

2005 年天津高考文科数学真题及答案

本试卷分第 I 卷（选择题）和（非选择题）两部分，共 150 分，考试用时 120 分钟。第 I 卷 1 至 2 页，第 II 卷 3 至 10 页。考试结束后，将考试卷和答题卡一并收回。

第 I 卷（选择题，共 50 分）

注意事项：

1. 答第 I 卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、科目添涂在答题卡上，并在规定位置粘贴考试用条形码。

2. 每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。答在试卷上无效。

参考公式：

如果事件 A、B 互斥，那么

球的表面积公式

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

$$S = 4\pi R^2$$

如果事件 A、B 相互独立，那么

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

其中 R 表示球的半径。

如果事件 A 在一次试验中发生的概率

球的体积公式

是 P，那么 n 次独立重复试验中恰好发生 k 次的概率

$$V_{\text{球}} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

其中 R 表示球的半径

$$P_n(k) = C_n^k P^k (1-P)^{n-k}$$

一、选择题 本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 集合 $A = \{x \mid 0 \leq x < 3, \text{ 且 } x \in \mathbb{N}\}$ 的真子集的个数是 ()

- A. 16 B. 8 C. 7 D. 4

2. 已知 $\log_{\frac{1}{2}} b < \log_{\frac{1}{2}} a < \log_{\frac{1}{2}} c$ ，则 ()

- A. $2b > 2a > 2c$ B. $2a > 2b > 2c$ C. $2c > 2b > 2a$ D. $2c > 2a > 2b$

3. 某人射击一次击中目标的概率为 0.6，经过 3 次射击，此人恰有两次击中目标的概率为

- A. $\frac{81}{125}$ B. $\frac{54}{125}$ C. $\frac{36}{125}$ D. $\frac{27}{125}$

4. 将直线 $2x - y + \lambda = 0$ ，沿 x 轴向左平移 1 个单位，所得直线与圆 $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ 相切，则实数 λ 的值为

- A. -3 或 7 B. -2 或 8 C. 0 或 10 D. 1 或 11

5. 设 α 、 β 、 γ 为平面，m、n、l 为直线，则 $m \perp \beta$ 的一个充分条件是

- A. $\alpha \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = l$, $m \perp l$ B. $\alpha \cap \gamma = m$, $\alpha \perp \gamma$, $\beta \perp \gamma$
C. $\alpha \perp \gamma$, $\beta \perp \gamma$, $m \perp \alpha$ D. $n \perp \alpha$, $n \perp \beta$, $m \perp \alpha$

6. 设双曲线以椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 长轴的两个端点为焦点，其准线过椭圆的焦点，则双曲线

的渐近线的斜率为 ()

- A. ± 2 B. $\pm \frac{4}{3}$ C. $\pm \frac{1}{2}$ D. $\pm \frac{3}{4}$

7. 给出下列三个命题: ()

①若 $a \geq b > -1$, 则 $\frac{a}{1+a} \geq \frac{b}{1+b}$.

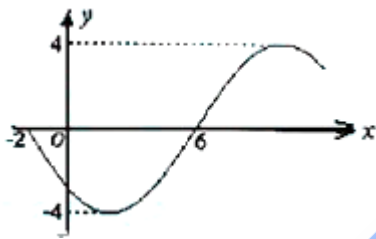
②若正整数 m 和 n 满足 $m \leq n$, 则 $\sqrt{m(n-m)} \leq \frac{n}{2}$.

③设 $P(x_1, y_1)$ 为圆 $O_1: x^2 + y^2 = 9$ 上任一点, 圆 O_2 以 $Q(a, b)$ 为圆心, 且半径为 1, 当 $(a-x_1)^2 + (b-y_1)^2 = 1$ 时, 圆 O_1 和圆 O_2 相切.

