2003年辽宁高考数学真题及答案

一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

1. （2003•辽宁）与曲线 $y=\dfrac{1}{x-1}$ 关于原点对称的曲线为

A. $y=\dfrac{1}{1+x}$　　B. $y=-\dfrac{1}{1+x}$　　C. $y=\dfrac{1}{1-x}$　　D. $y=-\dfrac{1}{1-x}$

2. （2003•辽宁）已知 $x\in(-\dfrac{\pi}{2}，0)$，$\cos x=\dfrac{4}{5}$，则 $\tan 2x=$

A. $\dfrac{7}{24}$　　B. $-\dfrac{7}{24}$　　C. $\dfrac{24}{7}$　　D. $-\dfrac{24}{7}$

3. （2003•辽宁）$\dfrac{1-\sqrt{3}i}{(\sqrt{3}+i)^2}=$

A. $\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}i$　　B. $-\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}i$　　C. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$　　D. $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

4. （2003•辽宁）已知四边形 $ABCD$ 是菱形，点 P 在对角线 AC 上（不包括端点 A、C），则 $\overrightarrow{AP}=$

A. $\lambda(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$，$\lambda\in(0，1)$　　B. $\lambda(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$，$\lambda\in(0，\dfrac{\sqrt{2}}{2})$

C. $\lambda(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})$，$\lambda\in(0，1)$　　D. $\lambda(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})$，$\lambda\in(0，\dfrac{\sqrt{2}}{2})$

5. （2003•辽宁）设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}-1(x\le 0)\\ x^{\frac{1}{2}}(x>0)\end{cases}$，若 $f(x_0)>1$，则 x_0 的取值范围是

A. $(-1，1)$　　B. $(-1，+\infty)$

C. $(-\infty，-2)\cup(0，+\infty)$　　D. $(-\infty，-1)\cup(1，+\infty)$

6. （2003•辽宁）等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1=\dfrac{1}{3}$，$a_2+a_5=4$，$a_n=33$，则 n 为

A. 48　　B. 49　　C. 50　　D. 51

7. （2003•辽宁）函数 $y=\ln\dfrac{x+1}{x-1}$，$x\in(1，+\infty)$ 的反函数为

A. $y=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$，$x\in(0，+\infty)$　　B. $y=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$，$x\in(0，+\infty)$

C. $y=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$，$x\in(-\infty，0)$　　D. $y=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$，$x\in(-\infty，0)$

8. （2003•辽宁）棱长为 a 的正方体中，连结相邻面的中心，以这些线段为棱的八面体的体积为

A. $\dfrac{a^3}{3}$　　B. $\dfrac{a^3}{4}$　　C. $\dfrac{a^3}{6}$　　D. $\dfrac{a^3}{12}$

9. （2003•辽宁）设 $a>0$，$f(x)=ax^2+bx+c$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0，f(x_0))$ 处的切线的倾斜角的取值范围为 $[0，\dfrac{\pi}{4}]$，则 P 到曲线 $y=f(x)$ 对称轴距离的取值范围为

A. $[0，\dfrac{1}{a}]$　　B. $[0，\dfrac{1}{2a}]$　　C. $[0，|\dfrac{b}{2a}|]$　　D. $[0，|\dfrac{b-1}{2a}|]$

10. （2003•辽宁）已知双曲线中心在原点且一个焦点为 $F(\sqrt{7}，0)$，直线 $y=x-1$ 与其相交于 M、N 两点，MN 中点的横坐标为 $-\dfrac{2}{3}$，则此双曲线的方程是

A. $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=1$　　B. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$　　C. $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{2}=1$　　D. $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{5}=1$

11. （2003•辽宁）已知长方形的四个顶点 $A(0，0)$，$B(2，0)$，$C(2，1)$ 和 $D(0，1)$．一质点从 AB 的中点 P_0 沿与 AB 夹角为 θ 的方向射到 BC 上的点 P_1 后，依次反射到 CD、DA 和 AB 上的点 P_2，P_3 和 P_4（入射角等于反射角）．设 P_4 的坐标为 $(x_4，0)$，若 $1<x_4<2$，则 $\tan\theta$ 的取值范围是

A. $(\frac{1}{3}，1)$　　B. $(\frac{1}{3}，\frac{2}{3})$　　C. $(\frac{2}{5}，\frac{1}{2})$　　D. $(\frac{2}{5}，\frac{2}{3})$

12. （2003•辽宁）一个四面体的所有棱长都为 $\sqrt{2}$，四个顶点在同一球面上，则此球的表面积为

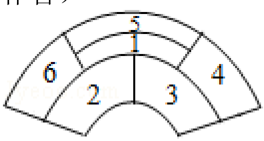
A. 3π　　B. 4π　　C. $3\sqrt{3}\pi$　　D. 6π

二、填空题（共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

13. （2003•辽宁）$(x^2-\frac{1}{2x})^9$ 展开式中 x^9 的系数是________________．

14. （2003•辽宁）某公司生产三种型号的轿车，产量分别为 1200 辆，6000 辆和 2000 辆. 为检验该公司的产品质量，现用分层抽样的方法抽取 46 辆进行检验，这三种型号的轿车依次应抽取______、__________、__________辆.

