

2008年普通高等学校招生全国统一考试（陕西卷）

理科数学（必修+选修II）

一、选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的（本大题共12小题，每小题5分，共60分）。

1. 复数 $\frac{i(2+i)}{1-2i}$ 等于（ ）

- A. i B. $-i$ C. 1 D. -1

2. 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，集合 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$ ， $B = \{x | x = 2a, a \in A\}$ ，则集合 $\complement_U(A \cup B)$ 中元素的个数为（ ）

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

3. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，若 $c = \sqrt{2}$ ， $b = \sqrt{6}$ ， $B = 120^\circ$ ，则 a 等于（ ）

- A. $\sqrt{6}$ B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{2}$

4. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列， $a_1 + a_2 = 4$ ， $a_7 + a_8 = 28$ ，则该数列前10项和 S_{10} 等于（ ）

- A. 64 B. 100 C. 110 D. 120

5. 直线 $\sqrt{3}x - y + m = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 - 2x - 2 = 0$ 相切，则实数 m 等于（ ）

- A. $\sqrt{3}$ 或 $-\sqrt{3}$ B. $-\sqrt{3}$ 或 $3\sqrt{3}$ C. $-3\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{3}$ D. $-3\sqrt{3}$ 或 $3\sqrt{3}$

6. “ $a = \frac{1}{8}$ ” 是 “对任意的正数 x ， $2x + \frac{a}{x} \geq 1$ ” 的（ ）

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

7. 已知函数 $f(x) = 2^{x+3}$ ， $f^{-1}(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数，若 $mn = 16$ ($m, n \in \mathbf{R}^+$)，则 $f^{-1}(m) + f^{-1}(n)$ 的值为（ ）

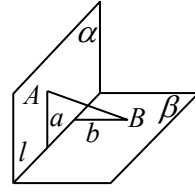
- A. -2 B. 1 C. 4 D. 10

8. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点分别是 F_1, F_2 ，过 F_1 作倾斜角为 30° 的直线交双曲线右支于 M 点，若 MF_2 垂直于 x 轴，则双曲线的离心率为（ ）

- A. $\sqrt{6}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

9. 如图， $\alpha \perp \beta$ ， $\alpha \cap \beta = l$ ， $A \in \alpha$ ， $B \in \beta$ ， A, B 到 l 的距离分别是 a 和 b ， AB 与 α, β 所成的角分别是 θ 和 φ ， AB 在 α, β 内的射影分别是 m 和 n ，若 $a > b$ ，则（ ）

- A. $\theta > \varphi, m > n$ B. $\theta > \varphi, m < n$
 C. $\theta < \varphi, m < n$ D. $\theta < \varphi, m > n$



10. 已知实数 x, y 满足 $\begin{cases} y \geq 1, \\ y \leq 2x - 1, \\ x + y \leq m. \end{cases}$ 如果目标函数 $z = x - y$ 的最小值为 -1 , 则实数 m 等于 ()

- A. 7 B. 5 C. 4 D. 3

11. 定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$ ($x, y \in \mathbf{R}$), $f(1) = 2$, 则 $f(-3)$ 等于 ()

- A. 2 B. 3 C. 6 D. 9

12. 为提高信息在传输中的抗干扰能力, 通常在原信息中按一定规则加入相关数据组成传输信息. 设定原信息为 $a_0 a_1 a_2, a_i \in \{0, 1\}$ ($i = 0, 1, 2$), 传输信息为 $h_0 a_0 a_1 a_2 h_1$, 其中 $h_0 = a_0 \oplus a_1, h_1 = h_0 \oplus a_2$, \oplus 运算规则为: $0 \oplus 0 = 0, 0 \oplus 1 = 1, 1 \oplus 0 = 1, 1 \oplus 1 = 0$, 例如原信息为 111, 则传输信息为 01111. 传输信息在传输过程中受到干扰可能导致接收信息出错, 则下列接收信息一定有误的是 ()

- A. 11010 B. 01100 C. 10111 D. 00011

二、填空题: 把答案填在答题卡相应题号后的横线上 (本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分).

13. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+a)n+1}{n+a} = 2$, 则 $a =$ _____.

