

2015 年普通高等学校招生全国统一考试（安徽卷）

数学（理科）

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，第 I 卷第 1 至第 2 页，第 II 卷第 3 至第 4 页.全卷满分 150 分，考试时间 120 分钟.

考生注意事项：

1. 答题前，务必在试卷、答题卡规定的地方填写自己的姓名、座位号，并认真核对答题卡上所粘贴的条形码中姓名、座位号与本人姓名、座位号是否一致.务必在答题卡背面规定的地方填写姓名和座位号后两位.
2. 答第 I 卷时，每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.
3. 答第 II 卷时，必须使用 0.5 毫米的黑色墨水签字笔在答题卡上书写，要求字体工整、笔迹清晰.作图题可先用铅笔在答题卡规定的位置画出，确认后再用 0.5 毫米的黑色墨水签字笔描清楚.必须在题号所指示的答题区域作答，超出答题区域书写的答案无效，在答题卷、草稿纸上答题无效.
4. 考试结束，务必将试卷和答题卡一并上交.

参考公式：

如果事件 A 与 B 互斥，那么 $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

标准差 $s = \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2]}$ ，其中 $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$.

第 I 卷（选择题 共 50 分）

一、选择题：本大题共 10 个小题；每小题 5 分，共 50 分. 在每小题给出的四个选项中，有且只有一项是符合题目要求的.

(1) 设 i 是虚数单位，则复数 $\frac{2i}{1-i}$ 在复平面内所对应的点位于 ()

- (A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

【答案】B

【解析】由题意 $\frac{2i}{1-i} = \frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-2+2i}{2} = -1+i$ ，其对应的点坐标为 $(-1, 1)$ ，位于第二象限，故选 B.

【考点定位】1.复数的运算；2.复数的几何意义.

【名师点睛】复数的四则运算问题主要是要熟记各种运算法则，尤其是除法运算，要将复数分母实数化（分母乘以自己的共轭复数），这也历年考查的重点；另外，复数 $z = a + bi$ 在复平面内一一对应的点为 $Z(a, b)$.

(2) 下列函数中，既是偶函数又存在零点的是 ()

- (A) $y = \cos x$ (B) $y = \sin x$ (C) $y = \ln x$ (D) $y = x^2 + 1$

【答案】A

【解析】由选项可知， B, C 项均不是偶函数，故排除 B, C ， A, D 项是偶函数，但 D 项与 x 轴没有交点，即 D 项的函数不存在零点，故选 A.

【考点定位】1. 函数的奇偶性；2. 函数零点的概念.

【名师点睛】函数的性质问题以及函数零点问题是高考的高频考点，考生需要对初高中阶段学习的十几种初等函数的单调性、奇偶性、周期性以及对称性非常熟悉；另外，函数零点的几种等价形式：函数

$y = f(x) - g(x)$ 有零点 \Leftrightarrow 函数 $y = f(x) - g(x)$ 在 x 轴有交点 \Leftrightarrow 方程 $f(x) - g(x) = 0$ 有根 \Leftrightarrow 函数

$y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 有交点.

(3) 设 $p: 1 < x < 2, q: 2^x > 1$ ，则 p 是 q 成立的 ()

- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】由 $q: 2^x > 2^0$ ，解得 $x > 0$ ，易知， p 能推出 q ，但 q 不能推出 p ，故 p 是 q 成立的充分不必要条件，选 A.

【考点定位】1. 指数运算；2. 充要条件的概念.

【名师点睛】对于指对数运算问题，需要记住常见的等式关系，如 $1 = 2^0, 2 = 2^1, 1 = \log_2 2, 0 = \log_2 1$ ，进而转化成同底的问题进行计算；充要关系的判断问题，可以分为由“ $p: 1 < x < 2$ ”推证“ $q: x > 0$ ”以及由“ $q: x > 0$ ”推证“ $p: 1 < x < 2$ ”.

(4) 下列双曲线中，焦点在 y 轴上且渐近线方程为 $y = \pm 2x$ 的是 ()

(A) $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$

(B) $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$

(C) $\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$

(D)

$y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$

【答案】C

【解析】由题意，选项A,B的焦点在x轴，故排除A,B，C项的渐近线方程为 $\frac{y^2}{4} - x^2 = 0$ ，即 $y = \pm 2x$ ，

故选C.

【考点定位】1.双曲线的渐近线.