15. （2003•辽宁）某城市在中心广场建造一个花圃，花圃分为 6 个部分（如图）．现要栽种 4 种不同颜色的花，每部分栽种一种且相邻部分不能栽种同样颜色的花，不同的栽种方法有_________种．（以数字作答）



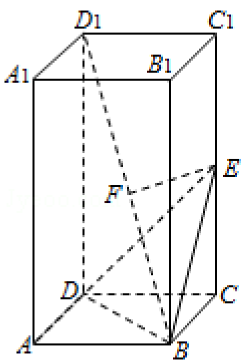
16. （2003•辽宁）对于四面体 $ABCD$，给出下列四个命题：①若 $AB=AC$，$BD=CD$，则 $BC\perp AD$；②若 $AB=CD$，$AC=BD$，则 $BC\perp AD$；③若 $AB\perp AC$，$BD\perp CD$，则 $BC\perp AD$；④若 $AB\perp CD$，$BD\perp AC$，则 $BC\perp AD$．其中真命题的序号是________．（写出所有真命题的序号）

三、解答题（共 6 小题，满分 12+12+12+12+14+12=74 分）

17. （2003•辽宁）已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，$AB=1$，$AA_1=2$，点 E 为 CC_1 中点，点 F 为 BD_1 中点.

⑴证明 EF 为 BD_1 与 CC_1 的公垂线；

⑵求点 D_1 到面 BDE 的距离.



18. （2003•辽宁）已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0，0\le\varphi\le\pi)$ 是 R 上的偶函数，其图象关于点 $M(\frac{3}{4}\pi，0)$ 对称，且在区间 $[0，\frac{\pi}{2}]$ 上是单调函数，求 φ 和 ω 的值.

19. （2003•辽宁）设 $a>0$，求函数 $f(x)=\sqrt{x}-\ln(x+a)$，$x\in(0，+\infty)$ 的单调区间.

20. （2003•辽宁）A、B 两个代表队进行乒乓球对抗赛，每队三名队员，A 队队员是 A_1，A_2，A_3，B 队队员是 B_1，B_2，B_3，按以往多次比赛的统计，对阵队员之间胜负概率如下：

对阵队员	A 队队员胜的概率	A 队队员负的概率

A_1 对 B_1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
A_2 对 B_2	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$
A_3 对 B_3	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

现按表中对阵方式出场，每场胜队得 1 分，负队得 0 分，设 A 队、B 队最后所得总分分别为 ξ 、η .

⑴求 ξ 、η 的概率分布；

⑵求 $E\xi$ ，$E\eta$.

21. （2003▪辽宁）设 a_0 为常数，且 $a_n=3^{n-1}-2a_{n-1}(n\in N^*)$.

⑴证明对任意 $n\geq 1$，$a_n=\frac{1}{5}[3^n+(-1)^{n-1}\bullet 2^n]+(-1)^n\bullet 2^n a_0$ ；

⑵假设对任意 $n\geq 1$ 有 $a_n>a_{n-1}$，求 a_0 的取值范围.

22. （2003▪辽宁）已知常数 $a>0$ ，向量 $\vec{c}=(0，a)$ ，$\vec{i}=(1，0)$ ，经过原点 O 以 $\vec{c}+\lambda\vec{i}$ 为方向向量的直线与经过定点 $A(0，a)$ 以 $\vec{i}-2\lambda\vec{c}$ 为方向向量的直线相交于点 P ，其中 $\lambda\in R$. 试问：是否存在两个定点 E、F ，使得 $|PE|+|PF|$ 为定值. 若存在，求出 E、F 的坐标；若不存在，说明理由.

2003年辽宁省高考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

1.（5分）（2003•辽宁）与曲线$y=\frac{1}{x-1}$关于原点对称的曲线为（　　）

A. $y=\frac{1}{1+x}$　B. $y=\frac{1}{1+x}$　C. $y=\frac{1}{1-x}$　D. $y=\frac{1}{1-x}$

【分析】题目中："曲线$y=\frac{1}{x-1}$关于原点对称的曲线"，只要将原函数式中的x换成－x，y换成－y，即可得到新曲线的函数解析式.

【解答】解：∵曲线$y=\frac{1}{x-1}$关于原点对称的曲线，

∴只要将原函数式中的x换成－x，y换成－y，

即可得到新曲线的函数解析式，

即$-y=\frac{1}{-x-1}$，整理，得$y=\frac{1}{1+x}$.

故选A.

【点评】本题考查函数图象的变换，由于使用了数形结合的方法，使问题便迎刃而解，且解法简捷.

2.（5分）（2003•全国）已知x∈（$-\frac{\pi}{2}$，0），cosx=$\frac{4}{5}$，则tan2x等于（　　）

A. $\frac{7}{24}$　B. $-\frac{7}{24}$　C. $\frac{24}{7}$　D. $-\frac{24}{7}$

【分析】先根据cosx，求得sinx，进而得到tanx的值，最后根据二倍角公式求得tan2x.

【解答】解：∵cosx=$\frac{4}{5}$，x∈（$-\frac{\pi}{2}$，0），

∴sinx=$-\frac{3}{5}$. ∴tanx=$-\frac{3}{4}$.

∴tan2x=$\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=\frac{-\frac{3}{2}}{1-\frac{9}{16}}=-\frac{3}{2}\times\frac{16}{7}=-\frac{24}{7}$.

故选D.

【点评】本题主要考查了三角函数中的二倍角公式．属基础题.

3.（5分）（2003•天津）$\frac{1-\sqrt{3}i}{(\sqrt{3}+i)^2}$=（　　）

A. $\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i$　B. $-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i$　C. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$　D. $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

【分析】化简复数的分母，然后复数的分子、分母同乘分母的共轭复数，即可求得结果.

【解答】解：$\frac{1-\sqrt{3}i}{(\sqrt{3}+i)^2}=\frac{1-\sqrt{3}i}{2+2\sqrt{3}i}=\frac{1}{2}\frac{(1-\sqrt{3}i)^2}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}=\frac{-2-2\sqrt{3}i}{2\times4}=-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i$

故选B.

【点评】复数代数形式的混合运算，是基础题.