其中假命题的个数为 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

8. 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}, x \in \mathbb{R}$) 的部分图象如图所示, 则函数表达式为



A. $y = -4 \sin\left(\frac{\pi}{8}x + \frac{\pi}{4}\right)$

B. $y = 4 \sin\left(\frac{\pi}{8}x - \frac{\pi}{4}\right)$

C. $y = -4 \sin\left(\frac{\pi}{8}x - \frac{\pi}{4}\right)$

D. $y = 4 \sin\left(\frac{\pi}{8}x + \frac{\pi}{4}\right)$

9. 若函数 $f(x) = \log_a(2x^2 + x)$ ($a > 0, a \neq 1$) 在区间 $(0, \frac{1}{2})$ 内恒有 $f(x) > 0$, 则 $f(x)$ 的单调递增区间为 ()

A. $(-\infty, -\frac{1}{4})$

B. $(-\frac{1}{4}, +\infty)$

- C. $(0, +\infty)$ D. $(-\infty, -\frac{1}{2})$

10. 设 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上以 6 为周期的函数, $f(x)$ 在 $(0, 3)$ 内单调递减, 且 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=3$ 对称, 则下面正确的结论是 ()
- A. $f(1.5) < f(3.5) < f(6.5)$ B. $f(3.5) < f(1.5) < f(6.5)$
 C. $f(6.5) < f(3.5) < f(1.5)$ D. $f(3.5) < f(6.5) < f(1.5)$

第 II 卷 (非选择题 共 100 分)

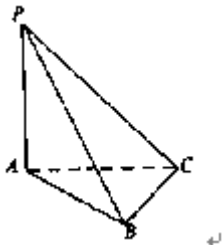
注意事项:

- 答卷前将密封线内的项目填写清楚.
 - 用钢笔或圆珠笔直接答在试卷上.
- 二、填空题: 本大题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 把答案填在题中横线上.

11. 二项式 $(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^{10}$ 的展开式中常数项为_____ (用数字作答).

12. 已知 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=4$, \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 以 \vec{a}, \vec{b} 为邻边作平行四边形, 则此平行四边形的两条对角线中较短的一条的长度为_____.

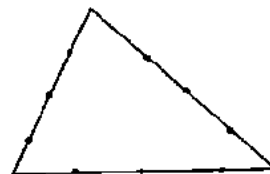
13. 如图, $PA \perp$ 平面 ABC , $\angle ACB=90^\circ$ 且 $PA=AC=BC=a$. 则异面直线 PB 与 AC 所成角的正切值等于_____.



14. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, $a_2=2$, 且 $a_{n+2} - a_n = 1 + (-1)^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 则 $S_{10} =$ _____.

15. 设函数 $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$, 则函数 $g(x) = f(\frac{x}{2}) + f(\frac{1}{x})$ 的定义域为_____.

16. 在三角形的每条边上各取三个分点 (如图). 以这 9 个分点为顶点可画出若干个三角形. 若从中任意抽取一个三角形, 则其三个顶点分别落在原三角形的三条不同边上的概率为_____ (用数字作答).



- 三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 76 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.
17. (本小题满分 12 分)

已知 $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{7\sqrt{2}}{10}$, $\cos 2\alpha = \frac{7}{25}$, 求 $\sin \alpha$ 及 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$.

18. (本小题满分 12 分)

若公比为 c 的等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1$ 且满足

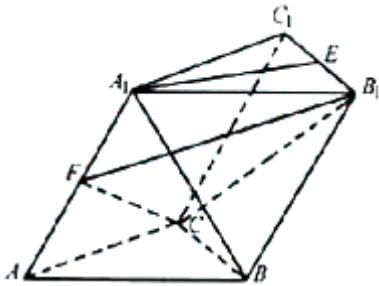
$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2} \quad (n = 3, 4, \dots).$$

- (I) 求 c 的值.
- (II) 求数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

19. (本小题满分 12 分)

如图, 在斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle A_1AB = \angle A_1AC$, $AB=AC$, $A_1A=A_1B=a$, 侧面 B_1BCC_1 与底面 ABC 所成的二面角为 120° , E 、 F 分别是棱 B_1C_1 、 A_1A 的中点.