14. 长方体 $ABCD - A_1 B_1 C_1 D_1$ 的各顶点都在球 O 的球面上, 其中 $AB : AD : AA_1 = 1 : 1 : \sqrt{2}$. A, B 两点的球面距离记为 m , A, D_1 两点的球面距离记为 n , 则 $\frac{m}{n}$ 的值为 _____.

15. 关于平面向量 a, b, c . 有下列三个命题:

①若 $a \cdot b = a \cdot c$, 则 $b = c$. ②若 $a = (1, k), b = (-2, 6), a \parallel b$, 则 $k = -3$.

③非零向量 a 和 b 满足 $|a| = |b| = |a - b|$, 则 a 与 $a + b$ 的夹角为 60° .

其中真命题的序号为 _____ (写出所有真命题的序号)

16. 某地奥运火炬接力传递路线共分 6 段, 传递活动分别由 6 名火炬手完成. 如果第一棒火炬手只能从甲、乙、丙三人中产生, 最后一棒火炬手只能从甲、乙两人中产生, 则不同的传递方案共有 _____ 种. (用数字作答)

三、解答题: 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤 (本大题共 6 小题, 共 74 分)

17. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = 2 \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} - 2\sqrt{3} \sin^2 \frac{x}{4} + \sqrt{3}$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期及最值;

(II) 令 $g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, 判断函数 $g(x)$ 的奇偶性, 并说明理由.

18. (本小题满分 12 分)

某射击测试规则为：每人最多射击 3 次，击中目标即终止射击，第 i 次击中目标得 $1 \sim i$ ($i = 1, 2, 3$) 分，3 次均未击中目标得 0 分。已知某射手每次击中目标的概率为 0.8，其各次射击结果互不影响。

(I) 求该射手恰好射击两次的概率；

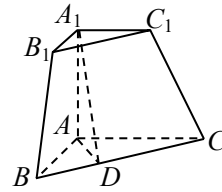
(II) 该射手的得分记为 ξ ，求随机变量 ξ 的分布列及数学期望。

19. (本小题满分 12 分)

三棱锥被平行于底面 ABC 的平面所截得的几何体如图所示，截面为 $A_1B_1C_1$ ， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $A_1A \perp$ 平面 ABC ， $A_1A = \sqrt{3}$ ， $AB = \sqrt{2}$ ， $AC = 2$ ， $A_1C_1 = 1$ ， $\frac{BD}{DC} = \frac{1}{2}$ 。

(I) 证明：平面 $A_1AD \perp$ 平面 BCC_1B_1 ；

(II) 求二面角 $A-CC_1-B$ 的大小。



20. (本小题满分 12 分)

已知抛物线 $C: y = 2x^2$ ，直线 $y = kx + 2$ 交 C 于 A, B 两点， M 是线段 AB 的中点，过 M 作 x 轴的垂线交 C 于点 N 。

(I) 证明：抛物线 C 在点 N 处的切线与 AB 平行；

(II) 是否存在实数 k 使 $\vec{NA} \cdot \vec{NB} = 0$ ，若存在，求 k 的值；若不存在，说明理由。

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{kx+1}{x^2+c}$ ($c > 0$ 且 $c \neq 1$ ， $k \in \mathbf{R}$) 恰有一个极大值点和一个极小值点，其中一个点是 $x = -c$ 。

(I) 求函数 $f(x)$ 的另一个极值点；

(II) 求函数 $f(x)$ 的极大值 M 和极小值 m ，并求 $M - m \geq 1$ 时 k 的取值范围。

22. (本小题满分 14 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = \frac{3}{5}$, $a_{n+1} = \frac{3a_n}{2a_n + 1}$, $n = 1, 2, \dots$.

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 证明: 对任意的 $x > 0$, $a_n \geq \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} \left(\frac{2}{3^n} - x \right)$, $n = 1, 2, \dots$;

(III) 证明: $a_1 + a_2 + \dots + a_n > \frac{n^2}{n+1}$.