4.（5分）（2003•辽宁）已知四边形ABCD是菱形，点P在对角线AC上（不包括端点A、C），则$\overrightarrow{AP}$=

（　　）

A. $\lambda(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$，$\lambda\in(0,1)$　B. $\lambda(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$，$\lambda\in(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$

C. $\lambda(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})$，$\lambda\in(0,1)$　D. $\lambda(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})$，$\lambda\in(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$

【分析】先过 P 分别作 AD、AB 的平行线，可得$\overrightarrow{AP_1}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AP_2}=\lambda\overrightarrow{AC}$，运用向量的加法运算可得$\overrightarrow{AP}=\lambda$（$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$），$\lambda\in$（0，1）.

【解答】解：设 P 是对角线 AC 上的一点（不含 A、C），过 P 分别作 AD、AB 的平行线，则可得.

设$\overrightarrow{AP_1}=\lambda\overrightarrow{AB}$，则 $\lambda\in$（0，1）且$\overrightarrow{AP_2}=\lambda\overrightarrow{AD}$．于是$\overrightarrow{AP}=\lambda$（$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$），$\lambda\in$（0，1）.

故选 A.

【点评】本题主要考查向量的线性运算和向量加法的几何意义．属基础题.

5.（5 分）（2003•全国）设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}-1 & x\leqslant 0\\ x^{\frac{1}{2}} & x>0\end{cases}$ 若 f（x0）>1，则 x0 的取值范围是（　　）

A.（﹣1，1）　B.（﹣1，+∞）　C.（﹣∞，﹣2）∪（0，+∞）　D.（﹣∞，﹣1）∪（1，+∞）

【分析】将变量 x0 按分段函数的范围分成两种情形，在此条件下分别进行求解，最后将满足的条件进行合并.

【解答】解：当 x0≤0 时，$2^{-x_0}-1>1$，则 x0<﹣1，

当 x0>0 时，$x_0^{\frac{1}{2}}>1$则 x0>1，

故 x0 的取值范围是（﹣∞，﹣1）∪（1，+∞），

故选 D.

【点评】本题考查了分段函数已知函数值求自变量的范围问题，以及指数不等式与对数不等式的解法，属于常规题.

6.（5 分）（2003•天津）等差数列{an}中，已知 a1=$\frac{1}{3}$，a2+a5=4，an=33，则 n 为（　　）

A. 48　B. 49　C. 50　D. 51

【分析】先由等差数列的通项公式和已知条件解出 d，进而写出 an 的表达式，然后令 an=33，解方程即可.

【解答】解：设{an}的公差为 d，

∵$a_1=\frac{1}{3}$，a2+a5=4，

∴$\frac{1}{3}$+d+$\frac{1}{3}$+4d=4，即$\frac{2}{3}$+5d=4，

解得 d=$\frac{2}{3}$.

∴an=$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}$（n﹣1）=$\frac{2}{3}n-\frac{1}{3}$，

令 an=33，

即$\frac{2}{3}n-\frac{1}{3}$=33，

解得 n=50.

故选 C.

【点评】本题主要考查了等差数列的通项公式 an=a1+（n﹣1）d，注意方程思想的应用.

7.（5分）（2003•天津）函数$y=\ln\frac{x+1}{x-1}$，x∈（1，+∞）的反函数为（　　）

A．$y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$，x∈（0，+∞）　B．$y=\frac{e^x+1}{e^x-1}$，x∈（0，+∞）

C．$y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$，x∈（﹣∞，0）　D．$y=\frac{e^x+1}{e^x-1}$，x∈（﹣∞，0）

【分析】本题考查反函数的概念、求反函数的方法、指数式与对数式的互化，求函数的值域等函数知识和方法；

将$y=\ln\frac{x+1}{x-1}$，看做方程解出x，然后根据原函数的定义域x∈（1，+∞）求出原函数的值域，即为反函数的定义域.

【解答】解：由已知$y=\ln\frac{x+1}{x-1}$，解x得$x=\frac{e^y+1}{e^y-1}$，

令$m=\frac{x+1}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$，

当x∈（1，+∞）时，m∈（1，+∞），

则$y=\ln\frac{x+1}{x-1}>0$，

∴函数$y=\ln\frac{x+1}{x-1}$，x∈（1，+∞）的反函数为$y=\frac{e^x+1}{e^x-1}$，x∈（0，+∞）

故选B.

【点评】这是一个基础性题，解题思路清晰，求解方向明确，所以容易解答；解答时注意两点，一是借助指数式和对数式的互化求x，二是函数$y=\ln\frac{x+1}{x-1}$，x∈（1，+∞）值域的确定，这里利用”常数分离法“和对数函数的性质推得.

8.（5分）（2003•天津）棱长为a的正方体中，连接相邻面的中心，以这些线段为棱的八面体的体积为（　　）

A．$\frac{a^3}{3}$ B．$\frac{a^3}{4}$ C．$\frac{a^3}{6}$ D．$\frac{a^3}{12}$

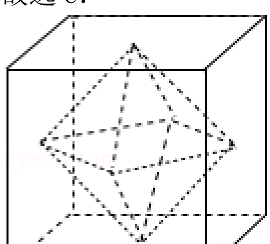
【分析】画出图形，根据题意求出八面体的中间平面面积，然后求出其体积.

【解答】解：画出图就可以了，这个八面体是有两个四棱锥底面合在一起组成的.

一个四棱锥的底面面积是正方体的一个面的一半，就是$\frac{1}{2}a^2$，高为$\frac{1}{2}a$，

所以八面体的体积为：$2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}a^2\times\frac{1}{2}a=\frac{a^3}{6}$.

