

2014年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标 I）

参考答案与试题解析

一、选择题（共12小题，每小题5分）

1. （5分）已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 \geq 0\}$ ， $B = \{x | -2 \leq x < 2\}$ ，则 $A \cap B =$ （ ）
- A. $[1, 2)$ B. $[-1, 1]$ C. $[-1, 2)$ D. $[-2, -1]$

【考点】1E：交集及其运算.

【专题】5J：集合.

【分析】求出A中不等式的解集确定出A，找出A与B的交集即可.

【解答】解：由A中不等式变形得： $(x - 3)(x + 1) \geq 0$ ，

解得： $x \geq 3$ 或 $x \leq -1$ ，即 $A = (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$ ，

$\therefore B = [-2, 2)$ ，

$\therefore A \cap B = [-2, -1]$.

故选：D.

【点评】此题考查了交集及其运算，熟练掌握交集的定义是解本题的关键.

2. （5分） $\frac{(1+i)^3}{(1-i)^2} =$ （ ）

A. $1+i$ B. $1-i$ C. $-1+i$ D. $-1-i$

【考点】A5：复数的运算.

【专题】5N：数系的扩充和复数.

【分析】由条件利用两个复数代数形式的乘除法，虚数单位i的幂运算性质，计算求得结果.

【解答】解： $\frac{(1+i)^3}{(1-i)^2} = \frac{2i(1+i)}{-2i} = -(1+i) = -1-i$ ，

故选：D.

【点评】本题主要考查两个复数代数形式的乘除法，虚数单位i的幂运算性质，

属于基础题.

3. (5分) 设函数 $f(x)$, $g(x)$ 的定义域都为 $\mathbb{R}$, 且 $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数, 则下列结论正确的是 ()
- A. $f(x) \cdot g(x)$ 是偶函数 B. $|f(x)| \cdot g(x)$ 是奇函数
C. $f(x) \cdot |g(x)|$ 是奇函数 D. $|f(x) \cdot g(x)|$ 是奇函数

【考点】3K: 函数奇偶性的性质与判断.

【专题】51: 函数的性质及应用.

【分析】根据函数奇偶性的性质即可得到结论.

【解答】解: $\because f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数,

$$\therefore f(-x) = -f(x), \quad g(-x) = g(x),$$

$f(-x) \cdot g(-x) = -f(x) \cdot g(x)$, 故函数是奇函数, 故A错误,

$|f(-x)| \cdot g(-x) = |f(x)| \cdot g(x)$ 为偶函数, 故B错误,

$f(-x) \cdot |g(-x)| = -f(x) \cdot |g(x)|$ 是奇函数, 故C正确.

$|f(-x) \cdot g(-x)| = |f(x) \cdot g(x)|$ 为偶函数, 故D错误,

故选: C.

【点评】本题主要考查函数奇偶性的判断, 根据函数奇偶性的定义是解决本题的关键.

4. (5分) 已知F为双曲线C: $x^2 - my^2 = 3m$ ($m > 0$) 的一个焦点, 则点F到C的一条渐近线的距离为 ()
- A. $\sqrt{3}$ B. 3 C. $\sqrt{3}m$ D. $3m$

【考点】KC: 双曲线的性质.

【专题】11: 计算题; 5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】双曲线方程化为标准方程, 求出焦点坐标, 一条渐近线方程, 利用点到直线的距离公式, 可得结论.

【解答】解: 双曲线C: $x^2 - my^2 = 3m$ ($m > 0$) 可化为 $\frac{x^2}{3m} - \frac{y^2}{3} = 1$,

∴一个焦点为 $(\sqrt{3m+3}, 0)$ ，一条渐近线方程为 $x+\sqrt{m}y=0$ ，

∴点F到C的一条渐近线的距离为 $\frac{\sqrt{3m+3}}{\sqrt{1+m}}=\sqrt{3}$.

故选：A.

【点评】 本题考查双曲线的方程与性质，考查点到直线的距离公式，属于基础题.

5. (5分) 4位同学各自在周六、周日两天中任选一天参加公益活动，则周六、周日都有同学参加公益活动的概率为 ()

- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{5}{8}$ D. $\frac{7}{8}$

【考点】 C6：等可能事件和等可能事件的概率.

【专题】 11：计算题；5I：概率与统计.

【分析】 求得4位同学各自在周六、周日两天中任选一天参加公益活动、周六、周日都有同学参加公益活动的情况，利用古典概型概率公式求解即可.

【解答】 解：4位同学各自在周六、周日两天中任选一天参加公益活动，共有 $2^4=16$ 种情况，

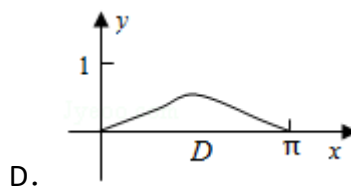
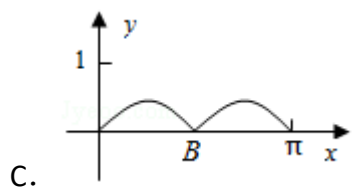
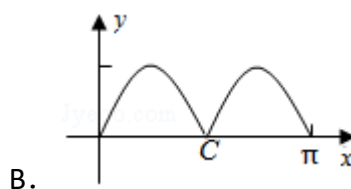
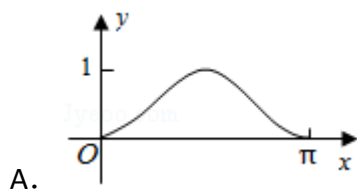
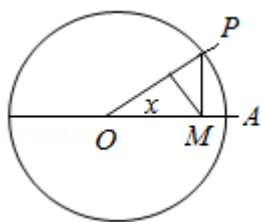
周六、周日都有同学参加公益活动，共有 $2^4 - 2=16 - 2=14$ 种情况，

∴所求概率为 $\frac{14}{16}=\frac{7}{8}$.

