2007年湖北高考文科数学真题及答案

本试卷共4页，满分150分，考试时间120分钟.

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在试题卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上指定位置.

2．选择题每小题选出答案后，用2B铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号．答在试题卷上无效.

3．将填空题和解答题用0.5毫米的黑色墨水签字笔或黑色墨水钢笔直接答在答题卡上每题对应的答题区域内．答在试题卷上无效.

4．考试结束，请将本试题卷和答题卡一并上交.

一、选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1． $\tan 690^\circ$ 的值为（　　）

A． $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B． $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C． $\sqrt{3}$　　D． $-\sqrt{3}$

2．如果 $U=\{x\,|\,x\text{是小于9的正整数}\}$， $A=\{1,2,3,4\}$， $B=\{3,4,5,6\}$，那么 $\complement_U A\cap\complement_U B=$（　　）

A． $\{1,2\}$　　B． $\{3,4\}$　　C． $\{5,6\}$　　D． $\{7,8\}$

3．如果 $\left(3x^2-\dfrac{2}{x^3}\right)^n$ 的展开式中含有非零常数项，则正整数 n 的最小值为（　　）

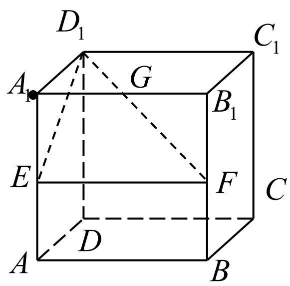
A．10　　B．6　　C．5　　D．3

4．函数 $y=\dfrac{2^x+1}{2^x-1}(x<0)$ 的反函数是（　　）

A． $y=\log_2\dfrac{x+1}{x-1}(x<-1)$　　B． $y=\log_2\dfrac{x+1}{x-1}(x>1)$

C． $y=\log_2\dfrac{x-1}{x+1}(x<-1)$　　D． $y=\log_2\dfrac{x-1}{x+1}(x>1)$

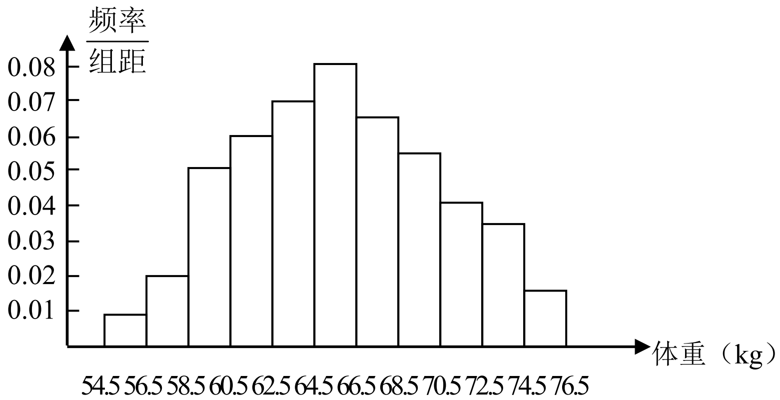
5.在棱长为1的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， E， F 分别为棱 AA_1， BB_1 的中点， G 为棱 A_1B_1 上的一点，且 $A_1G=\lambda(0\leqslant\lambda\leqslant1)$．则点 G 到平面 D_1EF 的距离为（　　）



A． $\sqrt{3}$　　B． $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C． $\dfrac{\sqrt{2}\lambda}{3}$　　D． $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

6．为了了解某学校学生的身体发育情况，抽查了该校100名高中男生的体重情况，根据所得数据画出样本的频率分布直方图如右图所示．根据此图，估计该校2000名高中男生中体重大于70.5公斤的人数为（　　）

A．300　　　B．360　　　C．420　　　D．450



7．将 5 本不同的书全发给 4 名同学，每名同学至少有一本书的概率是（　　）

A．$\dfrac{15}{64}$　　　B．$\dfrac{15}{128}$　　　C．$\dfrac{24}{125}$　　　D．$\dfrac{48}{125}$