2008 年普通高等学校招生全国统一考试 (陕西卷)

理科数学 (必修+选修 II) 参考答案

一、1. D 2. B 3. D 4. B 5. C 6. A 7. A
8. B 9. D 10. B 11. C 12. C

二、13. 1 14. $\frac{1}{2}$ 15. ② 16. 96

三、17. 解: (I) $\because f(x) = \sin \frac{x}{2} + \sqrt{3}(1 - 2\sin^2 \frac{x}{4}) = \sin \frac{x}{2} + \sqrt{3} \cos \frac{x}{2} = 2 \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} \right)$.

$\therefore f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

当 $\sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} \right) = -1$ 时, $f(x)$ 取得最小值 -2 ; 当 $\sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} \right) = 1$ 时, $f(x)$ 取得最大值 2 .

(II) 由 (I) 知 $f(x) = 2 \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} \right)$. 又 $g(x) = f \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$.

$\therefore g(x) = 2 \sin \left[\frac{1}{2} \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\pi}{3} \right] = 2 \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 2 \cos \frac{x}{2}$.

$$\because g(-x) = 2 \cos\left(-\frac{x}{2}\right) = 2 \cos\frac{x}{2} = g(x).$$

\therefore 函数 $g(x)$ 是偶函数.

18. (I) 设该射手第 i 次击中目标的事件为 $A_i (i=1,2,3)$, 则 $P(A_i) = 0.8$, $P(\bar{A}_i) = 0.2$,

$$P(\bar{A}_i A_i) = P(\bar{A}_i)P(A_i) = 0.2 \times 0.8 = 0.16.$$

(II) ξ 可能取的值为 0, 1, 2, 3. ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	0.008	0.032	0.16	0.8

$$E_\xi = 0 \times 0.008 + 1 \times 0.032 + 2 \times 0.16 + 3 \times 0.8 = 2.752.$$

19. 解法一: (I) $\because A_1A \perp$ 平面 ABC , $BC \subset$ 平面 ABC ,

$\therefore A_1A \perp BC$. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AB = \sqrt{2}$, $AC = 2$, $\therefore BC = \sqrt{6}$,

$$\because BD:DC = 1:2, \therefore BD = \frac{\sqrt{6}}{3}, \text{ 又 } \frac{BD}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{AB}{BC},$$

$\therefore \triangle DBA \sim \triangle ABC$, $\therefore \angle ADB = \angle BAC = 90^\circ$, 即 $AD \perp BC$.

又 $A_1A \cap AD = A$, $\therefore BC \perp$ 平面 A_1AD ,

$\because BC \subset$ 平面 BCC_1B_1 , \therefore 平面 $A_1AD \perp$ 平面 BCC_1B_1 .

(II) 如图, 作 $AE \perp C_1C$ 交 C_1C 于 E 点, 连接 BE ,

由已知得 $AB \perp$ 平面 ACC_1A_1 .

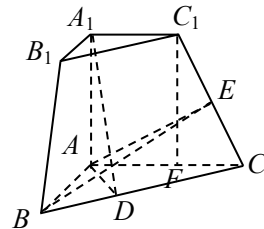
$\therefore AE$ 是 BE 在面 ACC_1A_1 内的射影.

由三垂线定理知 $BE \perp CC_1$,

$\therefore \angle AEB$ 为二面角 $A-CC_1-B$ 的平面角.

过 C_1 作 $C_1F \perp AC$ 交 AC 于 F 点,

则 $CF = AC - AF = 1$, $C_1F = A_1A = \sqrt{3}$,



(第 19 题, 解法一)

$$\therefore \angle C_1CF = 60^\circ.$$

在 $\text{Rt}\triangle AEC$ 中, $AE = AC \sin 60^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$