故选：D.

【点评】 本题考查古典概型，是一个古典概型与排列组合结合的问题，解题时先要判断该概率模型是不是古典概型，再要找出随机事件A包含的基本事件的个数和试验中基本事件的总数.

6. (5分) 如图，圆O的半径为1，A是圆上的定点，P是圆上的动点，角x的始边为射线OA，终边为射线OP，过点P作直线OA的垂线，垂足为M，将点M到直线OP的距离表示为x的函数 $f(x)$ ，则 $y=f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 的图象大致为 ()



【考点】3P：抽象函数及其应用.

【专题】57：三角函数的图像与性质.

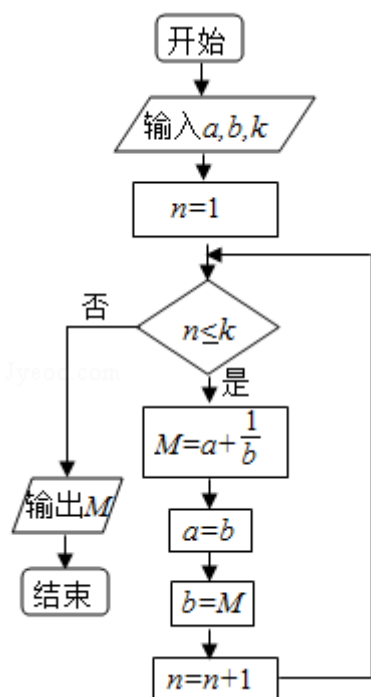
【分析】在直角三角形OMP中，求出OM，注意长度、距离为正，再根据直角三角形的锐角三角函数的定义即可得到 $f(x)$ 的表达式，然后化简，分析周期和最值，结合图象正确选择.

【解答】解：在直角三角形OMP中， $OP=1$ ， $\angle POM=x$ ，则 $OM=|\cos x|$ ，
 $\therefore$ 点M到直线OP的距离表示为 x 的函数 $f(x)=OM|\sin x|$
 $=|\cos x| \cdot |\sin x| = \frac{1}{2}|\sin 2x|$ ，
 其周期为 $T=\frac{\pi}{2}$ ，最大值为 $\frac{1}{2}$ ，最小值为0，

故选：C.

【点评】本题主要考查三角函数的图象与性质，正确表示函数的表达式是解题的关键，同时考查二倍角公式的运用.

7. （5分）执行如图的程序框图，若输入的 a ， b ， k 分别为1，2，3，则输出的 $M=（\quad）$



A. $\frac{20}{3}$

B. $\frac{7}{2}$

C. $\frac{16}{5}$

D. $\frac{15}{8}$

【考点】EF：程序框图.

【专题】5I：概率与统计.

【分析】根据框图的流程模拟运行程序，直到不满足条件，计算输出M的值.

【解答】解：由程序框图知：第一次循环 $M=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ ， $a=2$ ， $b=\frac{3}{2}$ ， $n=2$ ；

第二次循环 $M=2+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$ ， $a=\frac{3}{2}$ ， $b=\frac{8}{3}$ ， $n=3$ ；

第三次循环 $M=\frac{3}{2}+\frac{3}{8}=\frac{15}{8}$ ， $a=\frac{8}{3}$ ， $b=\frac{15}{8}$ ， $n=4$.

不满足条件 $n \leq 3$ ，跳出循环体，输出 $M=\frac{15}{8}$.

故选：D.

【点评】本题考查了当型循环结构的程序框图，根据框图的流程模拟运行程序是解答此类问题的常用方法.

8. (5分) 设 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ ， $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，且 $\tan \alpha = \frac{1+\sin \beta}{\cos \beta}$ ，则 ()

A. $3\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$

B. $3\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

C. $2\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$

D. $2\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

【考点】GF：三角函数的恒等变换及化简求值.

【专题】56：三角函数的求值.

【分析】化切为弦，整理后得到 $\sin(\alpha - \beta) = \cos\alpha$ ，由该等式左右两边角的关系可排除选项A，B，然后验证C满足等式 $\sin(\alpha - \beta) = \cos\alpha$ ，则答案可求.

【解答】解：由 $\tan\alpha = \frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}$ ，得：

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1+\sin\beta}{\cos\beta},$$

$$\text{即} \sin\alpha\cos\beta = \cos\alpha\sin\beta + \cos\alpha,$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right),$$

$$\because \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\therefore \text{当 } 2\alpha - \beta = \frac{\pi}{2} \text{ 时, } \sin(\alpha - \beta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha \text{ 成立.}$$

故选：C.

【点评】本题考查三角函数的化简求值，训练了利用排除法及验证法求解选择题，是基础题.