8．由直线 $y=x+1$ 上的一点向圆 $(x-3)^2+y^2=1$ 引切线，则切线长的最小值为（　　）

A．1　　　B．$2\sqrt{2}$　　　C．$\sqrt{7}$　　　D．3

9．设 $\boldsymbol{a}=(4,3)$，$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影为 $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$，$\boldsymbol{b}$ 在 x 轴上的投影为 2，且 $|\boldsymbol{b}|\leqslant 14$，则 $\boldsymbol{b}$ 为（　　）

A．$(2,14)$　　　B．$\left(2,-\dfrac{2}{7}\right)$　　　C．$\left(-2,\dfrac{2}{7}\right)$　　　D．$(2,8)$

10．已知 p 是 r 的充分条件而不是必要条件，q 是 r 的充分条件，s 是 r 的必要条件，q 是 s 的必要条件，现有下列命题：

①s 是 q 的充要条件；

②p 是 q 的充分条件而不是必要条件；

③r 是 q 的必要条件而不是充分条件；

④$\neg p$ 是 $\neg s$ 的必要条件而不是充分条件；

⑤r 是 s 的充分条件而不是必要条件．

则正确命题的序号是（　　）

A．①④⑤　　　B．①②④　　　C．②③⑤　　　D．②④⑤

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．把答案填在答题卡相应位置上．

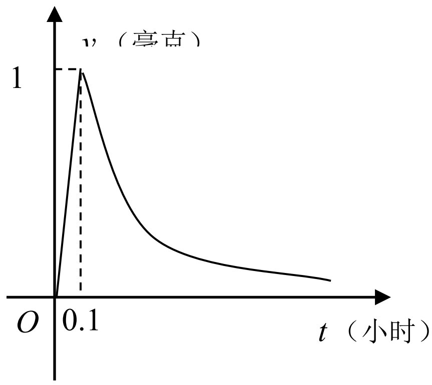
11．设变量 x，y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y+3\geqslant 0, \\ x+y\geqslant 0, \\ -2\leqslant x\leqslant 3, \end{cases}$ 则目标函数 $2x+y$ 的最小值为________.

12．过双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$ 左焦点 F_1 的直线交曲线的左支于 M，N 两点，F_2 为其右焦点，则 $|MF_2|+|NF_2|-|MN|$ 的值为______.

13．已知函数 $y=f(x)$ 的图象在点 $M(1,\ f(1))$ 处的切线方程是 $y=\dfrac{1}{2}x+2$，则 $f(1)+f'(1)=$________.

14．某篮球运动员在三分线投球的命中率是 $\dfrac{1}{2}$，他投球 10 次，恰好投进 3 个球的概率为____________.（用数值作答）

15．为了预防流感，某学校对教室用药熏消毒法进行消毒．已知药物释放过程中，室内每立方米空气中的含药量 y（毫克）与时间 t（小时）成正比；药物释放完毕后，y 与 t 的函数关系式为 $y=\left(\dfrac{1}{16}\right)^{t-a}$（$a$ 为常数），如图所示，根据图中提供的信息，回答下列问题：



（I）从药物释放开始，每立方米空气中的含药量 y（毫克）与时间 t（小时）之间的函数关系式为________________.

（II）据测定，当空气中每立方米的含药量降低到 0.25 毫克以下时，学生方可进教室，那么从药物释放开始，至少需要经过__________________小时后，学生才能回到教室.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 75 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

16.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)-\sqrt{3}\cos 2x$，$x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

（I）求 $f(x)$ 的最大值和最小值；

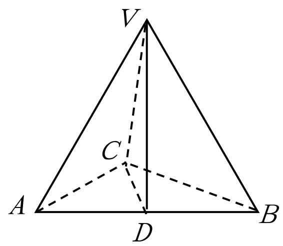
（II）若不等式 $|f(x)-m|<2$ 在 $x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上恒成立，求实数 m 的取值范围.

