2010年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）

数学（文科）

一、填空题（本大题满分56分）本大题共有14题，考生必须在答题纸相应编号的空格内直接填写结果，每个空格填对得4分，否则一律得零分。

1.已知集合 $A=\{1,3,m\}$，$B=\{3,4\}$，$A\bigcup B=\{1,2,3,4\}$ 则 $m=$ __2____。

解析：考查并集的概念，显然m=2

2.不等式 $\dfrac{2-x}{x+4}>0$ 的解集是___$\{x\mid -4<x<2\}$__。

解析：考查分式不等式的解法 $\dfrac{2-x}{x+4}>0$ 等价于（x-2）(x+4)<0,所以-4<x<2

3.行列式 $\begin{vmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & \sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{vmatrix}$ 的值是__0.5______。

解析：考查行列式运算法则 $\begin{vmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & \sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{vmatrix}=\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{6}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

4.若复数 $z=1-2i$（i 为虚数单位），则 $z\cdot\bar{z}+z=$__$6-2i$___。

解析：考查复数基本运算 $z\cdot\bar{z}+z=(1-2i)(1+2i)+1-2i=6-2i$

5.将一个总数为 A、B、C 三层，其个体数之比为5:3:2。若用分层抽样方法抽取容量为100的样本，则应从 C 中抽取___20___个个体。

解析：考查分层抽样应从 C 中抽取 $100\times\dfrac{2}{10}=20$

6.已知四棱椎 $P-ABCD$ 的底面是边长为6的正方形，侧棱 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，且 $PA=8$，则该四棱椎的体积是__96____。

解析：考查棱锥体积公式 $V=\dfrac{1}{3}\times 36\times 8=96$

7.圆 $C: x^2+y^2-2x-4y+4=0$ 的圆心到直线 $3x+4y+4=0$ 的距离 $d=$ _3____。

解析：考查点到直线距离公式

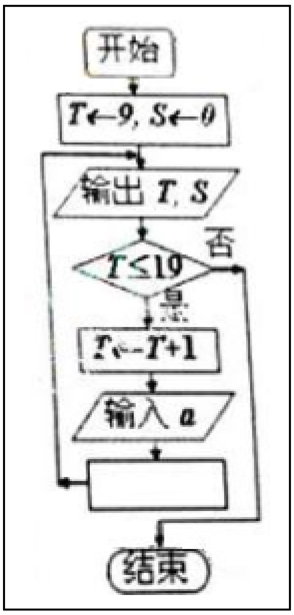
圆心（1,2）到直线 $3x+4y+4=0$ 距离为 $\dfrac{|3\times 1+4\times 2+4|}{5}=3$

8.动点 P 到点 $F(2,0)$ 的距离与它到直线 $x+2=0$ 的距离相等，则 P 的轨迹方程为___$y^2=8x$

。

解析：考查抛物线定义及标准方程

定义知 P 的轨迹是以 $F(2,0)$ 为焦点的抛物线，p=2所以其方程为$y^2=8x$



9.函数 $f(x)=\log_3(x+3)$ 的反函数的图像与 y 轴的交点坐标是____(0,−2)

。

解析：考查反函数相关概念、性质

法一：函数 $f(x)=\log_3(x+3)$ 的反函数为 $y=3^x-3$，另x=0，有y=-2

法二：函数 $f(x)=\log_3(x+3)$ 图像与x轴交点为（-2,0），利用对称性可知，函数 $f(x)=\log_3(x+3)$ 的反函数的图像与 y 轴的交点为（0，-2）

10.

从一副混合后的扑克牌（52张）中随机抽取2张，则"抽出的2张均为红桃"的概率为___$\frac{3}{51}$____（结果用最简分数表示）。

解析：考查等可能事件概率

"抽出的2张均为红桃"的概率为$\frac{C_{13}^2}{C_{52}^2}=\frac{3}{51}$

11.