9. (5分) 不等式组 $\begin{cases} x+y \geq 1 \\ x-2y \leq 4 \end{cases}$ 的解集记为D，有下列四个命题：

$$p_1: \forall (x, y) \in D, x+2y \geq -2 \quad p_2: \exists (x, y) \in D, x+2y \geq 2$$

$$p_3: \forall (x, y) \in D, x+2y \leq 3 \quad p_4: \exists (x, y) \in D, x+2y \leq -1$$

其中真命题是 ()

$$\text{A. } p_2, p_3$$

$$\text{B. } p_1, p_4$$

$$\text{C. } p_1, p_2$$

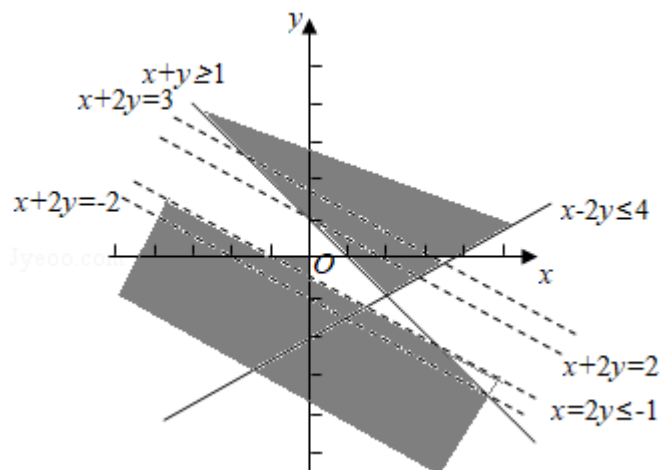
$$\text{D. } p_1, p_3$$

【考点】2K：命题的真假判断与应用；7A：二元一次不等式的几何意义.

【专题】59：不等式的解法及应用；5L：简易逻辑.

【分析】作出不等式组 $\begin{cases} x+y \geq 1 \\ x-2y \leq 4 \end{cases}$ 的表示的区域D，对四个选项逐一分析即可.

【解答】解：作出图形如下：



由图知，区域D为直线 $x+y=1$ 与 $x-2y=4$ 相交的上部角型区域，

p_1 : 区域D在 $x+2y \geq -2$ 区域的上方，故： $\forall (x, y) \in D$, $x+2y \geq -2$ 成立；

p_2 : 在直线 $x+2y=2$ 的右上方和区域D重叠的区域内， $\exists (x, y) \in D$, $x+2y \geq 2$ ，故 p_2 ： $\exists (x, y) \in D$, $x+2y \geq 2$ 正确；

p_3 : 由图知，区域D有部分在直线 $x+2y=3$ 的上方，因此 p_3 ： $\forall (x, y) \in D$, $x+2y \leq 3$ 错误；

p_4 : $x+2y \leq -1$ 的区域（左下方的虚线区域）恒在区域D下方，故 p_4 ： $\exists (x, y) \in D$, $x+2y \leq -1$ 错误；

综上所述， p_1 、 p_2 正确；

故选：C.

【点评】 本题考查命题的真假判断与应用，着重考查作图能力，熟练作图，正确分析是关键，属于难题.

10. （5分）已知抛物线C: $y^2=8x$ 的焦点为F，准线为l，P是l上一点，Q是直线PF与C的一个交点，若 $\overrightarrow{FP}=4\overrightarrow{FQ}$ ，则 $|QF|=(\quad)$

- A. $\frac{7}{2}$ B. 3 C. $\frac{5}{2}$ D. 2

【考点】 K8: 抛物线的性质.

【专题】 11: 计算题; 5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】 求得直线PF的方程，与 $y^2=8x$ 联立可得 $x=1$ ，利用 $|QF|=d$ 可求.

【解答】 解：设Q到l的距离为d，则 $|QF|=d$ ，

$$\because \overrightarrow{FP} = 4\overrightarrow{FQ},$$

$$\therefore |PQ| = 3d,$$

$$\therefore \text{不妨设直线PF的斜率为 } -\frac{2\sqrt{2}d}{d} = -2\sqrt{2},$$

$$\because F(2, 0),$$

$$\therefore \text{直线PF的方程为 } y = -2\sqrt{2}(x - 2),$$

$$\text{与 } y^2 = 8x \text{ 联立可得 } x = 1,$$

$$\therefore |QF| = d = 1 + 2 = 3,$$

故选：B.

【点评】 本题考查抛物线的简单性质，考查直线与抛物线的位置关系，属于基础题.

11. (5分) 已知函数 $f(x) = ax^3 - 3x^2 + 1$ ，若 $f(x)$ 存在唯一的零点 x_0 ，且 $x_0 > 0$ ，则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(1, +\infty)$ B. $(2, +\infty)$ C. $(-\infty, -1)$ D. $(-\infty, -2)$

【考点】 53：函数的零点与方程根的关系.

【专题】 11：计算题；51：函数的性质及应用；53：导数的综合应用.

【分析】 由题意可得 $f'(x) = 3ax^2 - 6x = 3x(ax - 2)$ ， $f(0) = 1$ ；分类讨论确定函数的零点的个数及位置即可.

【解答】 解： $\because f(x) = ax^3 - 3x^2 + 1$,

$$\therefore f'(x) = 3ax^2 - 6x = 3x(ax - 2), \quad f(0) = 1;$$

①当 $a = 0$ 时， $f(x) = -3x^2 + 1$ 有两个零点，不成立；

②当 $a > 0$ 时， $f(x) = ax^3 - 3x^2 + 1$ 在 $(-\infty, 0)$ 上有零点，故不成立；

③当 $a < 0$ 时， $f(x) = ax^3 - 3x^2 + 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上有且只有一个零点；

故 $f(x) = ax^3 - 3x^2 + 1$ 在 $(-\infty, 0)$ 上没有零点；

而当 $x = \frac{2}{a}$ 时， $f(x) = ax^3 - 3x^2 + 1$ 在 $(-\infty, 0)$ 上取得最小值；

$$\text{故 } f\left(\frac{2}{a}\right) = \frac{8}{a^2} - 3 \cdot \frac{4}{a^2} + 1 > 0;$$

故 $a < -2$;

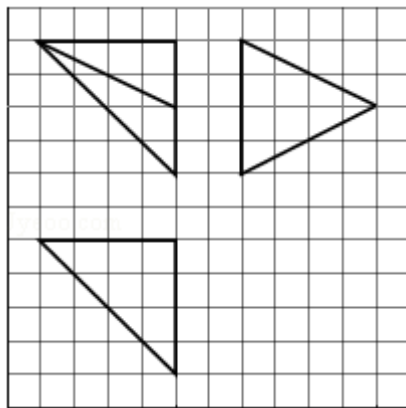
综上所述,

实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -2)$;

故选: D.