17.（本小题满分 12 分）

如图，在三棱锥 $V-ABC$ 中，$VC\perp$ 底面ABC，$AC\perp BC$，D 是 AB 的中点，且 $AC=BC=a$，$\angle VDC=\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

（I）求证：平面$VAB\perp$平面VCD；

（II）试确定角θ的值，使得直线BC与平面VAB所成的角为$\dfrac{\pi}{6}$.



18.（本小题满分 12 分）

某商品每件成本 9 元，售价为 30 元，每星期卖出 432 件，如果降低价格，销售量可以增加，且每星期多卖出的商品件数与商品单价的降低值x（单位：元，$0\leqslant x\leqslant 30$）的平方成正比，已知商品单价降低 2 元时，一星期多卖出 24 件.

（I）将一个星期的商品销售利润表示成x的函数；

（II）如何定价才能使一个星期的商品销售利润最大？

19.（本小题满分 12 分）

设二次函数 $f(x)=x^2+ax+a$，方程 $f(x)-x=0$ 的两根 x_1 和 x_2 满足 $0<x_1<x_2<1$.

（I）求实数a的取值范围；

（II）试比较 $f(0)f(1)-f(0)$ 与 $\dfrac{1}{16}$ 的大小．并说明理由.

20.（本小题满分 13 分）

已知数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$满足：$a_1=1$，$a_2=2$，$a_n>0$，$b_n=\sqrt{a_na_{n+1}}$（$n\in\mathbf{N}^*$），且$\{b_n\}$是以q为公比的等比数列.

（I）证明：$a_{n+2}=a_nq^2$；

（II）若 $c_n=a_{2n-1}+2a_{2n}$，证明数列$\{c_n\}$是等比数列；

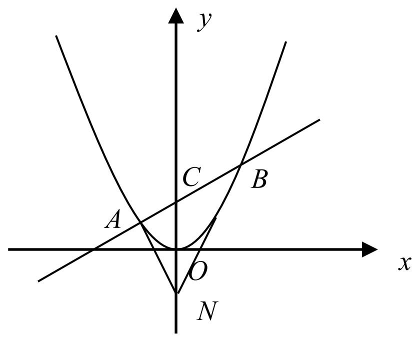
（III）求和：$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\dfrac{1}{a_4}+\cdots+\dfrac{1}{a_{2n-1}}+\dfrac{1}{a_{2n}}$.

21．（本小题满分 14 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，过定点 $C(0，p)$ 作直线与抛物线 $x^2=2py$（$p>0$）相交于 $A，B$ 两点.

（I）若点 N 是点 C 关于坐标原点 O 的对称点，求△ANB 面积的最小值；

（II）是否存在垂直于 y 轴的直线 l，使得 l 被以 AC 为直径的圆截得的弦长恒为定值？若存在，求出 l 的方程；若不存在，说明理由.



（此题不要求在答题卡上画图）

参考答案

一、选择题：本题考查基础知识和基本运算．每小题 5 分，满分 50 分.

1．A　　2．D　　3．C　　4．A　　5．D

6．B　　7．A　　8．C　　9．B　　10．B

二、填空题：本题考查基础知识和基本运算．每小题 5 分，满分 25 分.

11．$-\dfrac{3}{2}$　　12．8　　13．3

14．$\dfrac{15}{128}$　　15．$y=\begin{cases}10t,\left(0\leqslant t\leqslant\dfrac{1}{10}\right),\\ \left(\dfrac{1}{16}\right)^{t-\frac{1}{10}},\left(t>\dfrac{1}{10}\right)\end{cases}$；0.6

三、解答题：本大题共 6 小题，共 75 分．

16．本小题主要考查三角函数和不等式的基本知识，以及运用三角公式、三角函数的图象和性质解题的能力．

解：（Ⅰ）$\because f(x)=\left[1-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+2x\right)\right]-\sqrt{3}\cos 2x=1+\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x$

$=1+2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$．

又$\because x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$，$\therefore\dfrac{\pi}{6}\leqslant 2x-\dfrac{\pi}{3}\leqslant\dfrac{2\pi}{3}$，即$2\leqslant 1+2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)\leqslant 3$，