故选C.



【点评】本题考查学生空间想象能力，逻辑思维能力，体积的计算公式，考查转化思想，是基础题.

9．（5分）（2003•天津）设a＞0，f（x）=ax2+bx+c，曲线y=f（x）在点P（x0，f（x0））处切线的倾斜角的取值范围为[0，$\frac{\pi}{4}$]，则P到曲线y=f（x）对称轴距离的取值范围为（　　）

A．[0，$\frac{1}{a}$]　B．[0，$\frac{1}{2a}$] C．[0，|$\frac{b}{2a}$|]　D．[0，|$\frac{b-1}{2a}$|]

【分析】先由导数的几何意义，得到x0的范围，再求出其到对称轴的范围．

【解答】解：∵过P（x0，f（x0））的切线的倾斜角的取值范围是[0，$\frac{\pi}{4}$]，

∴f′（x0）=2ax0+b∈[0，1]，

∴P到曲线y=f（x）对称轴x=－$\frac{b}{2a}$的距离d=x0－（－$\frac{b}{2a}$）=x0+$\frac{b}{2a}$

∴x0∈[$\frac{-b}{2a}$，$\frac{1-b}{2a}$]．∴d=x0+$\frac{b}{2a}$∈[0，$\frac{1}{2a}$]．

故选：B．

【点评】本题中是对导数的几何意义的考查，计算时，对范围的换算要细心．

10．（5分）（2003•全国）已知双曲线中心在原点且一个焦点为F（$\sqrt{7}$，0），直线y=x－1与其相交于M、N两点，MN中点的横坐标为－$\frac{2}{3}$，则此双曲线的方程是（　　）

A．$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=1$　B．$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$　C．$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{2}=1$　D．$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{5}=1$

【分析】先设出双曲线的方程，然后与直线方程联立方程组，经消元得二元一次方程，再根据韦达定理及MN中点的横坐标可得a、b的一个方程，又双曲线中有c2=a2+b2，则另得a、b的一个方程，最后解a、b的方程组即得双曲线方程．

【解答】解：设双曲线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$．

将y=x－1代入$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，整理得（b2－a2）x2+2a2x－a2－a2b2=0．

由韦达定理得x1+x2=$\frac{2a^2}{a^2-b^2}$，则$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{a^2}{a^2-b^2}=-\frac{2}{3}$．

又c2=a2+b2=7，解得a2=2，b2=5，

所以双曲线的方程是$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{5}=1$．

故选D．

【点评】本题主要考查代数方法解决几何问题，同时考查双曲线的标准方程与性质等．

11．（5分）（2003•全国）已知长方形的四个项点A（0，0），B（2，0），C（2，1）和D（0，1），一质点从AB的中点P0沿与AB夹角为θ的方向射到BC上的点P1后，依次反射到CD．DA和AB上的点P2．P3和P4（入射角等于反射角），设P4坐标为（x4，0），若1＜x4＜2，则tanθ的取值范围是（　　）

A．（$\frac{1}{3}$，1）　B．（$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$）C．（$\frac{2}{5}$，$\frac{1}{2}$）D．（$\frac{2}{5}$，$\frac{2}{3}$）

【分析】先画草图，帮助理解，取BC上的点P1为中点，则P4和中点P0重合，tanθ=$\frac{1}{2}$，用排除法解答．

【解答】解：考虑由P0射到BC的中点上，这样依次反射最终回到P0，

此时容易求出tanθ=$\frac{1}{2}$，由题设条件知，1＜x4＜2，

则 tanθ $\neq \frac{1}{2}$，排除 A．B．D，
故选 C．
【点评】由于是选择题，因而可以特殊值方法解答：排除验证法，也可以用动态观点判定答案．

12．（5 分）（2003•全国）棱长都为$\sqrt{2}$的四面体的四个顶点在同一球面上，则此球的表面积为（　　）
A．3π　B．4π　C．$3\sqrt{3}\pi$　D．6π
【分析】本题考查的知识点是球的体积和表面积公式，由棱长都为$\sqrt{2}$的四面体的四个顶点在同一球面上，可求出内接该四面体的正方体棱长为 1，又因为正方体的对角线即为球的直径，即球的半径 R=$\frac{\sqrt{3}}{2}$，代入球的表面积公式，S 球=4πR2，即可得到答案．
【解答】解：借助立体几何的两个熟知的结论：
（1）一个正方体可以内接一个正四面体；
（2）若正方体的顶点都在一个球面上，则正方体的体对角线就是球的直径．
则球的半径 R=$\frac{\sqrt{3}}{2}$，
∴球的表面积为 3π，
故答案选 A．
【点评】棱长为 a 的正方体，内接正四面体的棱长为$\sqrt{2}$a，外接球直径等于长方体的对角线长$\sqrt{3}$a．

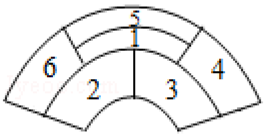
二、填空题（共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

13．（4 分）（2003•全国）在 $(x-\frac{1}{2x})^9$ 的展开式中，x3 的系数是　$-\frac{21}{2}$　（用数字作答）
【分析】首先根据题意，写出 $(x-\frac{1}{2x})^9$ 的二项展开式，可得 9﹣2r=3，解可得 r=3，将其代入二项展开式，计算可得答案．
【解答】解：根据题意，对于 $(x-\frac{1}{2x})^9$，
有 Tr+1=C99﹣r•x9﹣r•（﹣$\frac{1}{2x}$）r=（﹣$\frac{1}{2}$）r•C99﹣r•x9﹣2r，
令 9﹣2r=3，可得 r=3，
当 r=3 时，有 T4=﹣$\frac{21}{2}$x3，
故答案﹣$\frac{21}{2}$．
【点评】本题考查二项式定理的应用，注意系数与二项式系数的区别．

