假命题．

事实上设$x_n=1$（$n\in N^*$），易知数列$x_n$是B - 数列，但$S_n=n$，

$|S_{n+1}-S_n|+|S_n-S_{n-1}|+\ldots+|S_2-S_1|=n$．

由n的任意性知，数列$S_n$不是B - 数列．

命题2：若数列$S_n$是B - 数列，

则数列$x_n$不是B - 数列．此命题为真命题．

事实上，因为数列$S_n$是B - 数列，

所以存在正数M，对任意的$n\in N^*$，

有$|S_{n+1}-S_n|+|S_n-S_{n-1}|+\ldots+|S_2-S_1|\le M$，

即$|x_{n+1}|+|x_n|+\ldots+|x_2|\le M$．

于是$|x_{n+1}-x_n|+|x_n-x_{n-1}|+\ldots+|x_2-x_1|\le|x_{n+1}|+2|x_n|+2|x_{n-1}|+\ldots+2|x_2|+|x_1|\le 2M+|x_1|$，

所以数列$x_n$是B - 数列．

（3）若数列是$\{a_n\}$B - 数列，则存在正数M，对任意的$n\in N^*$有

$|a_{n+1}-a_n|+|a_n-a_{n-1}|+\ldots+|a_2-a_1|\le M$

因为$|a_n|=|a_n-a_{n-1}+a_{n-1}+a_{n-2}+\ldots+a_2-a_1+a_1|\le|a_n-a_{n-1}|+|a_{n-1}-a_{n-2}|+\ldots+|a_2-a_1|+|a_1|\le M+|a_1|$

记$K=M+|a_1|$，则有$|a_{n+1}^2-a_n^2|=|(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n)$

$\le(|a_{n+1}|+|a_n|)|a_{n+1}-a_n|\le 2K|a_{n+1}-a_n|$

因此$|a_{n+1}^2-a_n^2|+|a_n^2-a_{n-1}^2|+\ldots+|a_2^2-a_1^2|\le 2KM$

故数列$\{a_n^2\}$是B - 数列．

【点评】考查学生理解数列概念，灵活运用数列表示法的能力，旨在考查学生的观察分析和归纳能力，特别是问题（2）（3）的设置，增加了题目的难度，同时也考查了等差数列的定义和分类讨论的思想，属难题．