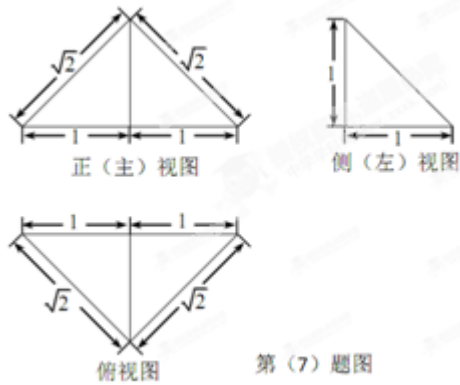
【名师点睛】双曲线确定焦点位置的技巧： x^2 前的系数是正，则焦点就在x轴，反之，在y轴；在双曲线

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的渐近线方程中 $\frac{b}{a}, \frac{a}{b}$ 容易混淆，只要根据双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的渐近线方程是 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ ，

便可防止上述错误.

(5) 已知 m, n 是两条不同直线， α, β 是两个不同平面，则下列命题正确的是（ ）

- (A) 若 α, β 垂直于同一平面，则 α 与 β 平行
- (B) 若 m, n 平行于同一平面，则 m 与 n 平行
- (C) 若 α, β 不平行，则在 α 内不存在与 β 平行的直线
- (D) 若 m, n 不平行，则 m 与 n 不可能垂直于同一平面



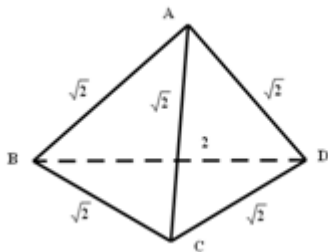
第(7)题图

【答案】B

【解析】由题意，该四面体的直观图如下， $\triangle ABD, \triangle BCD$ 是等腰直角三角形， $\triangle ABC, \triangle ACD$ 是等边三角

形，则 $S_{\triangle BCD} = S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 1, S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，所以四面体的表面积

$S = S_{\triangle BCD} + S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD} = 2 \times 1 + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$ ，故选 B.



【考点定位】1.空间几何体的三视图与直观图；2.空间几何体表面积的求法.

【名师点睛】三视图是高考中的热门考点，解题的关键是熟悉三视图的排放规律：长对正，高平齐，宽相等.同时熟悉常见几何体的三视图，这对于解答这类问题非常有帮助，本题还应注意常见几何体的体积和表面积公式.

(8) $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形，已知向量 \vec{a}, \vec{b} 满足 $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a}$ ， $\overrightarrow{AC} = 2\vec{a} + \vec{b}$ ，则下列结论正确的是 ()

- (A) $|\vec{b}| = 1$ (B) $\vec{a} \perp \vec{b}$ (C) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ (D) $(4\vec{a} + \vec{b}) \perp \overrightarrow{BC}$

【答案】C

【解析】由 $f(x) = \frac{ax+b}{(x+c)^2}$ 及图象可知， $x \neq -c$ ， $-c > 0$ ，则 $c < 0$ ；当 $x=0$ 时， $f(0) = \frac{b}{c^2} > 0$ ，所以

$b > 0$ ；当 $y=0$ ， $ax+b=0$ ，所以 $x = -\frac{b}{a} > 0$ ，所以 $a < 0$ 。故 $a < 0$ ， $b > 0$ ， $c < 0$ ，选 C。

【考点定位】1.函数的图象与应用.

【名师点睛】函数图象的分析判断主要依据两点：一是根据函数的性质，如函数的奇偶性、单调性、值域、定义域等；二是根据特殊点的函数值，采用排除的方法得出正确的选项.本题主要是通过函数解析式判断其定义域，并在图形中判断出来，另外，根据特殊点的位置能够判断 a, b, c 的正负关系.

(10) 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ (A, ω, φ 均为正的常数) 的最小正周期为 π ，当 $x = \frac{2\pi}{3}$ 时，函数 $f(x)$ 取得最小值，则下列结论正确的是 ()

(A) $f(2) < f(-2) < f(0)$

(B) $f(0) < f(2) < f(-2)$

(C) $f(-2) < f(0) < f(2)$

(D) $f(2) < f(0) < f(-2)$

【答案】A

【解析】由题意， $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, \varphi > 0$)， $T = \frac{2\pi}{|\omega|} = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$ ，所以 $\omega = 2$ ，则

$f(x) = A \sin(2x + \varphi)$ ，而当 $x = \frac{2\pi}{3}$ 时， $2 \times \frac{2\pi}{3} + \varphi = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z$ ，解得 $\varphi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in Z$ ，

所以 $f(x) = A \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ ($A > 0$), 则当 $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, 即 $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in Z$ 时, $f(x)$ 取得最大

值. 要比较 $f(2), f(-2), f(0)$ 的大小, 只需判断 $2, -2, 0$ 与最近的最高点处对称轴的距离大小, 距离越大,

值越小, 易知 $0, 2$ 与 $\frac{\pi}{6}$ 比较近, -2 与 $-\frac{5\pi}{6}$ 比较近, 所以, 当 $k=0$ 时, $x = \frac{\pi}{6}$, 此时 $|0 - \frac{\pi}{6}| \doteq 0.52$,

$|2 - \frac{\pi}{6}| \doteq 1.47$, 当 $k=-1$ 时, $x = -\frac{5\pi}{6}$, 此时 $|-2 - (-\frac{5\pi}{6})| \doteq 0.6$, 所以 $f(2) < f(-2) < f(0)$, 故选 A.