在 $\text{Rt}\triangle BAE$ 中, $\tan AEB = \frac{AB}{AE} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$

$$\therefore \angle AEB = \arctan \frac{\sqrt{6}}{3},$$

即二面角 $A-CC_1-B$ 为 $\arctan \frac{\sqrt{6}}{3}.$

解法二: (I) 如图, 建立空间直角坐标系,

则 $A(0,0,0), B(\sqrt{2},0,0), C(0,2,0), A_1(0,0,\sqrt{3}), C_1(0,1,\sqrt{3}),$

$$\therefore BD:DC = 1:2, \therefore \overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$$

$$\therefore D \text{ 点坐标为 } \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{2}{3}, 0 \right).$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{2}{3}, 0 \right), \overrightarrow{BC} = (-\sqrt{2}, 2, 0), \overrightarrow{AA_1} = (0, 0, \sqrt{3}).$$

$$\therefore \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AA_1} = 0, \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0, \therefore BC \perp AA_1, BC \perp AD, \text{ 又 } A_1A \cap AD = A,$$

$$\therefore BC \perp \text{平面 } A_1AD, \text{ 又 } BC \subset \text{平面 } BCC_1B_1, \therefore \text{平面 } A_1AD \perp \text{平面 } BCC_1B_1.$$

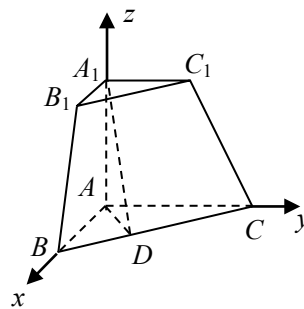
(II) $\because BA \perp \text{平面 } ACC_1A_1,$ 取 $\mathbf{m} = \overrightarrow{AB} = (\sqrt{2}, 0, 0)$ 为平面 ACC_1A_1 的法向量,

设平面 BCC_1B_1 的法向量为 $\mathbf{n} = (l, m, n),$ 则 $\overrightarrow{BC} \cdot \mathbf{n} = 0, \overrightarrow{CC_1} \cdot \mathbf{n} = 0.$

$$\therefore \begin{cases} -\sqrt{2}l + 2m = 0, \\ -m + \sqrt{3}n = 0, \end{cases} \therefore l = \sqrt{2}m, n = \frac{\sqrt{3}}{3}m,$$

如图, 可取 $m = 1,$ 则 $\mathbf{n} = \left(\sqrt{2}, 1, \frac{\sqrt{3}}{3} \right),$

$$\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2} + 0 \times 1 + 0 \times \frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 + 0^2 + 0^2} \cdot \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}} = \frac{\sqrt{15}}{5},$$



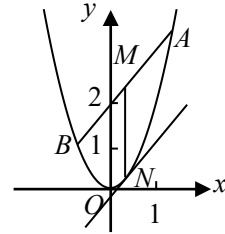
(第 19 题, 解法二)

即二面角 $A-CC_1-B$ 为 $\arccos \frac{\sqrt{15}}{5}$.

20. 解法一: (I) 如图, 设 $A(x_1, 2x_1^2)$, $B(x_2, 2x_2^2)$, 把 $y = kx + 2$ 代入 $y = 2x^2$ 得 $2x^2 - kx - 2 = 0$,

由韦达定理得 $x_1 + x_2 = \frac{k}{2}$, $x_1 x_2 = -1$,

$\therefore x_N = x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{k}{4}$, $\therefore N$ 点的坐标为 $\left(\frac{k}{4}, \frac{k^2}{8}\right)$.



设抛物线在点 N 处的切线 l 的方程为 $y - \frac{k^2}{8} = m\left(x - \frac{k}{4}\right)$,

将 $y = 2x^2$ 代入上式得 $2x^2 - mx + \frac{mk}{4} - \frac{k^2}{8} = 0$,

\therefore 直线 l 与抛物线 C 相切,

$\therefore \Delta = m^2 - 8\left(\frac{mk}{4} - \frac{k^2}{8}\right) = m^2 - 2mk + k^2 = (m - k)^2 = 0$, $\therefore m = k$.

即 $l \parallel AB$.

(II) 假设存在实数 k , 使 $\overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{NB} = 0$, 则 $NA \perp NB$, 又 $\therefore M$ 是 AB 的中点,

$\therefore |MN| = \frac{1}{2} |AB|$.

由 (I) 知 $y_M = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = \frac{1}{2}(kx_1 + 2 + kx_2 + 2) = \frac{1}{2}[k(x_1 + x_2) + 4]$
 $= \frac{1}{2}\left(\frac{k^2}{2} + 4\right) = \frac{k^2}{4} + 2$.

