

2009年普通高等学校招生全国统一考试（四川卷）

理科数学

第 I 卷

本试卷共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

参考公式：

如果事件 A, B 互斥，那么

球的表面积公式 $S = 4\pi R^2$

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

其中 R 表示球的半径

如果事件 A, B 相互独立，那么

球的体积公式 $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

其中 R 表示球的半径

一、选择题：

1. 设集合 $S = \{x \mid |x| < 5\}$, $T = \{x \mid x^2 + 4x - 21 < 0\}$, 则 $S \cap T =$

- A. $\{x \mid -7 < x < -5\}$ B. $\{x \mid 3 < x < 5\}$ C. $\{x \mid -5 < x < 3\}$ D. $\{x \mid -7 < x < 5\}$

2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} a + \log_2 x & (\text{当 } x \geq 2 \text{ 时}) \\ \frac{x^2 - 4}{x - 2} & (\text{当 } x < 2 \text{ 时}) \end{cases}$ 在点 $x = 2$ 处连续，则常数 a 的值是

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

3. 复数 $\frac{(1+2i)^2}{3-4i}$ 的值是

- A. -1 B. 1 C. -i D. i

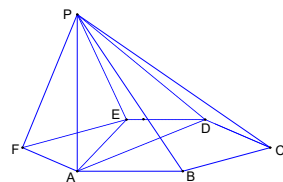
4. 已知函数 $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{2})$ ($x \in R$)，下面结论错误的是

A. 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 2π B. 函数 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上是增函数

C. 函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x = 0$ 对称 D. 函数 $f(x)$ 是奇函数

5.如图, 已知六棱锥 $P-ABCDEF$ 的底面是正六边形, $PA \perp$ 平面 ABC , $PA = 2AB$, 则下列结论正确的是

- A. $PB \perp AD$ B. 平面 $PAB \perp$ 平面 PBC
 C. 直线 $BC \parallel$ 平面 PAE D. 直线 PD 与平面 ABC 所成的角为 45°



6.已知 a, b, c, d 为实数, 且 $c > d$ 。则 “ $a > b$ ” 是 “ $a - c > b - d$ ” 的

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

7.已知双曲线 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 其一条渐近线方程为 $y = x$,

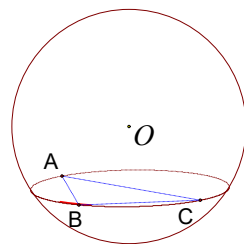
点 $P(\sqrt{3}, y_0)$ 在该双曲线上, 则 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} =$

- A. -12 B. -2 C. 0 D. 4

8.如图, 在半径为3的球面上有 A, B, C 三点, $\angle ABC = 90^\circ$, $BA = BC$, 球心 O 到平面

ABC 的距离是 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, 则 B, C 两点的球面距离是

- A. $\frac{\pi}{3}$ B. π C. $\frac{4\pi}{3}$ D. 2π



9.已知直线 $l_1: 4x - 3y + 6 = 0$ 和直线 $l_2: x = -1$, 抛物线 $y^2 = 4x$ 上一动点

P 到直线 l_1 和直线 l_2 的距离之和的最小值是

- A. 2 B. 3 C. $\frac{11}{5}$ D. $\frac{37}{16}$

10.某企业生产甲、乙两种产品, 已知生产每吨甲产品要用A原料3吨、B原料2吨; 生产每吨乙产品要用A原料1吨、B原料3吨。销售每吨甲产品可获得利润5万元, 每吨乙产品可获得利润3万元, 该企业在一个生产周期内消耗A原料不超过13吨, B原料不超过18吨, 那么该企业可获得最大利润是

- A. 12万元 B. 20万元 C. 25万元 D. 27万元

11.3位男生和3位女生共6位同学站成一排, 若男生甲不站两端, 3位女生中有且只有两位女生相邻, 则不同排法的种数是

- A. 360 B. 228 C. 216 D. 96

12. 已知函数 $f(x)$ 是定义在实数集 R 上的不恒为零的偶函数, 且对任意实数 x 都有

$xf(x+1) = (1+x)f(x)$, 则 $f(f(\frac{5}{2}))$ 的值是

- A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. $\frac{5}{2}$

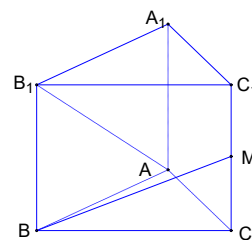
第 II 卷

二、填空题: 本大题共4小题, 每小题4分, 共16分. 把答案填在题中横线上.