2010年上海世博会园区每天9:00开园，20:00停止入园。在右边的框图中，S 表示上海世博会官方网站在每个整点报道的入园总人数，a 表示整点报道前1个小时内入园人数，则空白的执行框内应填入__S←S+a___。

解析：考查算法

12.在 n 行 m 列矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & 1 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$ 中，

记位于第 i 行第 j 列的数为 $a_{ij}(i,j=1,2\cdots,n)$。当 $n=9$ 时，$a_{11}+a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{99}=$_45

。

解析：$a_{11}+a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{99}=$ 1+3+5+7+9+2+4+6+8=45

13.在平面直角坐标系中，双曲线 Γ 的中心在原点，它的一个焦点坐标为 $(\sqrt{5},0)$，

$\vec{e}_1=(2,1)$、$\vec{e}_2=(2,-1)$ 分别是两条渐近线的方向向量。任取双曲线 Γ 上的点 P，若

$\overrightarrow{OP}=a\overrightarrow{e_1}+b\overrightarrow{e_2}$（$a$、$b\in R$），则 a、b 满足的一个等式是_$4ab$=1_____。

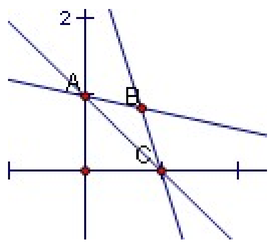
解析：因为 $\vec{e_1}=(2,1)$、$\vec{e_2}=(2,-1)$ 是渐进线方向向量，所以双曲线渐近线方程为

$y=\pm\frac{1}{2}x$，又 $c=\sqrt{5},\therefore a=2,b=1$

双曲线方程为 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$，$\overrightarrow{OP}=a\overrightarrow{e_1}+b\overrightarrow{e_2}=(2a+2b,a-b)$，

$\therefore\frac{(2a+2b)^2}{4}-(a-b)^2=1$，化简得$4ab$=1

14.将直线 $l_1:x+y-1=0$、$l_2:nx+y-n=0$、$l_3:x+ny-n=0$（$n\in N^*$，$n\geq 2$）围成的三角形面积记为 S_n，则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$___$\frac{1}{2}$__。



解析：B $(\frac{n}{n+1},\frac{n}{n+1})$ 所以BO⊥AC，

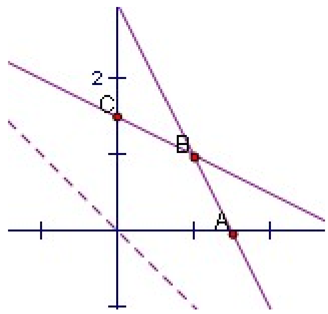
$S_n=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times(\frac{n}{n+1}\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{n-1}{2(n+1)}$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}$

二．选择题（本大题满分20分）本大题共有4题，每题有且只有一个正确答案。考生必须在答题纸的相应编号上，将代表答案的小方格涂黑，选对得5分，否则一律得零分。

15.满足线性约束条件 $\begin{cases}2x+y\leq 3,\\x+2y\leq 3,\\x\geq 0,\\y\geq 0\end{cases}$ 的目标函数 $z=x+y$ 的最大值是　[答]（ ）

（A）1.　（B）$\frac{3}{2}$.　（C）2.　（D）3.



解析：当直线 $z=x+y$ 过点B(1,1)时，z最大值为2

16.“$x=2k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in Z)$”是“$\tan x=1$”成立的　[答]（ ）

（A）充分不必要条件.　（B）必要不充分条件.

（C）充分条件.　（D）既不充分也不必要条件.

解析：$\tan(2k\pi+\frac{\pi}{4})=\tan\frac{\pi}{4}=1$，所以充分；但反之不成立，如 $\tan\frac{5\pi}{4}=1$

17.若 x_0 是方程式 $\lg x+x=2$ 的解，则 x_0 属于区间　[答]（ ）

（A）（0，1）．（B）（1，1.25）．（C）（1.25，1.75）（D）（1.75，2）

解析：构造函数$f(x)=\lg x+x-2$,由$f(1.75)=f(\frac{7}{4})=\lg\frac{7}{4}-\frac{1}{4}<0$

$f(2)=\lg 2>0$ 知 x_0 属于区间（1.75，2）

18.若△ABC的三个内角满足$\sin A:\sin B:\sin C=5:11:13$，则△$ABC$

（A）一定是锐角三角形.　　　　　　（B）一定是直角三角形.

（C）一定是钝角三角形.　　　　　　(D)可能是锐角三角形，也可能是钝角三角形.