$\therefore MN \perp x$ 轴, $\therefore |MN| = |y_M - y_N| = \frac{k^2}{4} + 2 - \frac{k^2}{8} = \frac{k^2 + 16}{8}$.

又 $|AB| = \sqrt{1+k^2} \cdot |x_1 - x_2| = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2}$
 $= \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 - 4 \times (-1)} = \frac{1}{2} \sqrt{k^2 + 1} \cdot \sqrt{k^2 + 16}$.

$\therefore \frac{k^2 + 16}{8} = \frac{1}{4} \sqrt{k^2 + 1} \cdot \sqrt{k^2 + 16}$, 解得 $k = \pm 2$.

即存在 $k = \pm 2$, 使 $\overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{NB} = 0$.

解法二: (I) 如图, 设 $A(x_1, 2x_1^2)$, $B(x_2, 2x_2^2)$, 把 $y = kx + 2$ 代入 $y = 2x^2$ 得

$2x^2 - kx - 2 = 0$. 由韦达定理得 $x_1 + x_2 = \frac{k}{2}$, $x_1x_2 = -1$.

$\therefore x_N = x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{k}{4}$, $\therefore N$ 点的坐标为 $\left(\frac{k}{4}, \frac{k^2}{8}\right)$. $\because y = 2x^2$, $\therefore y' = 4x$,

\therefore 抛物线在点 N 处的切线 l 的斜率为 $4 \times \frac{k}{4} = k$, $\therefore l \parallel AB$.

(II) 假设存在实数 k , 使 $\overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{NB} = 0$.

由 (I) 知 $\overrightarrow{NA} = \left(x_1 - \frac{k}{4}, 2x_1^2 - \frac{k^2}{8}\right)$, $\overrightarrow{NB} = \left(x_2 - \frac{k}{4}, 2x_2^2 - \frac{k^2}{8}\right)$, 则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{NB} &= \left(x_1 - \frac{k}{4}\right)\left(x_2 - \frac{k}{4}\right) + \left(2x_1^2 - \frac{k^2}{8}\right)\left(2x_2^2 - \frac{k^2}{8}\right) \\ &= \left(x_1 - \frac{k}{4}\right)\left(x_2 - \frac{k}{4}\right) + 4\left(x_1^2 - \frac{k^2}{16}\right)\left(x_2^2 - \frac{k^2}{16}\right) \\ &= \left(x_1 - \frac{k}{4}\right)\left(x_2 - \frac{k}{4}\right) \cdot \left[1 + 4\left(x_1 + \frac{k}{4}\right)\left(x_2 + \frac{k}{4}\right)\right] \\ &= \left[x_1x_2 - \frac{k}{4}(x_1 + x_2) + \frac{k^2}{16}\right] \cdot \left[1 + 4x_1x_2 + k(x_1 + x_2) + \frac{k^2}{4}\right] \\ &= \left(-1 - \frac{k}{4} \times \frac{k}{2} + \frac{k^2}{16}\right) \cdot \left[1 + 4 \times (-1) + k \times \frac{k}{2} + \frac{k^2}{4}\right] \\ &= \left(-1 - \frac{k^2}{16}\right)\left(-3 + \frac{3}{4}k^2\right) \\ &= 0,\end{aligned}$$

$$\because -1 - \frac{k^2}{16} < 0, \therefore -3 + \frac{3}{4}k^2 = 0, \text{ 解得 } k = \pm 2.$$

即存在 $k = \pm 2$, 使 $\overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{NB} = 0$.

21. 解: (I) $f'(x) = \frac{k(x^2 + c) - 2x(kx + 1)}{(x^2 + c)^2} = \frac{-kx^2 - 2x + ck}{(x^2 + c)^2}$, 由题意知 $f'(-c) = 0$,

即得 $c^2k - 2c - ck = 0$, (*) $\because c \neq 0$, $\therefore k \neq 0$.

由 $f'(x) = 0$ 得 $-kx^2 - 2x + ck = 0$,

由韦达定理知另一个极值点为 $x=1$ (或 $x=c-\frac{2}{k}$).

(II) 由 (*) 式得 $k=\frac{2}{c-1}$, 即 $c=1+\frac{2}{k}$.