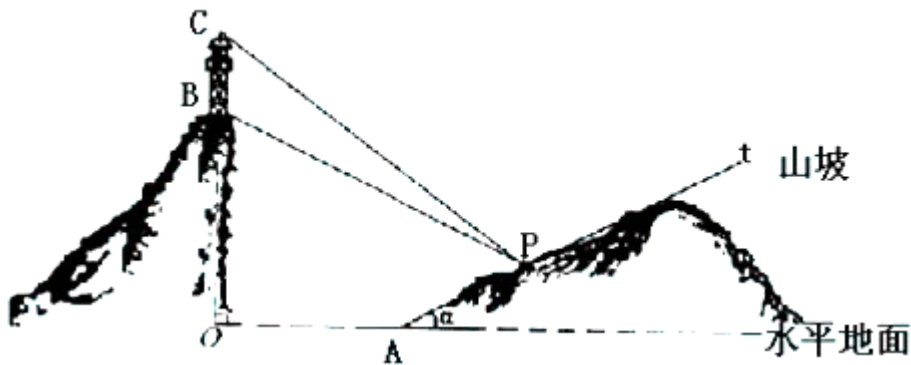
- (I) 求 A_1A 与底面 ABC 所成的角;
- (II) 证明 $A_1E \parallel$ 平面 B_1FC ;
- (III) 求经过 A_1 、 A 、 B 、 C 四点的球的体积.



20. (本小题满分 12 分)

某人在一山坡 P 处观看对面山崖顶上的一座铁塔. 如图所示, 塔及所在的山崖可视为图中的竖直线 OC , 塔高 $BC=80$ (米), 山高 $OB=220$ (米), $OA=200$ (米), 图中所示的山坡可视为

为直线 l 且点 P 在直线 l 上, l 与水平地面的夹角为 α , $\tan \alpha = \frac{1}{2}$. 试问, 此人距山崖的水平距离多远时, 观看塔的视角 $\angle BPC$ 最大 (不计此人的身高)?



21. (本小题满分 14 分)

已知 $m \in \mathbb{R}$, 设

P: x_1 和 x_2 是方程 $x^2 - ax - 2 = 0$ 的两个实根, 不等式 $|m^2 - 5m - 3| \geq |x_1 - x_2|$ 的任意实数 $a \in [-1, 1]$ 恒成立;

Q: 函数 $f(x) = x^3 + mx^2 + (m + \frac{4}{3})x + 6$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有极值.

求使 P 正确且 Q 正确的 m 的取值范围.

22. (本小题满分 14 分)

抛物线 C 的方程为 $y = ax^2$ ($a < 0$), 过抛物线 C 上一点 $P(x_0, y_0)$ ($x_0 \neq 0$) 作斜率为 k_1, k_2 的两条直线分别交抛物线 C 于 A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) 两点 (P、A、B 三点互不相同) 且满足 $k_2 + \lambda k_1 = 0$ ($\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq -1$).

(I) 求抛物线 C 的焦点坐标和准线方程;

(II) 设直线 AB 上一点 M, 满足 $\overrightarrow{BM} = \lambda \overrightarrow{MA}$, 证明线段 PM 的中点在 y 轴上;

(III) 当 $\lambda = 1$ 时, 若点 P 的坐标为 $(1, -1)$, 求 $\angle PAB$ 为钝角时点 A 的纵坐标 y_1 的取值范围.

参考答案

说明:

一、本解答指出了每题要考查的主要知识和能力, 并给出了一种或几种解法供参考, 如果考生的解法与本解答不同, 可根据试题的主要考查内容比照评分标准制订相应的评分细则.

二、对计算题, 当考生的解答在某一步出现错误时, 如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度, 可视影响的程度决定后继部分的给分, 但不得超过该部分正确解答应得分数的一半; 如果后继部分的解答有较严重的错误, 就不再给分.

三、解答右端所注分数, 表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

四、只给整数分数, 选择题和填空题不给中间分.

一、选择题: 本题考查基本知识和基本运算. 每小题 5 分, 满分 50 分.

1. C 2. A 3. B 4. A 5. D 6. C 7. B 8. A 9. D 10. B

二、填空题：本题考查基本知识和基本运算. 每小题 4 分, 满分 24 分.

11. 210 12. $2\sqrt{3}$ 13. $\sqrt{2}$ 14. 35 15. $(-2,-1) \cup (1,2)$ 16. $\frac{1}{3}$

三、解答题

17. 本小题考查两角和差的三角公式、倍角公式等基础知识, 考查基本运算能力. 满分 12 分.