【点评】 本题考查了导数的综合应用及分类讨论的思想应用, 同时考查了函数的零点的判定的应用, 属于基础题.

12. (5分) 如图, 网格纸上小正方形的边长为1, 粗实线画出的是某多面体的三视图, 则该多面体的各条棱中, 最长的棱的长度为 ()



A. $6\sqrt{2}$

B. 6

C. $4\sqrt{2}$

D. 4

【考点】 L1: 由三视图求面积、体积.

【专题】 5F: 空间位置关系与距离.

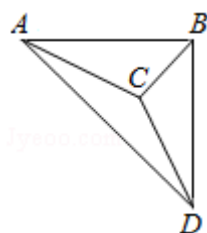
【分析】 画出图形, 结合三视图的数据求出棱长, 推出结果即可.

【解答】 解: 几何体的直观图如图: $AB=4$, $BD=4$, C 到 BD 的中点的距离为: 4,

$$\therefore BC=CD=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}, \quad AC=\sqrt{4^2+(2\sqrt{5})^2}=6, \quad AD=4\sqrt{2},$$

显然 AC 最长. 长为6.

故选: B.



【点评】 本题考查三视图求解几何体的棱长，考查计算能力.

二、填空题（共4小题，每小题5分）

13. （5分） $(x - y)(x + y)^8$ 的展开式中 x^2y^7 的系数为 - 20
 . （用数字填写答案）

【考点】 DA： 二项式定理.

【专题】 11： 计算题； 5P： 二项式定理.

【分析】 由题意依次求出 $(x + y)^8$ 中 xy^7 ， x^2y^6 ， 项的系数， 求和即可.

【解答】 解： $(x + y)^8$ 的展开式中， 含 xy^7 的系数是： 8.

含 x^2y^6 的系数是28，

$\therefore (x - y)(x + y)^8$ 的展开式中 x^2y^7 的系数为： $8 - 28 = - 20$.

故答案为： - 20

【点评】 本题考查二项式定理系数的性质， 二项式定理的应用， 考查计算能力
 .

14. （5分） 甲、乙、丙三位同学被问到是否去过A， B， C三个城市时，

甲说：我去过的城市比乙多， 但没去过B城市；

乙说：我没去过C城市；

丙说：我们三人去过同一城市；

由此可判断乙去过的城市为 A .

【考点】 F4： 进行简单的合情推理.

【专题】 5M： 推理和证明.

【分析】 可先由乙推出， 可能去过A城市或B城市， 再由甲推出只能是A， B中的一个， 再由丙即可得出结论.

【解答】 解： 由乙说： 我没去过C城市， 则乙可能去过A城市或B城市，
 但甲说： 我去过的城市比乙多， 但没去过B城市， 则乙只能是去过A， B中的任一个，

再由丙说：我们三人去过同一城市，
则由此可判断乙去过的城市为A.

故答案为：A.

【点评】本题主要考查简单的合情推理，要抓住关键，逐步推断，是一道基础题.

15. (5分) 已知A, B, C为圆O上的三点, 若 $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, 则 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为 90°.

【考点】9S: 数量积表示两个向量的夹角.

【专题】5A: 平面向量及应用.

【分析】根据向量之间的关系, 利用圆直径的性质, 即可得到结论.

【解答】解: 在圆中若 $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$,

即 $2\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$,

即 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ 的和向量是过A, O的直径,

则以AB, AC为邻边的四边形是矩形,

则 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$,

即 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为90°,

故答案为: 90°

【点评】本题主要考查平面向量的夹角的计算, 利用圆直径的性质是解决本题的关键, 比较基础.

16. (5分) 已知a, b, c分别为 $\triangle ABC$ 的三个内角A, B, C的对边, $a=2$ 且 $(2+b)(\sin A - \sin B) = (c-b)\sin C$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$.

【考点】HP: 正弦定理; HR: 余弦定理.

【专题】11: 计算题; 35: 转化思想; 48: 分析法; 58: 解三角形.

【分析】由正弦定理化简已知可得 $2a - b^2 = c^2 - bc$ ，结合余弦定理可求A的值，

由基本不等式可求 $bc \leq 4$ ，再利用三角形面积公式即可计算得解.

【解答】解：因为： $(2+b)(\sin A - \sin B) = (c-b)\sin C$

$$\Rightarrow (2+b)(a-b) = (c-b)c$$

$$\Rightarrow 2a - 2b + ab - b^2 = c^2 - bc,$$

又因为： $a=2$,

$$\text{所以： } a^2 - b^2 = c^2 - bc \Rightarrow b^2 + c^2 - a^2 = bc \Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{\pi}{3},$$

$$\triangle ABC \text{ 面积 } S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{\sqrt{3}}{4}bc,$$

$$\text{而 } b^2 + c^2 - a^2 = bc$$

$$\Rightarrow b^2 + c^2 - bc = a^2$$

$$\Rightarrow b^2 + c^2 - bc = 4$$

$$\Rightarrow bc \leq 4$$

$$\text{所以： } S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{\sqrt{3}}{4}bc \leq \sqrt{3}, \text{ 即 } \triangle ABC \text{ 面积的最大值为 } \sqrt{3}.$$

故答案为： $\sqrt{3}$.