当 $c>1$ 时, $k>0$; 当 $0<c<1$ 时, $k<-2$.

(i) 当 $k>0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, -c)$ 和 $(1, +\infty)$ 内是减函数, 在 $(-c, 1)$ 内是增函数.

$$\therefore M=f(1)=\frac{k+1}{c+1}=\frac{k}{2}>0,$$

$$m=f(-c)=\frac{-kc+1}{c^2+c}=\frac{-k^2}{2(k+2)}<0,$$

$$\text{由 } M-m=\frac{k}{2}+\frac{k^2}{2(k+2)}\geq 1 \text{ 及 } k>0, \text{ 解得 } k\geq \sqrt{2}.$$

(ii) 当 $k<-2$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, -c)$ 和 $(1, +\infty)$ 内是增函数, 在 $(-c, 1)$ 内是减函数.

$$\therefore M=f(-c)=\frac{-k^2}{2(k+2)}>0, \quad m=f(1)=\frac{k}{2}<0$$

$$M-m=\frac{-k^2}{2(k+2)}-\frac{k}{2}=1-\frac{(k+1)^2+1}{k+2}\geq 1 \text{ 恒成立.}$$

综上所述, 所求 k 的取值范围为 $(-\infty, -2)\cup[\sqrt{2}, +\infty)$.

$$22. \text{ 解法一: (I) } \because a_{n+1}=\frac{3a_n}{2a_n+1}, \therefore \frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3a_n}, \therefore \frac{1}{a_{n+1}}-1=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_n}-1\right),$$

又 $\frac{1}{a_n}-1=\frac{2}{3}$, $\therefore \left(\frac{1}{a_n}-1\right)$ 是以 $\frac{2}{3}$ 为首项, $\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列.

$$\therefore \frac{1}{a_n}-1=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3^{n-1}}=\frac{2}{3^n}, \therefore a_n=\frac{3^n}{3^n+2}.$$

(II) 由 (I) 知 $a_n=\frac{3^n}{3^n+2}>0$,

$$\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\left(\frac{2}{3^n}-x\right)$$

$$=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\left(\frac{2}{3^n}+1-1-x\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} \left[\frac{1}{a_n} - (1+x) \right] \\
&= -\frac{1}{a_n} \cdot \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{2}{1+x} \\
&= -\frac{1}{a_n} \left(\frac{1}{1+x} - a_n \right)^2 + a_n \leq a_n, \therefore \text{原不等式成立.}
\end{aligned}$$

(III) 由 (II) 知, 对任意的 $x > 0$, 有

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 + \cdots + a_n &\geq \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} \left(\frac{2}{3} - x \right) + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} \left(\frac{2}{3^2} - x \right) + \cdots + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} \left(\frac{2}{3^n} - x \right) \\
&= \frac{n}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{2}{3^n} - nx \right).
\end{aligned}$$

$$\therefore \text{取 } x = \frac{1}{n} \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{2}{3^n} \right) = \frac{\frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right)}{n \left(1 - \frac{1}{3} \right)} = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right),$$

$$\text{则 } a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq \frac{n}{1 + \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right)} = \frac{n^2}{n+1 - \frac{1}{3^n}} > \frac{n^2}{n+1}.$$

\therefore 原不等式成立.

解法二: (I) 同解法一.

$$\text{(II) 设 } f(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} \left(\frac{2}{3^n} - x \right),$$

$$\text{则 } f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{-(1+x)^2 - \left(\frac{2}{3^n} - x \right) \cdot 2(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{2 \left(\frac{2}{3^n} - x \right)}{(1+x)^2}$$

$\because x > 0$,

\therefore 当 $x < \frac{2}{3^n}$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x > \frac{2}{3^n}$ 时, $f'(x) < 0$,

\therefore 当 $x = \frac{2}{3^n}$ 时, $f(x)$ 取得最大值 $f\left(\frac{2}{3^n}\right) = \frac{1}{1 + \frac{2}{3^n}} = a_n$.

\therefore 原不等式成立.

(III) 同解法一.

B 卷选择题答案:

1. D 2. C 3. A 4. B 5. C 6. A 7. D
8. C 9. C 10. B 11. B 12. D