14．（4 分）（2003•天津）某公司生产三种型号的轿车，产量分别为 1200 辆、6000 辆和 2000 辆，为检验该公司的产品质量，现用分层抽样的方法抽取 46 辆进行检验，这三种型号的轿车依次应抽取　6　辆、　30　辆、　10　辆．
【分析】由题意先求出抽样比例即为$\frac{46}{9200}$，再由此比例计算出在三种型号的轿车抽取的数目．
【解答】解：因总轿车数为 9200 辆，而抽取 46 辆进行检验，抽样比例为$\frac{46}{9200}=\frac{1}{200}$，
而三种型号的轿车有显著区别，根据分层抽样分为三层按$\frac{1}{200}$比例，
故分别从这三种型号的轿车依次应抽取 6 辆、30 辆、10 辆．
故答案为：6，30，10．

【点评】本题的考点是分层抽样，即保证样本的结构和总体的结构保持一致，按照一定的比例样本容量和总体容量的比值，在各层中进行抽取．

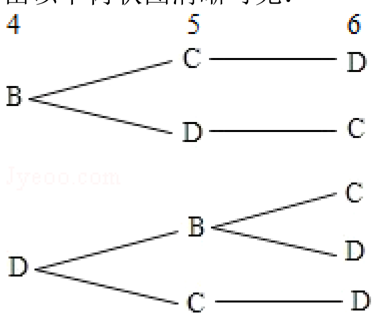
15．（4 分）（2003•天津）某城市在中心广场建造一个花圃，花圃分为 6 个部分（如图）．现要栽种 4 种不同颜色的花，每部分栽种一种且相邻部分不能栽种同样颜色的花，不同的栽种方法有　120　种．（以数字作答）



【分析】由题意来看 6 部分种 4 种颜色的花，又从图形看知必有 2 组同颜色的花，从同颜色的花入手分类求．②与⑤同色，则③⑥也同色或④⑥也同色，③与⑤同色，则②④或⑥④同色，②与④且③与⑥同色，根据分类计数原理得到结果．

【解答】解：从题意来看 6 部分种 4 种颜色的花，
又从图形看知必有 2 组同颜色的花，从同颜色的花入手分类求．
（1）②与⑤同色，则③⑥也同色或④⑥也同色，
所以共有 $N_1=4\times3\times2\times2\times1=48$ 种；
（2）③与⑤同色，则②④或⑥④同色，
所以共有 $N_2=4\times3\times2\times2\times1=48$ 种；
（3）②与④且③与⑥同色，则共有 $N_3=4\times3\times2\times1=24$ 种．
∴共有 $N=N_1+N_2+N_3=48+48+24=120$ 种．
故答案为：120

【点评】这是一道理科的高考题，本题还可以这样解：记颜色为 A，B，C，D 四色，先安排 1，2，3 有 A_4^3 种不同的栽法，
不妨设 1，2，3 已分别栽种 A，B，C，则 4，5，6 栽种方法共 5 种，
由以下树状图清晰可见．

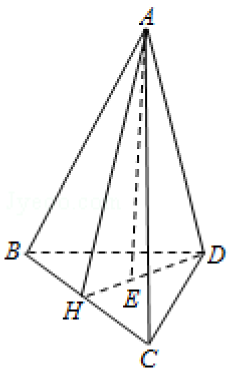


根据分步计数原理，不同栽种方法有 $N=A_4^3\times5=120$．

16．（4 分）（2003•辽宁）对于四面体 ABCD，给出下列四个命题
①若 $AB=AC$，$BD=CD$，则 $BC\perp AD$；
②若 $AB=CD$，$AC=BD$，则 $BC\perp AD$；
③若 $AB\perp AC$，$BD\perp CD$，则 $BC\perp AD$；
④若 $AB\perp CD$，$BD\perp AC$，则 $BC\perp AD$．
其中真命题的序号是　①④　．（写出所有真命题的序号）

【分析】证明线线垂直一般采用线面垂直来证线线垂直．①的证明可转借化证明 $BC\perp$ 面 AHD．④的证明可转化为证垂心，然后再证明 $BC\perp$ 面 AED 来证明 $BC\perp AD$．②③条件下不能求出两线的夹角，也无法保证一个线垂直于另一个线所在的平面，故不对．

【解答】证明：如图
对于①取 BC 的中点 H，连接 AH 与 DH，可证得 $BC\perp$ 面 AHD，进而可得 $BC\perp AD$，故①对；
对于②条件不足备，证明不出结论；
对于③条件不足备，证明不出结论；
对于④作 $AE\perp$ 面 BCD 于 E，连接 BE 可得 $BE\perp CD$，同理可得 $CE\perp BD$，证得 E 是垂心，则可得出 $DE\perp BC$，进而可证得 $BC\perp$ 面 AED，即可证出 $BC\perp AD$．
综上知①④正确，故应填①④．



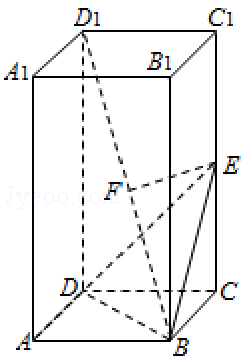
【点评】本题在判断时有一定的难度，需要构造相关的图形，在立体几何中，构造法是一个常用的方法，本题用其来将线线证明转化线面证明，