解法一: 由题设条件, 应用两角差的正弦公式得

$$\frac{7\sqrt{2}}{10} = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin \alpha - \cos \alpha)$$

$$\text{即 } \sin \alpha - \cos \alpha = \frac{7}{5}. \quad \textcircled{1}$$

由题设条件, 应用二倍角余弦公式得

$$\begin{aligned} \frac{7}{25} &= \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ &= (\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha) \\ &= -\frac{7}{5}(\cos \alpha + \sin \alpha), \end{aligned}$$

$$\text{故 } \cos \alpha + \sin \alpha = -\frac{1}{5}. \quad \textcircled{2}$$

$$\text{由 } \textcircled{1} \text{ 式和 } \textcircled{2} \text{ 式得 } \sin \alpha = \frac{3}{5}, \cos \alpha = -\frac{4}{5}.$$

$$\text{因此, } \tan \alpha = -\frac{3}{4}. \quad \text{由两角和的正切公式}$$

$$\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\tan \alpha + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3} \tan \alpha} = \frac{\sqrt{3} - \frac{3}{4}}{1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}} = \frac{4\sqrt{3} - 3}{4 + 3\sqrt{3}} = \frac{48 - 25\sqrt{3}}{11}.$$

$$\text{解法二: 由题设条件, 应用二倍角余弦公式得 } \frac{7}{25} = \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha,$$

$$\text{解得 } \sin^2 \alpha = \frac{9}{25}, \text{ 即 } \sin \alpha = \pm \frac{3}{5}. \quad \text{由 } \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{7\sqrt{2}}{10} \text{ 可得 } \sin \alpha - \cos \alpha = \frac{7}{5}.$$

$$\text{由于 } \sin \alpha = \frac{7}{5} + \cos \alpha > 0, \text{ 且 } \cos \alpha = \sin \alpha - \frac{7}{5} < 0, \text{ 故 } \alpha \text{ 在第二象限, 于是 } \sin \alpha = \frac{3}{5}.$$

从而 $\cos \alpha = \sin \alpha - \frac{7}{5} = -\frac{4}{5}$. 以下同解法一.

18. 本小题主要考查数列的概念、等差数列、等比数列以及求数列前 n 项和的方法等基础知识, 考查运算能力, 满分 12 分.

(I) 解: 由题设, 当 $n \geq 3$ 时,

$$a_n = c^2 a_{n-2}, \quad a_{n-1} = ca_{n-2} \quad a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2} = \frac{1+c}{2} a_{n-2}.$$

由题设条件可得 $a_{n-2} \neq 0$, 因此 $c^2 = \frac{1+c}{2}$, 即 $2c^2 - c - 1 = 0$.

解得 $c = 1$ 或 $c = -\frac{1}{2}$.

(II) 解: 由 (I), 需要分两种情况讨论. 当 $c = 1$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 是一个常数列, 即

$$a_n = 1 (n \in N^*). \quad \text{这时, 数列 } \{na_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和 } S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

当 $c = -\frac{1}{2}$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 是一个公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列, 即 $a_n = (-\frac{1}{2})^{n-1} (n \in N^*)$.

$$\text{这时, 数列 } \{na_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和 } S_n = 1 + 2(-\frac{1}{2}) + 3(-\frac{1}{2})^2 + \cdots + n(-\frac{1}{2})^{n-1}. \quad \textcircled{1}$$

①式两边同乘 $-\frac{1}{2}$, 得

$$-\frac{1}{2} S_n = -\frac{1}{2} + 2(-\frac{1}{2})^2 + \cdots + (n-1)(-\frac{1}{2})^{n-1} + n(-\frac{1}{2})^n. \quad \textcircled{2}$$

①式减去②式, 得

$$\begin{aligned} (1 + \frac{1}{2}) S_n &= 1 + (-\frac{1}{2}) + (-\frac{1}{2})^2 + \cdots + (-\frac{1}{2})^{n-1} - n(-\frac{1}{2})^n \\ &= \frac{1 - (-\frac{1}{2})^n}{1 + \frac{1}{2}} - n(-\frac{1}{2})^n. \end{aligned}$$

$$\text{所以 } S_n = \frac{1}{9} [4 - (-1)^n \frac{3n+2}{2^{n-1}}] (n \in N^*).$$

19. 本小题主要考查棱柱、球、二面角、线面关系等基础知识，考查空间想象能力和推理论证能力. 满分 12 分.