$\therefore f(x)_{\max}=3,\ f(x)_{\min}=2$．

（Ⅱ）$\because\left|f(x)-m\right|<2\Leftrightarrow f(x)-2<m<f(x)+2$，$x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$，

$\therefore m>f(x)_{\max}-2$ 且 $m<f(x)_{\min}+2$，

$\therefore 1<m<4$，即 m 的取值范围是 $(1,4)$．

17．本小题主要考查线面关系、直线与平面所成角的有关知识，考查空间想象能力和推理运算能力以及应用向量知识解决数学问题的能力．

解法 1：（Ⅰ）$\because AC=BC=a$，$\therefore\triangle ACB$ 是等腰三角形，又 D 是 AB 的中点，

$\therefore CD\perp AB$，又 $VC\perp$ 底面 ABC．$\therefore VC\perp AB$．于是 $AB\perp$ 平面 VCD．

又 $AB\subset$ 平面 VAB，$\therefore$ 平面 $VAB\perp$ 平面 VCD．

（Ⅱ）过点 C 在平面 VCD 内作 $CH\perp VD$ 于 H，则由（Ⅰ）知 $CD\perp$ 平面 VAB．

连接 BH，于是 $\angle CBH$ 就是直线 BC 与平面 VAB 所成的角．

依题意 $\angle CBH=\dfrac{\pi}{6}$，所以

在 $\mathbf{Rt}\triangle CHD$ 中，$CH=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\sin\theta$；

在 $\mathbf{Rt}\triangle BHC$ 中，$CH=a\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{a}{2}$，

$\therefore\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．

$\because 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{4}$.

故当$\theta=\dfrac{\pi}{4}$时，直线BC与平面VAB所成的角为$\dfrac{\pi}{6}$.

解法2：（Ⅰ）以CA，CB，CV所在的直线分别为x轴、y轴、z轴，建立如图所示的空间

直角坐标系，则$C(0,0,0)$，$A(a,0,0)$，$B(0,\ a,0)$，$D\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2},0\right)$，$V\left(0,0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\tan\theta\right)$，

于是，$\overrightarrow{VD}=\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\tan\theta\right)$，$\overrightarrow{CD}=\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2},0\right)$，$\overrightarrow{AB}=(-a,\ a,0)$.

从而$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=(-a,\ a,0)\cdot\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2},0\right)=-\dfrac{1}{2}a^2+\dfrac{1}{2}a^2+0=0$，即$AB\perp CD$.

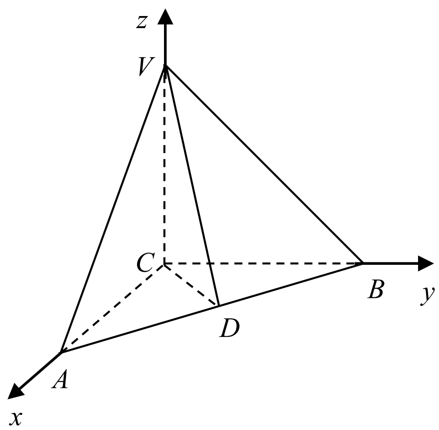
同理$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{VD}=(-a,\ a,0)\cdot\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\tan\theta\right)=-\dfrac{1}{2}a^2+\dfrac{1}{2}a^2+0=0$，

即$AB\perp VD$. 又$CD\cap VD=D$，$\therefore AB\perp$平面VCD.

又$AB\subset$平面VAB.

$\therefore$平面$VAB\perp$平面VCD.

（Ⅱ）设平面VAB的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(x,\ y,\ z)$，



则由$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{VD}=0$.

得$\begin{cases}-ax+ay=0,\\ \dfrac{a}{2}x+\dfrac{a}{2}y-\dfrac{\sqrt{2}}{2}az\tan\theta=0.\end{cases}$

可取$\boldsymbol{n}=(1,1,\sqrt{2}\cot\theta)$，又$\overrightarrow{BC}=(0,-a,0)$，

于是$\sin\dfrac{\pi}{6}=\left|\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}\right|=\dfrac{a}{a\cdot\sqrt{2+2\cot^2\theta}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta$，

即$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\because 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{4}$.