三、解答题（共 6 小题，满分 74 分）

17．（12 分）（2003•天津）已知正四棱柱 ABCD﹣A1B1C1D1．AB=1，AA1=2，点 E 为 CC1 中点，点 F 为 BD1 中点．

（1）证明 EF 为 BD1 与 CC1 的公垂线；

（2）求点 D1 到面 BDE 的距离．



【分析】(1）欲证明 EF 为 BD1 与 CC1 的公垂线，只须证明 EF 分别与为 BD1 与 CC1 垂直即可，可由四边形 EFMC 是矩形→EF⊥CC1．由 EF⊥面 DBD1→EF⊥BD1．

（2）欲求点 D1 到面 BDE 的距离，将距离看成是三棱锥的高，利用等体积法：VE﹣DBD1=VD1﹣DBE．求解即得．

【解答】解：(1）取 BD 中点 M．

连接 MC，FM．

∵F 为 BD1 中点，

∴FM∥D1D 且 FM=$\frac{1}{2}$D1D．

又 EC$\frac{1}{2}$CC1 且 EC⊥MC，

∴四边形 EFMC 是矩形

∴EF⊥CC1．又 FM⊥面 DBD1．

∴EF⊥面 DBD1．

∵BD1⊂面 DBD1．∴EF⊥BD1．

故 EF 为 BD1 与 CC1 的公垂线．

（Ⅱ）解：连接 ED1，有 VE﹣DBD1=VD1﹣DBE．

由（Ⅰ）知 EF⊥面 DBD1，

设点 D1 到面 BDE 的距离为 d．

则 $S_{\triangle DBE}\cdot d=S_{\triangle DBD_1}\cdot EF$．

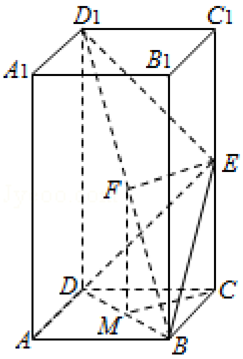
∵AA1=2，AB=1．

∴$BD=BE=ED=\sqrt{2}$，$EF=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∴ $S_{\triangle DBD_1}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 2=\sqrt{2}$. $S_{\triangle DBE}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(\sqrt{2})^2=\frac{\sqrt{3}}{2}$

∴ $d=\dfrac{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

故点 D1 到平面 DBE 的距离为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.



【点评】本小题主要考查线面关系和四棱柱等基础知识，考查空间想象能力和推理能力.

18.（12 分）（2003•天津）已知函数 f（x）=sin（ωx+φ）（ω＞0，0≤φ≤π）是 R 上的偶函数，其图象关于点 $M(\frac{3\pi}{4},\ 0)$ 对称，且在区间 $[0,\ \frac{\pi}{2}]$ 上是单调函数，求φ和ω的值.

【分析】由 f（x）是偶函数可得　的值，图象关于点 $M(\frac{3\pi}{4},\ 0)$ 对称可得函数关系 $f(\frac{3\pi}{4}-x)=-f(\frac{3\pi}{4}+x)$，可得ω的可能取值，结合单调函数可确定ω的值.

【解答】解：由 f（x）是偶函数，得 f（﹣x）=f（x），

即 sin（﹣ωx+φ）=sin（ωx+φ），

所以﹣cosφsinωx=cosφsinωx，

对任意 x 都成立，且 w＞0，

所以得 cosφ=0.

依题设 0≤φ≤π，所以解得 $φ=\frac{\pi}{2}$，

由 f（x）的图象关于点 M 对称，

得 $f(\frac{3\pi}{4}-x)=-f(\frac{3\pi}{4}+x)$，

取 x=0，得 f（$\frac{3\pi}{4}$）=sin（$\frac{3\omega\pi}{4}+\frac{\pi}{2}$）=cos$\frac{3\omega\pi}{4}$，

∴f（$\frac{3\pi}{4}$）=sin（$\frac{3\omega\pi}{4}+\frac{\pi}{2}$）=cos$\frac{3\omega\pi}{4}$，

∴cos$\frac{3\omega\pi}{4}$=0，

又 w＞0，得 $\frac{3\omega\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$+kπ，k=0，1，2，3，…

∴$\omega=\frac{2}{3}$（2k+1），k=0，1，2，…

当 k=0 时，$\omega=\frac{2}{3}$，f（x）=sin（$\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{2}$）在[0，$\frac{\pi}{2}$]上是减函数，满足题意；

当 k=1 时，ω=2，f（x）=sin（2x+$\frac{\pi}{2}$）=cos2x，在[0，$\frac{\pi}{2}$]上是减函数，满足题意；

当 k=2 时，ω=$\frac{10}{3}$，f（x）=sin（$\frac{10}{3}$x+$\frac{\pi}{2}$）在[0，$\frac{\pi}{2}$]上不是单调函数；

所以，综合得ω=$\frac{2}{3}$或 2.

【点评】本题主要考查三角函数的图象、单调性、奇偶性等基本知识，以及分析问题和推理计算能力.

19.（12 分）（2003•天津）设 a＞0，求函数 f（x）=$\sqrt{x}$ - ln（x+a）（x∈（0，+∞））的单调区间.

【分析】由题意函数 f（x）=$\sqrt{x}$ - ln（x+a），首先求出函数的导数，然后根据导数与函数单调区间的关系对 a 的大小进行分类讨论.

【解答】解：由题意得$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x+a}(x>0)$，

令 f′（x）=0，

即 x2+（2a - 4）x+a2=0，

其中△=4（a - 2）2 - 4a2=8 - 8a，

（i）当 a＞1 时，△＜0 成立，

对所有 x＞0，有 x2+（2a - 4）+a2＞0.