13. $(2x - \frac{1}{2x})^6$ 的展开式的常数项是_____ (用数字作答)

14. 若 $\odot O_1: x^2 + y^2 = 5$ 与 $\odot O_2: (x-m)^2 + y^2 = 20 (m \in R)$ 相交于 A、B 两点, 且两圆在点 A 处的切线互相垂直, 则线段 AB 的长度是_____

15. 如图, 已知正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的各条棱长都相等, M 是侧棱 CC_1 的中点, 则异面直线 AB_1 和 BM 所成的角的大小是_____。



16. 设 V 是已知平面 M 上所有向量的集合, 对于映射 $f: V \rightarrow V, a \in V$,

记 a 的象为 $f(a)$ 。若映射 $f: V \rightarrow V$ 满足: 对所有 $a, b \in V$ 及任意实数 λ, μ 都有

$f(\lambda a + \mu b) = \lambda f(a) + \mu f(b)$, 则 f 称为平面 M 上的线性变换。现有下列命题:

- ① 设 f 是平面 M 上的线性变换, 则 $f(0) = 0$
- ② 对 $a \in V$, 设 $f(a) = 2a$, 则 f 是平面 M 上的线性变换;
- ③ 若 e 是平面 M 上的单位向量, 对 $a \in V$, 设 $f(a) = a - e$, 则 f 是平面 M 上的线性变换;
- ④ 设 f 是平面 M 上的线性变换, $a, b \in V$, 若 a, b 共线, 则 $f(a), f(b)$ 也共线。

其中真命题是_____ (写出所有真命题的序号)

三、解答题：本大题共6小题，共74分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分12分)

在 $\triangle ABC$ 中， A, B 为锐角，角 A, B, C 所对应的边分别为 a, b, c ，且

$$\cos 2A = \frac{3}{5}, \sin B = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

(I) 求 $A+B$ 的值；

(II) 若 $a+b = \sqrt{2}-1$ ，求 a, b, c 的值。

18. (本小题满分12分)

为振兴旅游业，四川省2009年面向国内发行总量为2000万张的熊猫优惠卡，向省外人士发行的是熊猫金卡（简称金卡），向省内人士发行的是熊猫银卡（简称银卡）。某旅游公司组织了一个有36名游客的旅游团到四川名胜旅游，其中 $\frac{3}{4}$ 是省外游客，其余是省内游客。

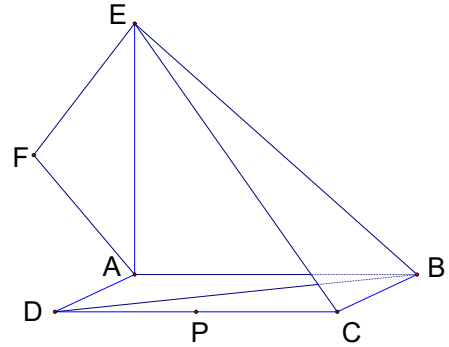
在省外游客中有 $\frac{1}{3}$ 持金卡，在省内游客中有 $\frac{2}{3}$ 持银卡。

(I) 在该团中随机采访3名游客，求恰有1人持金卡且持银卡者少于2人的概率；

(II) 在该团的省内游客中随机采访3名游客，设其中持银卡人数为随机变量 ξ ，求 ξ 的分布列及数学期望 $E\xi$ 。

19 (本小题满分12分)

如图, 正方形 $ABCD$ 所在平面与平面四边形 $ABEF$ 所在平面互相垂直, $\triangle ABE$ 是等腰直角三角形, $AB = AE, FA = FE, \angle AEF = 45^\circ$



(I) 求证: $EF \perp$ 平面 BCE ;

(II) 设线段 CD 的中点为 P , 在直线 AE 上是否存在一点 M , 使得 $PM \parallel$ 平面 BCE ? 若存在, 请指出点 M 的位置, 并证明你的结论; 若不存在, 请说明理由;

(III) 求二面角 $F - BD - A$ 的大小。

20 (本小题满分12分)

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 右准线方程为 $x = 2$ 。

(I) 求椭圆的标准方程;

(II) 过点 F_1 的直线 l 与该椭圆交于 M, N 两点, 且 $|\overrightarrow{F_2M} + \overrightarrow{F_2N}| = \frac{2\sqrt{26}}{3}$, 求直线 l 的方程。

21. (本小题满分12分)

已知 $a > 0$, 且 $a \neq 1$ 函数 $f(x) = \log_a(1 - a^x)$ 。

(I) 求函数 $f(x)$ 的定义域, 并判断 $f(x)$ 的单调性;

(II) 若 $n \in N^*$, 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^{f(n)}}{a^n + a}$;

(III) 当 $a = e$ (e 为自然对数的底数) 时, 设 $h(x) = (1 - e^{f(x)})(x^2 - m + 1)$, 若函数 $h(x)$ 的极值存在, 求实数 m 的取值范围以及函数 $h(x)$ 的极值。

22. (本小题满分14分)

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 对任意的正整数 n , 都有 $a_n = 5S_n + 1$ 成立, 记

$$b_n = \frac{4 + a_n}{1 - a_n} (n \in N^*).$$

(I) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(II) 记 $c_n = b_{2n} - b_{2n-1} (n \in N^*)$, 设数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求证: 对任意正整数 n 都有 $T_n < \frac{3}{2}$;

(III) 设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 R_n . 已知正实数 λ 满足: 对任意正整数 $n, R_n \leq \lambda n$ 恒成立, 求 λ 的最小值。