故交$\theta=\dfrac{\pi}{4}$时，直线BC与平面VAB所成的角为$\dfrac{\pi}{6}$.

解法3：（Ⅰ）以点D为原点，以DC，DB所在的直线分别为x轴、y轴，建立如图所示

的空间直角坐标系，则 $D(0,0,0)$，$A\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$，$B\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$，$C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right)$，

$V\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,\frac{\sqrt{2}}{2}a\tan\theta\right)$，于是 $\overrightarrow{DV}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,\frac{\sqrt{2}}{2}a\tan\theta\right)$，$\overrightarrow{DC}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right)$，

$\overrightarrow{AB}=(0,\sqrt{2}a,0)$.

从而 $\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{DC}=(0,\sqrt{2}a,0)\ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right)=0$，即 $AB\perp DC$.

同理 $\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{DV}=(0,\sqrt{2}a,0)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,\frac{\sqrt{2}}{2}a\tan\theta\right)=0$，即 $AB\perp DV$.

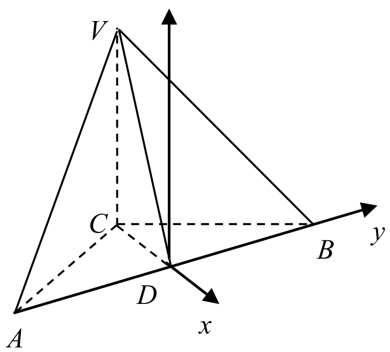
又 $DC\bigcap DV=D$，$\therefore AB\perp$ 平面 VCD .

又 $AB\subset$ 平面 VAB，

$\therefore$ 平面 $VAB\perp$ 平面 VCD .

（Ⅱ）设平面 VAB 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,\ y,\ z)$，

则由 $\boldsymbol{n}\ \overrightarrow{AB}=0,\ \boldsymbol{n}\ \overrightarrow{DV}=0$，得 $\begin{cases}\sqrt{2}ay=0,\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}ax+\frac{\sqrt{2}}{2}az\tan\theta=0.\end{cases}$



可取 $n=(\tan\theta,0,1)$，又 $\overrightarrow{BC}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$，

于是 $\sin\frac{\pi}{6}=\left|\frac{\boldsymbol{n}\ \overrightarrow{BC}}{|\boldsymbol{n}|\ |\overrightarrow{BC}|}\right|=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a\tan\theta}{a\ \sqrt{1+\tan^2\theta}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta$，

即 $\sin\theta=\frac{\pi}{2},\because 0<\theta<\frac{\pi}{2},\therefore\theta=\frac{\pi}{4}$.

故交 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，

即直线 BC 与平面 VAB 所成角为 $\frac{\pi}{6}$.

18．本小题主要考查根据实际问题建立数学模型，以及运用函数、导数的知识解决实际问题的能力．

解：（Ⅰ）设商品降价 x 元，则多卖的商品数为 kx^2，若记商品在一个星期的获利为 $f(x)$，

则依题意有 $f(x)=(30-x-9)(432+kx^2)=(21-x)(432+kx^2)$，

又由已知条件，$24=k\ 2^2$，于是有 $k=6$，

所以 $f(x)=-6x^3+126x^2-432x+9072$，$x\in[0,30]$．

（Ⅱ）根据（Ⅰ），我们有 $f'(x)=-18x^2+252x-432=-18(x-2)(x-12)$．

x	$[0,2)$	2	$(2,12)$	12	$(12,30]$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	极小	↗	极大	↘

故 $x=12$ 时，$f(x)$ 达到极大值．因为 $f(0)=9072$，$f(12)=11264$，所以定价为 $30-12=18$ 元能使一个星期的商品销售利润最大．