(I) 解: 过 A_1 作 $A_1H \perp$ 平面 ABC , 垂足为 H .

连结 AH , 并延长交 BC 于 G , 连结 EG , 于是 $\angle A_1AH$ 为 A_1A 与底面 ABC 所成的角.

$\because \angle A_1AB = \angle A_1AC, \therefore AG$ 为 $\angle BAC$ 的平分线.

又 $\because AB = AC, \therefore AG \perp BC$, 且 G 为 BC 的中点

因此, 由三垂线定理, $A_1A \perp BC$.

$\because A_1A // B_1B$, 且 $EG // B_1B, EG \perp BC$ 于是 $\angle AGE$ 为二面角 $A-BC-E$ 的平面角, 即 $\angle AGE = 120^\circ$

由于四边形 A_1AGE 为平行四边形, 得 $\angle A_1AG = 60^\circ$,

所以, A_1A 与底面 ABC 所成的角为 60° ,

(II) 证明: 设 EG 与 B_1C 的交点为 P , 则点 P 为 EG 的中点, 连结 PF .

在平行四边形 $AGEA_1$ 中, 因 F 为 A_1A 的中点, 故 $A_1E // FP$.

而 $FP \subset$ 平面 $B_1FC, A_1E \not\subset$ 平面 B_1FC , 所以 $A_1E //$ 平面 B_1FC .

(III) 解: 连结 A_1C , 在 $\triangle A_1AC$ 和 $\triangle A_1AB$ 中, 由于 $AC = AB, \angle A_1AC = \angle A_1AB, A_1A = A_1A$, 则 $\triangle A_1AC \cong \triangle A_1AB$, 故 $A_1C = A_1B$, 由已知得 $A_1A = A_1B = A_1C = a$.

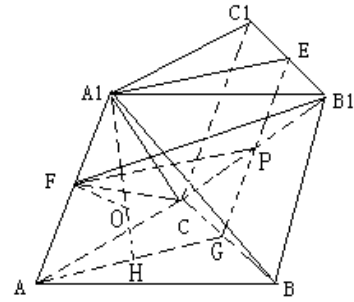
又 $\because A_1H \perp$ 平面 $ABC, \therefore H$ 为 $\triangle ABC$ 的外心.

设所求球的球心为 O , 则 $O \in A_1H$, 且球心 O 与 A_1A 中点的连线 $OF \perp A_1A$.

$$A_1O = \frac{A_1F}{\cos \angle AA_1H} = \frac{\frac{1}{2}a}{\cos 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}a}{3}.$$

在 $Rt\triangle A_1FO$ 中,

$$\text{故所求球的半径 } R = \frac{\sqrt{3}}{3}a, \quad \text{球的体积 } V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^3 = \frac{4\sqrt{3}}{27}\pi a^3.$$



20. 本小题考查根据实际问题建立函数关系并应用解析几何和代数的方法解决实际问题的能力, 满分 12 分.

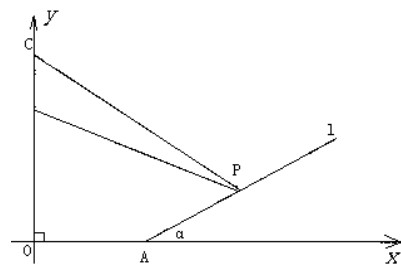
解: 如图所示, 建立平面直角坐标系, 则 $A(200, 0), B(0, 220), C(0, 300)$,