即 f′（x）＞0，

此时 f（x）在（0，+∞）内单调递增；

（ii）当 a=1 时，△=0 成立，

对 x≠1，有 x2+（2a - 4）x+a2＞0，

即 f′（x）＞0，

此时 f（x）在（0，1）内单调递增，且在（1，+∞）内也单调递增，

又知函数 f（x）在 x=1 处连续，

因此，函数 f（x）在（0，+∞）内单调递增；

（iii）当 0＜a＜1 时，△＞0 成立，

令 f′（x）＞0，

即 x2+（2a - 4）x+a2＞0，

解得 x＜2 - a - 2$\sqrt{1-a}$或 x＞2 - a+2$\sqrt{1-a}$，

因此，函数 f（x）在区间$(0,\ 2-a-2\sqrt{1-a})$，$(2-a+2\sqrt{1-a},\ +\infty)$内也单调递增.

令 f′（x）＜0，

即 x2+（2a - 4）x+a2＜0，

解得$2-a-2\sqrt{1-a}<x<2-a+2\sqrt{1-a}$，

因此，函数 f（x）在区间$(2-a-2\sqrt{1-a},\ 2-a+2\sqrt{1-a})$内单调递减.

【点评】本题主要考查导数的概念和计算，应用导数研究函数单调性的方法及推理和运算能力.

20.（12 分）（2003•天津）A、B 两个代表队进行乒乓球对抗赛，每队三名队员，A 队队员是 A1，A2，A3，B 队队员是 B1，B2，B3，按以往多次比赛的统计，对阵队员之间胜负概率如下：

对阵队员	A 队队员胜的概率	A 队队员负的概率
A1 对 B1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
A2 对 B2	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$
A3 对 B3	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

现按表中对阵方式出场，每场胜队得 1 分，负队得 0 分，设 A 队、B 队最后所得总分分别为 ξ 、 η .
（1）求 ξ 、 η 的概率分布；
（2）求 Eξ，Eη.
【分析】(1) 由题意知本题两个变量之间具有特殊关系，根据相互独立事件同时发生的概率做出变量 ξ 的分布列，根据两者之间和为 3，得到另一个变量的分布列.
（2）由题意知本题两个变量之间具有特殊关系，两个变量的期望之间也有这种关系，两个变量的期望的和是 3，解出一个，另一个用做差来解.
【解答】解：(1) ξ 、 η 的可能取值分别为 3，2，1，0.
$P(\xi=3)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{8}{75}$ $P(\xi=2)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{28}{75}$,
$P(\xi=1)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{5}$,
$P(\xi=0)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{25}$.
根据题意知 ξ + η =3，
∴P（ η =0）=P（ ξ =3）$=\frac{8}{75}$,
P（ η =1）=P（ ξ =2）$=\frac{28}{75}$,
P（ η =2）=P（ ξ =1）$=\frac{2}{5}$,
P（ η =3）=P（ ξ =0）$=\frac{3}{25}$.

（2）$E\xi=3\times\frac{8}{75}+2\times\frac{28}{75}+1\times\frac{2}{5}+0\times\frac{3}{25}=\frac{22}{15}$,
∵ ξ + η =3，
∴ $E\eta=3-E\xi=\frac{23}{15}$.
【点评】本小题考查离散型随机变量分布列和数学期望等概念，考查运用概率知识解决实际问题的能力，求离散型随机变量的分布列和期望是近年来理科高考必出的一个问题，题目做起来不难，运算量也不大.

21.（14 分）（2003•天津）设 an 为常数，且 an=3n - 1 - 2an - 1（n∈N*）.
（1）证明对任意 n≥1，有 $a_n=\frac{3^n+(-1)^{n-1}2^n}{5}+(-1)^n2^na_0$;
（2）假设对任意 n≥1 有 an＞an - 1，求 a0 的取值范围.
【分析】(1) 选择利用数学归纳法为妥，需要注意的是有归纳假设 ak 到 ak+1 的变形，利用归纳假设，注意目标的形式就能得到结果；另外可以利用递推数列来求得通项公式，当然需要对递推数列的 an+1=pan+f（n）这种形式的处理要合适；这种形式的一般处理方法是：两边同时除以 pn+1 或者是构造一个等比数列，构造法有一定的技巧，如本题可设 an - a3n= - 2（an - 1 - a3n - 1），
（2）由（1）的结论可作差 an - an - 1＞0 并代入运算，由于含有（ - 1）n 的形式要注意对 n=2k - 1 和 n=2k 进行讨论，只需取 k=1，2 时得到 a0 的取值范围即可，另外一个思路是只需取 n=1，2 时得到 a0 的范围，然后分 n=2k - 1 和 n=2k 进行证明 an - an - 1＞0．具体解法参见参考答案.
【解答】解：(1) 证法一：
（i）当 n=1 时，由已知 a1=1 - 2a0，等式成立；
（ii）假设当 n=k（k≥1）等式成立，
则 $a_k=\frac{1}{5}[3^k+(-1)^{k-1}2^k]-(-1)^k2a_0$,

那么 $a_{k+1}=3^k-2a_k=3^k-\frac{2}{5}[3^k+(-1)^{k-1}2^k]-(-1)^k2^{k+1}a_0$

$=\frac{1}{5}[3^{k+1}+(-1)^k2^{k+1}]+(-1)^{k+1}2^{k+1}a_0$.

也就是说，当 n=k+1 时，等式也成立.

根据（i）和（ii），可知等式对任何 n∈N，成立.

证法二：如果设 an﹣a3n=﹣2（an﹣1﹣a3n﹣1），

用 an=3n﹣1﹣2an﹣1 代入，可解出 $a=\frac{1}{5}$.

所以 $\{a_n-\frac{3^n}{5}\}$ 是公比为﹣2，

首项为 $a_1-\frac{3}{5}$ 的等比数列.