【点评】本题主要考查了正弦定理，余弦定理，基本不等式，三角形面积公式在解三角形中的应用，考查了计算能力和转化思想，属于中档题.

三、解答题

17. (12分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前n项和为 S_n ， $a_1=1$ ， $a_n \neq 0$ ， $a_n a_{n+1} = \lambda S_n - 1$ ，其中 λ 为常数.

(I) 证明： $a_{n+2} - a_n = \lambda$

(II) 是否存在 λ ，使得 $\{a_n\}$ 为等差数列？并说明理由.

【考点】83：等差数列的性质；8H：数列递推式.

【专题】54：等差数列与等比数列.

【分析】(I) 利用 $a_n a_{n+1} = \lambda S_n - 1$ ， $a_{n+1} a_{n+2} = \lambda S_{n+1} - 1$ ，相减即可得出；

(II) 假设存在 λ ，使得 $\{a_n\}$ 为等差数列，设公差为d. 可得 $\lambda = a_{n+2} - a_n = (a_{n+2} - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_n) = 2d$ ， $d = \frac{\lambda}{2}$. 得到 $\lambda S_n = \frac{\lambda^2}{4}n^2 + (\lambda - \frac{\lambda^2}{4})n + 2 - \frac{\lambda}{2}$ ，根据 $\{a_n$

}为等差数列的充要条件是 $\begin{cases} \lambda \neq 0 \\ 2 - \frac{\lambda}{2} = 0 \end{cases}$, 解得 λ 即可.

【解答】(I) 证明: $\because a_n a_{n+1} = \lambda S_n - 1, a_{n+1} a_{n+2} = \lambda S_{n+1} - 1,$

$$\therefore a_{n+1} (a_{n+2} - a_n) = \lambda a_{n+1}$$

$$\because a_{n+1} \neq 0,$$

$$\therefore a_{n+2} - a_n = \lambda.$$

(II) 解: 假设存在 λ , 使得 $\{a_n\}$ 为等差数列, 设公差为 d .

$$\text{则 } \lambda = a_{n+2} - a_n = (a_{n+2} - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_n) = 2d,$$

$$\therefore d = \frac{\lambda}{2}.$$

$$\therefore a_n = 1 + \frac{\lambda(n-1)}{2}, \quad a_{n+1} = 1 + \frac{\lambda n}{2},$$

$$\therefore \lambda S_n = 1 + \left[1 + \frac{\lambda(n-1)}{2}\right] \left[1 + \frac{\lambda n}{2}\right] = \frac{\lambda^2}{4} n^2 + \left(\lambda - \frac{\lambda^2}{4}\right) n + 2 - \frac{\lambda}{2},$$

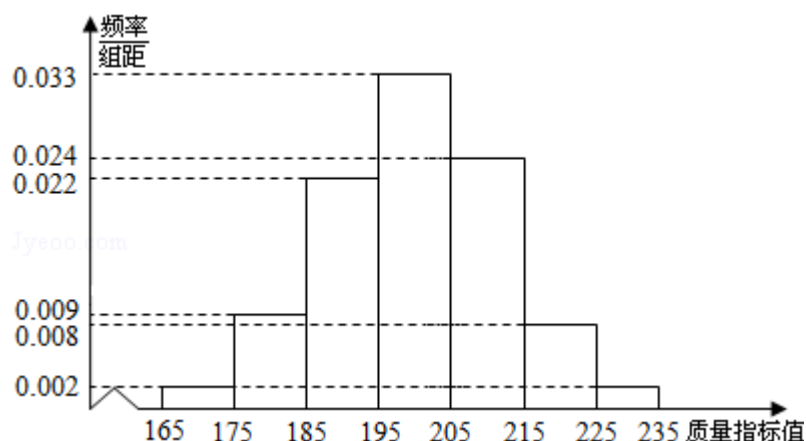
根据 $\{a_n\}$ 为等差数列的充要条件是 $\begin{cases} \lambda \neq 0 \\ 2 - \frac{\lambda}{2} = 0 \end{cases}$, 解得 $\lambda = 4$.

此时可得 $S_n = n^2, a_n = 2n - 1$.

因此存在 $\lambda = 4$, 使得 $\{a_n\}$ 为等差数列.

【点评】本题考查了递推式的意义、等差数列的通项公式及其前 n 项和公式、等差数列的充要条件等基础知识与基本技能方法, 考查了推理能力和计算能力、分类讨论的思想方法, 属于难题.

18. (12分) 从某企业生产的某种产品中抽取500件, 测量这些产品的一项质量指标值, 由测量结果得如下频率分布直方图:



(I) 求这500件产品质量指标值的样本平均数 $\bar{x}$ 和样本方差 s^2 (同一组中数据用该组区间的中点值作代表) ;

(II) 由直方图可以认为, 这种产品的质量指标值 Z 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 其中 μ 近似为样本平均数 $\bar{x}$, σ^2 近似为样本方差 s^2 .

(i) 利用该正态分布, 求 $P(187.8 < Z < 212.2)$;

(ii) 某用户从该企业购买了100件这种产品, 记 X 表示这100件产品中质量指标值位于区间 $(187.8, 212.2)$ 的产品件数, 利用(i)的结果, 求 EX .

附: $\sqrt{150} \approx 12.2$.

若 $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ 则 $P(\mu - \sigma < Z < \mu + \sigma) = 0.6826$, $P(\mu - 2\sigma < Z < \mu + 2\sigma) = 0.9544$.

【考点】CH: 离散型随机变量的期望与方差; CP: 正态分布曲线的特点及曲线所表示的意义.