19．本小题主要考查二次函数、二次方程的基本性质及二次不等式的解法，考查推理和运算能力．

解法 1：（Ⅰ）令 $g(x)=f(x)-x=x^2+(a-1)x+a$，

则由题意可得 $\begin{cases}\Delta>0,\\ 0<\dfrac{1-a}{2}<1,\\ g(1)>0,\\ g(0)>0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0,\\ -1<a<1,\\ a<3-2\sqrt{2},\ 或a>3+2\sqrt{2},\end{cases}\Leftrightarrow 0<a<3-2\sqrt{2}$．

故所求实数 a 的取值范围是 $(0,3-2\sqrt{2})$．

（II）$f(0)\cdot f(1)-f(0)=g(0)g(1)=2a^2$，令 $h(a)=2a^2$．

$\because$ 当 $a>0$ 时，$h(a)$ 单调增加，$\therefore$ 当 $0<a<3-2\sqrt{2}$ 时，

$0<h(a)<h(3-2\sqrt{2})=2(3-2\sqrt{2})^2=2(17-12\sqrt{2})$

$=2\cdot\dfrac{1}{17+12\sqrt{2}}<\dfrac{1}{16}$，即 $f(0)\cdot f(1)-f(0)<\dfrac{1}{16}$．

解法 2：（I）同解法 1．

（II）$\because f(0)f(1)-f(0)=g(0)g(1)=2a^2$，由（I）知 $0<a<3-2\sqrt{2}$，

$\therefore 4\sqrt{2}a-1<12\sqrt{2}-17<0$．又 $4\sqrt{2}a+1>0$，于是

$2a^2-\dfrac{1}{16}=\dfrac{1}{16}(32a^2-1)=\dfrac{1}{16}(4\sqrt{2}a-1)(4\sqrt{2}a+1)<0$，

即 $2a^2-\dfrac{1}{16}<0$，故 $f(0)f(1)-f(0)<\dfrac{1}{16}$．

解法 3：（I）方程 $f(x)-x=0\Leftrightarrow x^2+(a-1)x+a=0$，由韦达定理得

$x_1+x_2=1-a$， $x_1x_2=a$，于是 $0<x_1<x_2<1\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0,\\x_1+x_2>0,\\x_1x_2>0,\\(1-x_1)+(1-x_2)>0,\\(1-x_1)(1-x_2)>0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a>0,\\a<1,\\a<3-2\sqrt{2}或a>3+2\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow 0<a<3-2\sqrt{2}$.

故所求实数 a 的取值范围是 $(0,3-2\sqrt{2})$.

（II）依题意可设 $g(x)=(x-x_1)(x-x_2)$ ，则由 $0<x_1<x_2<1$ ，得

$f(0)f(1)-f(0)=g(0)g(1)=x_1x_2(1-x_1)(1-x_2)=[x_1(1-x_1)][x_2(1-x_2)]$

$<\left(\dfrac{x_1+1-x_1}{2}\right)^2\left(\dfrac{x_2+1-x_2}{2}\right)^2=\dfrac{1}{16}$，故 $f(0)f(1)-f(0)<\dfrac{1}{16}$.

20．本小题主要考查等比数列的定义，通项公式和求和公式等基本知识及基本的运算技能，考查分析问题能力和推理能力.

解法 1：（I）证：由 $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=q$ ，有 $\dfrac{\sqrt{a_{n+1}a_{n+2}}}{\sqrt{a_na_{n+1}}}=\dfrac{\sqrt{a_{n+2}}}{a_n}=q$ ，$\therefore$ $a_{n+2}=a_nq^2(n\in\mathbf{N^*})$.

（II）证：$\because a_n=q_{n-2}q^2$ ，

$\therefore a_{2n-1}=a_{2n-3}q^2=\cdots=a_1q^{2n-2}$， $a_{2n}=a_{2n-2}q^2=\cdots=a_2q^{n-2}$ ，

$\therefore c_n=a_{2n-1}+2a_{2n}=a_1q^{2n-2}+2a_2q^{2n-2}=(a_1+2a_2)q^{2n-2}=5q^{2n-2}$.