直线 l 的方程为 $y = (x - 200) \tan \alpha$, 即

$$y = \frac{x - 200}{2}.$$

设此人距山崖的水平距离为 x ,

$$\text{则 } P\left(x, \frac{x - 200}{2}\right) (x > 200).$$



$$\text{由经过两点的直线的斜率公式 } k_{PC} = \frac{\frac{x - 200}{2} - 300}{x} = \frac{x - 800}{2x},$$

$$k_{PB} = \frac{\frac{x-200}{2} - 220}{x} = \frac{x-640}{2x}.$$

由直线 PC 到直线 PB 的角的公式得

$$\begin{aligned} \tan BPC &= \frac{k_{PB} - k_{PC}}{1 - k_{PB} \cdot k_{PC}} = \frac{\frac{160}{2x}}{1 + \frac{x-800}{2x} \cdot \frac{x-640}{2x}} = \frac{64x}{x^2 - 288x + 160 \times 640} \\ &= \frac{64}{x + \frac{160 \times 640}{x} - 288} \quad (x > 200). \end{aligned}$$

要使 $\tan BPC$ 达到最大, 只须 $x + \frac{160 \times 640}{x} - 288$ 达到最小, 由均值不等式

$$x + \frac{160 \times 640}{x} - 288 \geq 2\sqrt{160 \times 640} - 288,$$

当且仅当 $x = \frac{160 \times 640}{x}$ 时上式取得等号, 故当 $x=320$ 时 $\tan BPC$ 最大.

由此实际问题知, $0 < \angle BPC < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\tan BPC$ 最大时, $\angle BPC$ 最大, 故当此人距山崖水平距离 320 米高时, 观看铁塔的视角 $\angle BPC$ 最大.

21. 本小题主要考查集合的运算、绝对值不等式、应用导数研究函数的单调性及极值等基础知识, 考查综合分析和解决问题的能力, 满分 14 分.

解: (1) 由题设 x_1 和 x_2 是方程 $x^2 - ax - 2 = 0$ 的两个实根, 得 $x_1 + x_2 = a$ 且 $x_1 x_2 = -2$,

$$\text{所以, } |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{a^2 + 8}.$$

当 $a \in [-1, 1]$ 时, $a^2 + 8$ 的最大值为 9, 即 $|x_1 - x_2| \leq 3$.

由题意, 不等式 $|m^2 - 5m - 3| \geq |x_1 - x_2|$ 对任意实 $a \in [-1, 1]$ 恒成立的 m 的解集等于不等式 $|m^2 - 5m - 3| \geq 3$ 的解集, 由此不等式得 $m^2 - 5m - 3 \leq -3$, ①或

$$m^2 - 5m - 3 \geq 3. \text{ ②}$$

不等式①的解为 $0 \leq m \leq 5$.

不等式②的解为 $m \leq -1$ 或 $m \geq 6$.

因此, 当 $m \leq -1$ 或 $0 \leq m \leq 5$ 或 $m \geq 6$ 时, P 是正确的.

(2) 对函数 $f(x) = x^3 + mx^2 + (m + \frac{4}{3})x + 6$ 求导 $f'(x) = 3x^2 + 2mx + m + \frac{4}{3}$.

令 $f'(x) = 0$, 即 $3x^2 + 2mx + m + \frac{4}{3} = 0$. 此一元二次方程的判别式 $\Delta = 4m^2 - 12(m + \frac{4}{3}) = 4m^2 - 12m + 16$, 若 $\Delta = 0$, 则 $f'(x) = 0$ 有两个相等的实根 x_0 , 且 $f'(x)$ 的符号如下:

x	$(-\infty, x_0)$	x_0	$(x_0, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	+

因此, $f(x_0)$ 不是函数 $f(x)$ 的极值.

若 $\Delta > 0$, 则 $f'(x) = 0$ 有两个不相等的实根 x_1 和 x_2 ($x_1 < x_2$), 且 $f'(x)$ 的符号如下:

x	$(-\infty, x_1)$	x_1	(x_1, x_2)	x_2	$(x_2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+

因此, 函数 $f(x)$ 在 $x = x_1$ 处取得极大值, 在 $x = x_2$ 处取得极小值.

综上所述, 当且仅当 $\Delta > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有极值.

由 $\Delta = 4m^2 - 12m - 16 > 0$ 得 $m < -1$ 或 $m > 4$,

因此, 当 $m < -1$ 或 $m > 4$ 时, Q 是正确的.