【专题】11: 计算题; 5I: 概率与统计.

【分析】(I) 运用离散型随机变量的期望和方差公式, 即可求出;

(II) (i) 由(I)知 $Z \sim N(200, 150)$, 从而求出 $P(187.8 < Z < 212.2)$, 注意运用所给数据;

(ii) 由(i)知 $X \sim B(100, 0.6826)$, 运用 $EX=np$ 即可求得.

【解答】解: (I) 抽取产品的质量指标值的样本平均数 $\bar{x}$ 和样本方差 s^2 分别为:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 170 \times 0.02 + 180 \times 0.09 + 190 \times 0.22 + 200 \times 0.33 + 210 \times 0.24 + 220 \times 0.08 + 230 \times 0.02 = 200, \\ s^2 &= (-30)^2 \times 0.02 + (-20)^2 \times 0.09 + (-10)^2 \times 0.22 + 0 \times 0.33 + 10^2 \times 0.24 + 20^2 \times 0.08 + 30^2 \times 0.02 = 150.\end{aligned}$$

(II) (i) 由(I)知 $Z \sim N(200, 150)$, 从而 $P(187.8 < Z < 212.2) = P(200 - 12.2 < Z < 200 + 12.2) = 0.6826$;

(ii) 由(i)知一件产品的质量指标值位于区间 $(187.8, 212.2)$ 的概率为0.6826,

依题意知 $X \sim B(100, 0.6826)$, 所以 $EX = 100 \times 0.6826 = 68.26$.

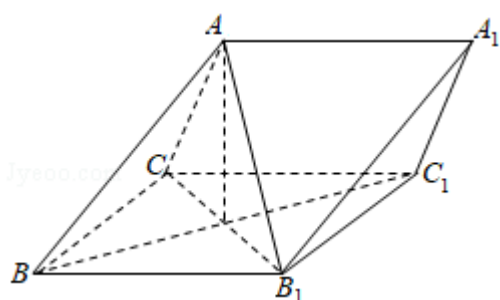
【点评】本题主要考查离散型随机变量的期望和方差, 以及正态分布的特点及

概率求解，考查运算能力.

19. (12分) 如图，三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，侧面 BB_1C_1C 为菱形， $AB \perp B_1C$.

(I) 证明： $AC = AB_1$;

(II) 若 $AC \perp AB_1$ ， $\angle CBB_1 = 60^\circ$ ， $AB = BC$ ，求二面角 $A - A_1B_1 - C_1$ 的余弦值.



【考点】M7：空间向量的夹角与距离求解公式；MJ：二面角的平面角及求法.

【专题】5H：空间向量及应用.

【分析】(1) 连结 BC_1 ，交 B_1C 于点 O ，连结 AO ，可证 $B_1C \perp$ 平面 ABO ，可得 $B_1C \perp AO$ ， $B_1O = CO$ ，进而可得 $AC = AB_1$;

(2) 以 O 为坐标原点， $\overrightarrow{OB}$ 的方向为 x 轴的正方向， $|\overrightarrow{OB}|$ 为单位长度， $\overrightarrow{OB_1}$ 的方向为 y 轴的正方向， $\overrightarrow{OA}$ 的方向为 z 轴的正方向建立空间直角坐标系，分别可得两平面的法向量，可得所求余弦值.

【解答】解：(1) 连结 BC_1 ，交 B_1C 于点 O ，连结 AO ，
 $\because$ 侧面 BB_1C_1C 为菱形，
 $\therefore BC_1 \perp B_1C$ ，且 O 为 BC_1 和 B_1C 的中点，
又 $\because AB \perp B_1C$ ， $\therefore B_1C \perp$ 平面 ABO ，
 $\because AO \subset$ 平面 ABO ， $\therefore B_1C \perp AO$ ，
又 $B_1O = CO$ ， $\therefore AC = AB_1$ ，
(2) $\because AC \perp AB_1$ ，且 O 为 B_1C 的中点， $\therefore AO = CO$ ，
又 $\because AB = BC$ ， $\therefore \triangle BOA \cong \triangle BOC$ ， $\therefore OA \perp OB$ ，
 $\therefore OA, OB, OB_1$ 两两垂直，

以O为坐标原点， $\overrightarrow{OB}$ 的方向为x轴的正方向， $|\overrightarrow{OB}|$ 为单位长度，

$\overrightarrow{OB_1}$ 的方向为y轴的正方向， $\overrightarrow{OA}$ 的方向为z轴的正方向建立空间直角坐标系，

$\because \angle CBB_1 = 60^\circ$ ， $\therefore \triangle CBB_1$ 为正三角形，又 $AB=BC$ ，

$$\therefore A(0, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}), B(1, 0, 0), B_1(0, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0), C(0, -\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$$

$$\therefore \overrightarrow{AB_1} = (0, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}), \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB} = (1, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}), \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{BC} = (-1, -\frac{\sqrt{3}}{3}, 0),$$

设向量 $\vec{n} = (x, y, z)$ 是平面 AA_1B_1 的法向量，

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB_1} = \frac{\sqrt{3}}{3}y + \frac{\sqrt{3}}{3}z = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1B_1} = x + \frac{\sqrt{3}}{3}z = 0 \end{cases}, \text{可取} \vec{n} = (1, \sqrt{3}, \sqrt{3}),$$

同理可得平面 $A_1B_1C_1$ 的一个法向量 $\vec{m} = (1, -\sqrt{3}, \sqrt{3})$ ，

$$\therefore \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{1}{7},$$

$\therefore$ 二面角 $A - A_1B_1 - C_1$ 的余弦值为 $\frac{1}{7}$

【点评】 本题考查空间向量法解决立体几何问题，建立坐标系是解决问题的关键，属中档题.