$\therefore\{c_n\}$ 是首项为 5，以 q^2 为公比的等比数列.

（III）由（II）得 $\dfrac{1}{a_{2n-1}}=\dfrac{1}{a_1}q^{2-2n}$ ， $\dfrac{1}{a^{2n}}=\dfrac{1}{a^2}q^{2-2n}$，于是

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{2n}}=\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{2n-1}}\right)+\left(\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_4}+\cdots+\frac{1}{a_{2n}}\right)$$

$$=\frac{1}{a_1}\left(1+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^4}+\cdots+\frac{1}{q^{2n-2}}\right)+\frac{1}{a_2}\left(1+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^4}+\cdots+\frac{1}{q^{2n-2}}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^1}+\cdots+\frac{1}{q^{2n-2}}\right).$$

当 $q=1$ 时，$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_{2n}}=\dfrac{3}{2}\left(1+\dfrac{1}{q^2}+\dfrac{1}{q^4}+\cdots+\dfrac{1}{q^{2n-2}}\right)$

$$=\frac{3}{2}n.$$

当 $q\neq 1$ 时，$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_{2n}}=\dfrac{3}{2}\left(1+\dfrac{1}{q^2}+\dfrac{1}{q^4}+\cdots+\dfrac{1}{q^{2n-2}}\right)$

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{1-q^{-2n}}{1-q^{-2}}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\left[\frac{q^{2n}-1}{q^{2n-2}(q^2-1)}\right].$$

故 $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_{2n}}=\begin{cases}\dfrac{3}{2}n, & q=1,\\ \dfrac{3}{2}\left[\dfrac{q^{2n}-1}{q^{2n-2}(q^2-1)}\right], & q\neq 1.\end{cases}$

解法 2：（I）同解法 1（I）.

（II）证：

$\dfrac{c_{n+1}}{c_n}=\dfrac{a_{2n+1}+2a_{2n+2}}{a_{2n-1}+2a_{2n}}=\dfrac{q^2a_{2n-1}+2q^2a_{2n}}{a_{2n-1}+2a_{2n}}=q^2(n\in\mathbf{N}^*)$，又 $c_1=a_1+2a_2=5$，

$\therefore\{c_n\}$ 是首项为 5，以 q^2 为公比的等比数列.

（III）由（II）的类似方法得 $a_{2n-1}+a_{2n}=(a_1+a_2)q^{2n-2}=3q^{2n-2}$，

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{2n}}=\frac{a_1+a_2}{a_1a_2}+\frac{a_3+a_4}{a_3a_4}+\cdots+\frac{a_{2n-1}+a_{2n}}{a_{2n-1}a_{2n}},$$

$\because \dfrac{a_{2k-1}+a_{2k}}{a_{2k-1}a_{2k}}=\dfrac{3q^{2k-2}}{2q^{4k-4}}=\dfrac{3}{2}q^{-2k+2}$，$k=1,2,\cdots,n$.

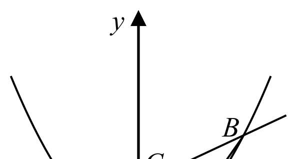
$\therefore \dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_{2k}}=\dfrac{3}{2}(1+q^{-2}+\cdots+q^{-2n+2})$.

下同解法 1.

21．本小题主要考查直线、圆和抛物线等平面解析几何的基础知识，考查综合运用数学知识进行推理运算的能力和解决问题的能力.

解法 1：（Ⅰ）依题意，点 N 的坐标为 $N(0,-p)$，可设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

直线 AB 的方程为 $y=kx+p$，与 $x^2=2py$ 联立得 $\begin{cases}x^2=2py,\\ y=kx+p.\end{cases}$ 消去 y 得



$x^2-2pkx-2p^2=0$.

由韦达定理得 $x_1+x_2=2pk$，$x_1x_2=-2p^2$.