∴ $a_n-\frac{3^n}{5}=(1-2a_0-\frac{3}{5})(-2)^{n-1}(n\in N)$.

即 $a_n=\frac{3^n+(-1)^{n-1}2^n}{5}+(-1)^n2^na_0$.

（2）解法一：由 an 通项公式 $a_n-a_{n-1}=\frac{2\times3^{n-1}+(-1)^{n-1}3\times2^{n-1}}{5}+(-1)^n3\times2^{n-1}a_0$.

∴an＞an﹣1（n∈N）等价于 $(-1)^{n-1}(5a_0-1)<(\frac{3}{2})^{n-2}(n\in N)$. ①

（i）当 n=2k﹣1，k=1，2，时，

①式即为 $(-1)^{2k-2}(5a_0-1)<(\frac{3}{2})^{2k-3}$

即为 $a_0<\frac{1}{5}(\frac{3}{2})^{2k-3}+\frac{1}{5}$.

②式对 k=1，2，都成立，

有 $a_0<\frac{1}{5}\times(\frac{3}{2})^{-1}+\frac{1}{5}=\frac{1}{3}$.

（ii）当 n=2k，k=1，2 时，

①式即为 $(-1)^{2k-1}(5a_0-1)<(\frac{3}{2})^{2k-2}$.

即为 $a_0>-\frac{1}{5}\times(\frac{3}{2})^{2k-2}+\frac{1}{5}$.

③式对 k=1，2 都成立，有 $a_0>-\frac{1}{5}\times(\frac{3}{2})^{2\times1-2}+\frac{1}{5}=0$.

综上，①式对任意 n∈N*，成立，有 $0<a_0<\frac{1}{3}$.

故 a0 的取值范围为 $(0,\frac{1}{3})$.

解法二：如果 an＞an﹣1（n∈N*）成立，

特别取 n=1，2 有 a1﹣a0=1﹣3a0＞0．a2﹣a1=6a0＞0．

因此 $0<a_0<\frac{1}{3}$．下面证明当 $0<a_0<\frac{1}{3}$．时，

对任意 n∈N*，an﹣an﹣1＞0．

由 an 的通项公式 5（an﹣an﹣1）=2×3n﹣1+（﹣1）n﹣13×2n﹣1+（﹣1）n5×3×2n﹣1a0．

（i）当 n=2k－1，k=1，2 时，
5（an－an－1）=2×3n－1+3×2n－1－5×3×2n－1a0＞2×2n－1+3×2n－1－5×3×2n－1=0
（ii）当 n=2k，k=1，2 时，
5（an－an－1）=2×3n－1－3×2n－1+5×3×2n－1a0＞2×3n－1－3×2n－1≥0.

故 a0 的取值范围为 $(0,\frac{1}{3})$.

【点评】本题主要考查数列、等比数列的概念，考查数学归纳法，考查灵活综合运用数学知识分析问题和解决问题的能力．对递推数列的 an+1=pan+f（n）这种形式的考查是一个难点，同时除以 pn+1 得到 $\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}}-\frac{a_n}{p^n}=\frac{f(n)}{p^{n+1}}$，然后用累加法得到 $\frac{a_n}{p^n}$ 的等式可得结果，或者是构造一个等比数列 an+1+kf（n）=p（an+kf（n））（不具有普适性）．

22．（12 分）（2003•天津）已知常数 a＞0，向量 $\vec{c}$=（0，a），$\vec{i}$=（1，0），经过原点 O 以 $\vec{c}+\lambda\vec{i}$为方向向量的直线与经过定点 A（0，a）以 $\vec{i}-2\lambda\vec{c}$为方向向量的直线相交于点 P，其中 λ∈R．试问：是否存在两个定点 E、F，使得|PE|+|PF|为定值．若存在，求出 E、F 的坐标；若不存在，说明理由．

【分析】根据 $\vec{c}$和 $\vec{i}$，求得 $\vec{c}+\lambda\vec{i}$和 $\vec{i}-2\lambda\vec{c}$进而可得直线 OP 和 AP 的方程，消去参数 λ，得点 P（x，y）的坐标满足方程，进而整理可得关于 x 和 y 的方程，进而看当 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，方程为圆不符合题意；当 $0<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时和当 $a>\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，P 的轨迹为椭圆符合两定点．

【解答】解：∵$\vec{c}$=（0，a），$\vec{i}$=（1，0），
∴$\vec{c}+\lambda\vec{i}$=（λ，a），$\vec{i}-2\lambda\vec{c}$=（1，－2λa）．
因此，直线 OP 和 AP 的方程分别为 λy=ax 和 y－a=－2λax．
消去参数 λ，得点 P（x，y）的坐标满足方程 y（y－a）=－2a2x2．

整理得 $\frac{x^2}{\frac{1}{8}}+\frac{(y-\frac{a}{2})^2}{(\frac{a}{2})^2}=1$．①

因为 a＞0，所以得：
（i）当 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，方程①是圆方程，故不存在合乎题意的定点 E 和 F；
（ii）当 $0<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，方程①表示椭圆，焦点 $E(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}-a^2},\frac{a}{2})$ 和 $F(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}-a^2},\frac{a}{2})$ 为合乎题意的两个定点；
（iii）当 $a>\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，方程①也表示椭圆，焦点 $E(0,\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-\frac{1}{2}}))$ 和 $F(0,\frac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-\frac{1}{2}}))$ 为合乎题意的两个定点．

【点评】本题主要考查平面向量的概念和计算，求轨迹的方法，椭圆的方程和性质，利用方程判定曲线的性质，曲线与方程的关系等解析几何的基本思想和综合解题能力．