综上, 使 P 正确且 Q 正确时, 实数 m 的取值范围为

$$(-\infty, -1) \cup (4, 5] \cup [6, +\infty).$$

22. 本小题主要考查抛物线的几何性质、直线方程、平面向量、直线与曲线相交、两条直线的夹角等解析几何的基础知识、基本思想方法和综合解题能力. 满分 14 分.

(I) 解: 由抛物线 C 的方程 $y = ax^2$ ($a < 0$) 得, 焦点坐标为 $(0, \frac{1}{4a})$, 准线方程为 $y = -\frac{1}{4a}$.

(II) 证明: 设直线 PA 的方程为 $y - y_0 = k_1(x - x_0)$, 直线 PB 的方程为

$y - y_0 = k_2(x - x_0)$. 点 $P(x_0, y_0)$ 和点 $A(x_1, y_1)$ 的坐标是方程组

$$\begin{cases} y - y_0 = k_1(x - x_0) & \textcircled{1} \\ y = ax^2 & \textcircled{2} \end{cases}$$

的解, 将②式代入①式得 $ax^2 - k_1x + k_1x_0 - y_0 = 0$, 于是 $x_1 + x_0 = \frac{k_1}{a}$, 故 $x_1 = \frac{k_1}{a} - x_0$. ③

又点 $P(x_0, y_0)$ 和点 $B(x_2, y_2)$ 的坐标是方程组

$$\begin{cases} y - y_0 = k_2(x - x_0) & \text{④} \\ y = ax^2 & \text{⑤} \end{cases}$$

的解, 将⑤式代入④式得 $ax^2 - k_2x + k_2x_0 - y_0 = 0$, 于是 $x_2 + x_0 = \frac{k_2}{a}$, 故 $x_2 = \frac{k_2}{a} - x_0$.

由已知得, $k_2 = -\lambda k_1$, 则 $x_2 = -\frac{\lambda}{a}k_1 - x_0$. ⑥

设点 M 的坐标为 (x_M, y_M) , 由 $\overrightarrow{BM} = \lambda \overrightarrow{MA}$, 则 $x_M = \frac{x_2 + \lambda x_1}{1 + \lambda}$.

将③式和⑥式代入上式得 $x_M = \frac{-x_0 - \lambda x_0}{1 + \lambda} = -x_0$,

即 $x_M + x_0 = 0$. 所以, 线段 PM 的中点在 y 轴上.

(III) 解: 因为点 $P(1, -1)$ 在抛物线 $y = ax^2$ 上, 所以 $a = -1$, 抛物线方程为 $y = -x^2$.

由③式知 $x_1 = -k_1 - 1$, 代入 $y = -x^2$ 得 $y_1 = -(k_1 + 1)^2$.

将 $\lambda = 1$ 代入⑥式得 $x_2 = k_1 - 1$, 代入 $y = -x^2$ 得 $y_2 = -(k_1 - 1)^2$.

因此, 直线 PA 、 PB 分别与抛物线 C 的交点 A 、 B 的坐标为

$A(-k_1 - 1, -k_1^2 - 2k_1 - 1)$, $B(k_1 - 1, -k_1^2 + 2k_1 - 1)$ 于是

$$\overrightarrow{AP} = (k_1 + 2, k_1^2 + 2k_1),$$

$$\overrightarrow{AB} = (2k_1, 4k_1),$$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = 2k_1(k_1 + 2) + 4k_1(k_1^2 + 2k_1)$$

$$= 2k_1(k_1 + 2)(2k_1 + 1)$$

因 $\angle PAB$ 为钝角且 P 、 A 、 B 三点互不相同, 故必有 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} < 0$, 即

$$k_1(k_1 + 2)(2k_1 + 1) < 0.$$

求得 k_1 的取值范围为

$$k_1 < -2 \text{ 或 } -\frac{1}{2} < k_1 < 0.$$

又点 A 的纵坐标 y_1 满足 $y_1 = -(k_1 + 1)^2$, 故

当 $k_1 < -2$ 时, $y_1 < -1$;

当 $-\frac{1}{2} < k_1 < 0$ 时, $-1 < y_1 < -\frac{1}{4}$.

所以, $\angle PAB$ 为钝角时点 A 的纵坐标 y_1 的取值范围为

$$(-\infty, -1) \cup (-1, -\frac{1}{4}).$$