于是 $S_{\triangle AMN}=S_{\triangle BCN}+S_{\triangle ACN}=\frac{1}{2}\cdot 2p|x_1-x_2|$.

$=p|x_1-x_2|=p\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

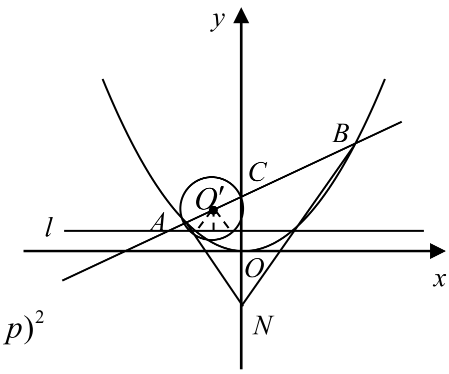
$=p\sqrt{4p^2k^2+8p^2}=2p^2\sqrt{k^2+2}$，

$\therefore$ 当 $k=0$，$(S_{\triangle ABN})_{\min}=2\sqrt{2}p^2$.

（Ⅱ）假设满足条件的直线 l 存在，其方程为 $y=a$，

设 AC 的中点为 O'，l 与 AC 为直径的圆相交于点 P，Q，PQ 的中点为 H，

则 $O'H\perp PQ$，Q' 点的坐标为 $\left(\frac{x_1}{2},\frac{y_1+p}{2}\right)$.



$\because |O'P|=\frac{1}{2}|AC|=\frac{1}{2}\sqrt{x_1^2+(y_1-p)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{y_1^2+p^2}$，

$|O'H|=\left|a-\frac{y_1+p}{2}\right|=\frac{1}{2}|2a-y_1-p|$，

$\therefore |PH|^2=|O'P|^2-|O'H|^2=\frac{1}{4}(y_1^2+p^2)-\frac{1}{4}(2a-y_1-p)^2$

$=\left(a-\frac{p}{2}\right)y_1+a(p-a)$，

$\therefore |PQ|^2=(2|PH|)^2=4\left[\left(a-\frac{p}{2}\right)y_1+a(p-a)\right]$.

令 $a-\frac{p}{2}=0$，得 $a=\frac{p}{2}$，此时 $|PQ|=p$ 为定值，故满足条件的直线 l 存在，其方程为 $y=\frac{p}{2}$，

即抛物线的通径所在的直线.

解法 2：（Ⅰ）前同解法 1，再由弦长公式得

$|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{4p^2k^2+8p^2}$

$=2p\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{k^2+2}$，

又由点到直线的距离公式得 $d=\frac{2p}{\sqrt{1+k^2}}$.

从而$S_{\triangle ABN}=\frac{1}{2}d\left|AB\right|=\frac{1}{2}2p\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{k^2+2}\frac{2p}{\sqrt{1+k^2}}=2p^2\sqrt{k^2+2}$，

∴当$k=0$时，$(S_{\triangle ABN})_{\max}=2\sqrt{2}p^2$.

（Ⅱ）假设满足条件的直线l存在，其方程为$y=a$，则以AC为直径的圆的方程为

$(x-0)(x-x_1)-(y-p)(y-y_1)=0$，

将直线方程$y=a$代入得$x^2-x_1x+(a-p)(a-y_1)=0$，

则$\triangle=x_1^2-4(a-p)(a-y_1)=4\left[\left(a-\frac{p}{2}\right)y_1+a(p-a)\right]$.

设直线l与以AC为直径的圆的交点为$P(x_3,y_3)$，$Q(x_4,y_4)$，

则有$\left|PQ\right|=\left|x_3-x_4\right|=\sqrt{4\left(a-\frac{p}{2}\right)y_1+a(p-a)}=2\sqrt{\left(a-\frac{p}{2}\right)y_1+a(p-a)}$.

令$a-\frac{p}{2}=0$，得$a=\frac{p}{2}$，此时$\left|PQ\right|=p$为定值，故满足条件的直线l存在，其方程为

$y=\frac{p}{2}$，

即抛物线的通径所在的直线.