解析：由$\sin A:\sin B:\sin C=5:11:13$及正弦定理得a:b:c=5:11:13

由余弦定理得$\cos c=\dfrac{5^2+11^2-13^2}{2\times5\times11}<0$，所以角C为钝角

三、解答题（本大题满分74分）本大题共有5题，解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域内写出必要的步骤。

19.（本题满分12分）

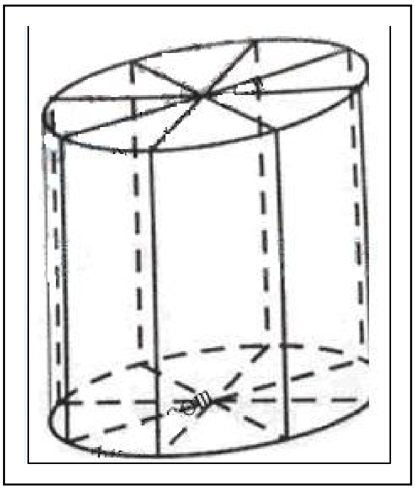
已知$0<x<\dfrac{\pi}{2}$，化简：

$\lg(\cos x\cdot\tan x+1-2\sin^2\dfrac{x}{2})+\lg[\sqrt{2}\cos(x-\dfrac{\pi}{2})]-\lg(1+\sin 2x)$.

解析：原式=lg(sin$x$+cos$x$)+lg(cos$x$+sin$x$)−lg(sin$x$+cos$x$)^2=0.

20.（本大题满分14分）本题共有2个小题，第1小题满分7分，第2小题满分7分.

如图所示，为了制作一个圆柱形灯笼，先要制作4个全等的矩形骨架，总计耗用9.6米铁丝，再用S平方米塑料片制成圆柱的侧面和下底面（不安装上底面）.



(1)当圆柱底面半径r取何值时，S取得最大值？并求出该最大值（结果精确到0.01平方米）；

(2)若要制作一个如图放置的，底面半径为0.3米的灯笼，请作出

用于灯笼的三视图（作图时，不需考虑骨架等因素）.

解析：(1)

设圆柱形灯笼的母线长为l，则l=1.2−2r(0<r<0.6)，S=−3π(r−0.4)^2+0.48π，

所以当r=0.4时，S取得最大值约为1.51平方米；

(2) 当r=0.3时，l=0.6，作三视图略.

21.(本题满分14分)本题共有2个小题，第一个小题满分6分，第2个小题满分8分。

已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_n=n-5a_n-85$，$n\in N^*$

(1)证明：$\{a_n-1\}$是等比数列；

(2)求数列$\{S_n\}$的通项公式，并求出使得$S_{n+1}>S_n$成立的最小正整数n.

解析：(1) 当$n=1$时，$a_1=-14$；当$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=-5a_n+5a_{n-1}+1$，所以$a_n-1=\frac{5}{6}(a_{n-1}-1)$，

又$a_1-1=-15\neq 0$，所以数列$\{a_n-1\}$是等比数列；

(2)

由(1)知：$a_n-1=-15\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$，得$a_n=1-15\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$，从而$S_n=75\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}+n-90$ ($n\in\mathbf{N}^*$

)；

由$S_{n+1}>S_n$，得$\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}<\frac{2}{5}$，$n>\log_{\frac{5}{6}}\frac{2}{25}+1\approx 14.9$，最小正整数$n=15$.

22.（本题满分16分）本题共有3个小题，第1小题满分3分，第2小题满分5分，第3小题满分8分。

若实数x、y、m满足$|x-m|<|y-m|$，则称x比y接近m.

（1）若x^2-1比3接近0，求x的取值范围；

（2）对任意两个不相等的正数a、b，证明：a^2b+ab^2比a^3+b^3接近$2ab\sqrt{ab}$；

（3）已知函数$f(x)$的定义域$D\{x|x\neq k\pi,k\in Z,x\in R\}$. 任取$x\in D$，$f(x)$等于$1+\sin x$和$1-\sin x$中接近0的那个值. 写出函数$f(x)$的解析式，并指出它的奇偶性、最小正周期、最小值和单调性（结论不要求证明）.