20. (12分) 已知点 $A(0, -2)$ ，椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为

$$\frac{\sqrt{3}}{2}, F \text{ 是椭圆的右焦点，直线 } AF \text{ 的斜率为 } \frac{2\sqrt{3}}{3}, O \text{ 为坐标原点.}$$

(I) 求E的方程；

(II) 设过点A的直线l与E相交于P, Q两点，当 $\triangle OPQ$ 的面积最大时，求l的方程.

【考点】 K4: 椭圆的性质; KH: 直线与圆锥曲线的综合.

【专题】 5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】 (I) 通过离心率得到a、c关系，通过A求出a，即可求E的方程；

(Ⅱ) 设直线 $l: y=kx-2$, 设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ 将 $y=kx-2$ 代入 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$, 利用 $\Delta>0$, 求出 k 的范围, 利用弦长公式求出 $|PQ|$, 然后求出 $\triangle OPQ$ 的面积表达式, 利用换元法以及基本不等式求出最值, 然后求解直线方程.

【解答】解: (Ⅰ) 设 $F(c, 0)$, 由条件知 $\frac{2}{c}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, 得 $c=\sqrt{3}$ 又 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 $a=2$, $b^2=a^2-c^2=1$, 故 E 的方程 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ (5分)

(Ⅱ) 依题意当 $l \perp x$ 轴不合题意, 故设直线 $l: y=kx-2$, 设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$

将 $y=kx-2$ 代入 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$, 得 $(1+4k^2)x^2-16kx+12=0$,

当 $\Delta=16(4k^2-3)>0$, 即 $k^2>\frac{3}{4}$ 时, $x_{1,2}=\frac{8k \pm 2\sqrt{4k^2-3}}{1+4k^2}$

从而 $|PQ|=\sqrt{k^2+1}|x_1-x_2|=\frac{4\sqrt{k^2+1} \cdot \sqrt{4k^2-3}}{1+4k^2}$

又点 O 到直线 PQ 的距离 $d=\frac{2}{\sqrt{k^2+1}}$, 所以 $\triangle OPQ$ 的面积 $S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}d|PQ|=\frac{4\sqrt{4k^2-3}}{1+4k^2}$

,

设 $\sqrt{4k^2-3}=t$, 则 $t>0$, $S_{\triangle OPQ}=\frac{4t}{t^2+4}=\frac{4}{t+\frac{4}{t}} \leq 1$,

当且仅当 $t=2$, $k=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$ 等号成立, 且满足 $\Delta>0$,

所以当 $\triangle OPQ$ 的面积最大时, l 的方程为: $y=\frac{\sqrt{7}}{2}x-2$ 或 $y=-\frac{\sqrt{7}}{2}x-2$ (12分)

【点评】本题考查直线与椭圆的位置关系的应用, 椭圆的求法, 基本不等式的应用, 考查转化思想以及计算能力.

21. (12分) 设函数 $f(x)=ae^x \ln x + \frac{be^{x-1}}{x}$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处

得切线方程为 $y=e(x-1)+2$.

(Ⅰ) 求 a 、 b ;

(Ⅱ) 证明: $f(x)>1$.

【考点】6E：利用导数研究函数的最值；6H：利用导数研究曲线上某点切线方程.

【专题】15：综合题；53：导数的综合应用.

【分析】（I）求出定义域，导数 $f'(x)$ ，根据题意有 $f(1)=2$ ， $f'(1)=e$ ，解出即可；

（II）由（I）知， $f(x)>1$ 等价于 $x\ln x > xe^{-x} - \frac{2}{x}$ ，设函数 $g(x)=x\ln x$ ，函数

$h(x)=xe^{-x} - \frac{2}{x}$ ，只需证明 $g(x)_{\min} > h(x)_{\max}$ ，利用导数可分别求得 $g(x)_{\min}$ ， $h(x)_{\max}$ ；

【解答】解：（I）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ，

$$f'(x) = ae^x \ln x + \frac{a}{x} \cdot e^x - \frac{b}{x^2} \cdot e^{x-1} + \frac{b}{x} \cdot e^{x-1},$$

由题意可得 $f(1)=2$ ， $f'(1)=e$ ，

故 $a=1$ ， $b=2$ ；

（II）由（I）知， $f(x)=e^x \ln x + \frac{2}{x} \cdot e^{x-1}$ ，

$$\therefore f(x) > 1, \therefore e^x \ln x + \frac{2}{x} \cdot e^{x-1} > 1, \therefore \ln x > \frac{1}{e^x} - \frac{2}{xe},$$

$\therefore f(x) > 1$ 等价于 $x\ln x > xe^{-x} - \frac{2}{e}$ ，设函数 $g(x)=x\ln x$ ，则 $g'(x)=1+\ln x$ ，

$\therefore$ 当 $x \in (0, \frac{1}{e})$ 时， $g'(x) < 0$ ；当 $x \in (\frac{1}{e}, +\infty)$ 时， $g'(x) > 0$ ．

故 $g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{e})$ 上单调递减，在 $(\frac{1}{e}, +\infty)$ 上单调递增，从而 $g(x)$ 在

$(0, +\infty)$ 上的最小值为 $g(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$ ．

设函数 $h(x)=xe^{-x} - \frac{2}{e}$ ，则 $h'(x)=e^{-x}(1-x)$ ．

$\therefore$ 当 $x \in (0, 1)$ 时， $h'(x) > 0$ ；当 $x \in (1, +\infty)$ 时， $h'(x) < 0$ ，

故 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增，在 $(1, +\infty)$ 上单调递减，

从而 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最大值为 $h(1) = -\frac{1}{e}$ ．

综上，当 $x > 0$ 时， $g(x) > h(x)$ ，即 $f(x) > 1$ ．

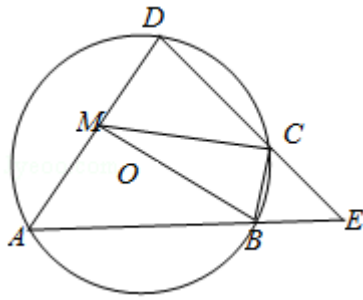
【点评】本题考查导数的几何意义、利用导数求函数的最值、证明不等式等，考查转化思想，考查学生分析解决问题的能力．

选修4-1：几何证明选讲

22. (10分) 如图，四边形ABCD是 $\odot O$ 的内接四边形，AB的延长线与DC的延长线交于点E，且CB=CE.

(I) 证明： $\angle D = \angle E$;

(II) 设AD不是 $\odot O$ 的直径，AD的中点为M，且MB=MC，证明： $\triangle ADE$ 为等边三角形.



【考点】NB：弦切角；NC：与圆有关的比例线段.

【专题】15：综合题；5M：推理和证明.

【分析】(I) 利用四边形ABCD是 $\odot O$ 的内接四边形，可得 $\angle D = \angle CBE$ ，由CB=CE，可得 $\angle E = \angle CBE$ ，即可证明： $\angle D = \angle E$;

(II) 设BC的中点为N，连接MN，证明AD $\parallel$ BC，可得 $\angle A = \angle CBE$ ，进而可得 $\angle A = \angle E$ ，即可证明 $\triangle ADE$ 为等边三角形.

【解答】证明：(I) $\because$ 四边形ABCD是 $\odot O$ 的内接四边形，

$$\therefore \angle D = \angle CBE,$$

$$\because CB = CE,$$

$$\therefore \angle E = \angle CBE,$$

$$\therefore \angle D = \angle E;$$

(II) 设BC的中点为N，连接MN，则由MB=MC知MN $\perp$ BC，

$$\therefore O \text{ 在直线 } MN \text{ 上},$$

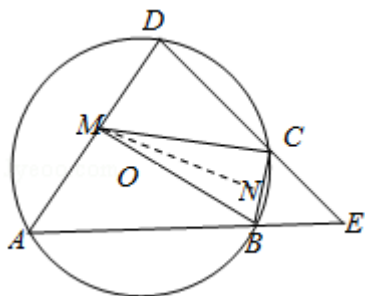
$$\because AD \text{ 不是 } \odot O \text{ 的直径, AD 的中点为 } M,$$

$$\therefore OM \perp AD,$$

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle A = \angle CBE,$$

$\therefore \triangle ADE$ 为等边三角形.



故曲线C的参数方程为 $\begin{cases} x=2\cos\theta \\ y=3\sin\theta \end{cases}$, (θ 为参数).

对于直线l: $\begin{cases} x=2+t & \text{①} \\ y=2-2t & \text{②} \end{cases}$,

由①得: $t=x-2$, 代入②并整理得: $2x+y-6=0$;

(II) 设曲线C上任意一点P($2\cos\theta$, $3\sin\theta$).

P到直线l的距离为 $d=\frac{\sqrt{5}}{5}|4\cos\theta+3\sin\theta-6|$.

则 $|PA|=\frac{d}{\sin 30^\circ}=\frac{2\sqrt{5}}{5}|5\sin(\theta+\alpha)-6|$, 其中 α 为锐角.

当 $\sin(\theta+\alpha)=-1$ 时, $|PA|$ 取得最大值, 最大值为 $\frac{22\sqrt{5}}{5}$.

当 $\sin(\theta+\alpha)=1$ 时, $|PA|$ 取得最小值, 最小值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

【点评】 本题考查普通方程与参数方程的互化, 训练了点到直线的距离公式, 体现了数学转化思想方法, 是中档题.

选修4-5: 不等式选讲

24. 若 $a>0$, $b>0$, 且 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\sqrt{ab}$.

(I) 求 a^3+b^3 的最小值;

(II) 是否存在 a, b , 使得 $2a+3b=6$? 并说明理由.

【考点】 RI: 平均值不等式.

【专题】 59: 不等式的解法及应用.

【分析】 (I) 由条件利用基本不等式求得 $ab\geq 2$, 再利用基本不等式求得 a^3+b^3 的最小值.

(II) 根据

$ab\geq 2$ 及基本不等式求的 $2a+3b>8$, 从而可得不存在 a, b , 使得 $2a+3b=6$.

【解答】 解: (I) $\because a>0, b>0$, 且 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\sqrt{ab}$,

$$\therefore \sqrt{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}}, \therefore ab\geq 2,$$

当且仅当 $a=b=\sqrt{2}$ 时取等号.

$$\therefore a^3+b^3\geq 2\sqrt{(ab)^3}\geq 2\sqrt{2^3}=4\sqrt{2}, \text{ 当且仅当 } a=b=\sqrt{2} \text{ 时取等号,}$$

$\therefore a^3+b^3$ 的最小值为 $4\sqrt{2}$.

(Ⅱ) $\because 2a+3b \geq 2\sqrt{2a \cdot 3b} = 2\sqrt{6ab}$, 当且仅当 $2a=3b$ 时, 取等号.

而由(1)可知, $2\sqrt{6ab} \geq 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3} > 6$,

故不存在 a, b , 使得 $2a+3b=6$ 成立.

【点评】 本题主要考查基本不等式在最值中的应用, 要注意检验等号成立条件是否具备, 属于基础题.