解析：(1) $x\in(-2,2)$；

(2) 对任意两个不相等的正数a、b，有$a^2b+ab^2>2ab\sqrt{ab}$，$a^3+b^3>2ab\sqrt{ab}$，

因为$|a^2b+ab^2-2ab\sqrt{ab}|-|a^3+b^3-2ab\sqrt{ab}|=-(a+b)(a-b)^2<0$，

所以$|a^2b+ab^2-2ab\sqrt{ab}|<|a^3+b^3-2ab\sqrt{ab}|$，即$a^2b+ab^2$比$a^3+b^3$接近$2ab\sqrt{ab}$；

(3) $f(x)=\begin{cases}1+\sin x, & x\in(2k\pi-\pi,2k\pi)\\ 1-\sin x, & x\in(2k\pi,2k\pi+\pi)\end{cases}=1-|\sin x|, x\neq k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$，

$f(x)$是偶函数，$f(x)$是周期函数，最小正周期$T=\pi$，函数$f(x)$的最小值为0，

函数$f(x)$在区间$[k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi)$单调递增，在区间$(k\pi,k\pi+\frac{\pi}{2}]$单调递减，$k\in\mathbf{Z}$.

23（本题满分18分）本题共有3个小题，第1小题满分4分，第2小题满分6分，第3小题满分8分.

已知椭圆Γ的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$A(0,b)$、$B(0,-b)$和$Q(a,0)$为$\Gamma$的三个顶

点.

（1）若点M满足$\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AB})$，求点$M$的坐标；

（2）设直线$l_1:y=k_1x+p$交椭圆Γ于C、D两点，交直线$l_2:y=k_2x$于点E. 若$k_1\cdot k_2=-\dfrac{b^2}{a^2}$，证明：$E$为$CD$的中点；

（3）设点P在椭圆Γ内且不在x轴上，如何构作过PQ中点F的直线l，使得l与椭圆Γ的两个交点P_1、P_2满足$\overrightarrow{PP_1}+\overrightarrow{PP_2}=\overrightarrow{PQ}$ $\overrightarrow{PP_1}+\overrightarrow{PP_2}=\overrightarrow{PQ}$？令$a=10$，$b=5$，点$P$的坐标是（-8，-1），若椭圆$\Gamma$上的点$P_1$、$P_2$满足$\overrightarrow{PP_1}+\overrightarrow{PP_2}=\overrightarrow{PQ}$，求点$P_1$、$P_2$的坐标.

解析：(1) $M(\dfrac{a}{2},-\dfrac{b}{2})$；

(2) 由方程组$\begin{cases}y=k_1x+p\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$，消$y$得方程$(a^2k_1^2+b^2)x^2+2a^2k_1px+a^2(p^2-b^2)=0$，

因为直线$l_1:y=k_1x+p$交椭圆Γ于C、D两点，

所以$\Delta>0$，即$a^2k_1^2+b^2-p^2>0$，

设$C(x_1,y_1)$、$D(x_2,y_2)$，CD中点坐标为(x_0,y_0)，

则$\begin{cases}x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{a^2k_1p}{a^2k_1^2+b^2}\\ y_0=k_1x_0+p=\dfrac{b^2p}{a^2k_1^2+b^2}\end{cases}$，

由方程组$\begin{cases}y=k_1x+p\\ y=k_2x\end{cases}$，消$y$得方程$(k_2-k_1)x=p$，

又因为$k_2=-\dfrac{b^2}{a^2k_1}$，所以$\begin{cases}x=\dfrac{p}{k_2-k_1}=-\dfrac{a^2k_1p}{a^2k_1^2+b^2}=x_0\\ y=k_2x=\dfrac{b^2p}{a^2k_1^2+b^2}=y_0\end{cases}$，

故E为CD的中点；

(3) 因为点P在椭圆Γ内且不在x轴上，所以点F在椭圆Γ内，可以求得直线OF的斜率k_2，由$\overrightarrow{PP_1}+\overrightarrow{PP_2}=\overrightarrow{PQ}$知$F$为$P_1P_2$的中点，根据(2)可得直线$l$的斜率$k_1=-\dfrac{b^2}{a^2k_2}$，从而得直线$l$的方程.

$F(1,-\frac{1}{2})$，直线OF的斜率$k_2=-\frac{1}{2}$，直线l的斜率$k_1=-\frac{b^2}{a^2k_2}=\frac{1}{2}$，

解方程组$\begin{cases}y=\frac{1}{2}x-1\\ \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1\end{cases}$，消$y$：$x^2-2x-48=0$，解得$P_1(-6,-4)$、$P_2(8,3)$．