【考点定位】 1. 三角函数的图象与应用; 2. 函数值的大小比较.

【名师点睛】 对于三角函数中比较大小的问题, 一般的步骤是: 第一步, 根据题中所给的条件写出三角函数解析式, 如本题通过周期判断出 ω , 通过最值判断出 φ , 从而得出三角函数解析式; 第二步, 需要比较大小的函数值代入解析式或者通过函数图象进行判断, 本题中代入函数值计算不太方便, 故可以根据函数图象的特征进行判断即可.

第 II 卷 (非选择题 共 100 分)

考生注意事项:

请用 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上作答, 在试题卷上答题无效.

二. 填空题: 本大题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分. 把答案填在答题卡的相应位置.

(11) $(x^3 + \frac{1}{x})^7$ 的展开式中 x^5 的系数是_____. (用数字填写答案)

【答案】 35

【解析】 由题意, 二项式 $(x^3 + \frac{1}{x})^7$ 展开的通项 $T_{r+1} = C_7^r (x^3)^{7-r} (\frac{1}{x})^r = C_7^r x^{21-4r}$, 令 $21-4r=5$, 得 $r=4$,

则 x^5 的系数是 $C_7^4 = 35$.

【考点定位】 1. 二项式定理的展开式应用.

【名师点睛】 常规问题直接利用二项式定理求解, 其中通项是核心, 运算是保证, 比较复杂的问题要回到最本质的计数原理去解决, 而不是一味利用公式. 另外, 概念不清, 涉及幂的运算出现错误, 或者不能从最本质的计数原理出发解决问题, 盲目套用公式都是考试中常犯的错误.

(12) 在极坐标中, 圆 $\rho = 8 \sin \theta$ 上的点到直线 $\theta = \frac{\pi}{3}$ ($\rho \in R$) 距离的最大值是_____.

【答案】 6

【解析】 由题意 $\rho^2 = \rho \sin \theta$, 转化为普通方程为 $x^2 + y^2 = 8y$, 即 $x^2 + (y-4)^2 = 16$; 直线

$$\theta = \frac{\pi}{3} (\rho \in R)$$

转化为普通方程为 $y = \sqrt{3}x$ ，则圆上的点到直线的距离最大值是通过圆心的直线上半径加上圆心到直线的距离，设圆心到直线的距离为 d ，圆的半径为 r ，则圆上的点到直线距离的最大值

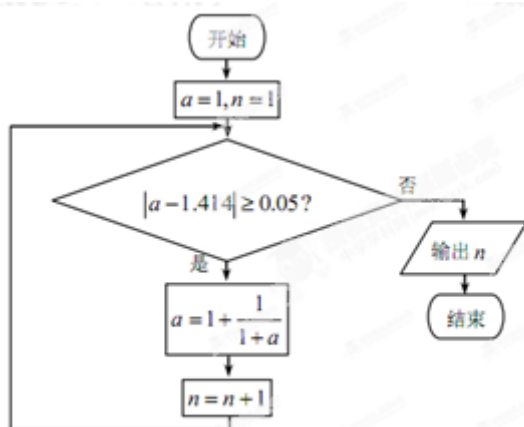
$$D = d + r = \frac{|0 - 4|}{\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}} + 4 = 2 + 4 = 6.$$

【考点定位】 1. 极坐标方程与普通方程的转化；2. 圆上的点到直线的距离.

【名师点睛】 对于极坐标与参数方程的问题，考生要把握好如何将极坐标方程转化成普通方程，抓住核心： $\rho^2 = x^2 + y^2, \rho \cos \theta = x, \rho \sin \theta = y$ ，普通方程转化成极坐标方程，抓住核心： $x^2 + y^2 = \rho^2, \tan \theta = \frac{y}{x}$.

圆上的点到直线的距离最大值或最小值，要考虑到圆的半径加上（或减去）圆心到直线的距离.

(13) 执行如图所示的程序框图（算法流程图），输出的 n 为_____.



(第13题图)

【答案】 4

【解析】 由题意，程序框图循环如下：① $a=1, n=1$ ；② $a=1+\frac{1}{1+1}=\frac{3}{2}, n=2$ ；③ $a=1+\frac{1}{\frac{3}{2}+1}=\frac{7}{5}, n=3$ ；④ $a=1+\frac{1}{\frac{7}{5}+1}=\frac{17}{12}, n=4$ ，此时 $|\frac{17}{12}-1.414| \approx 0.003 < 0.005$ ，所以输出 $n=4$.

【考点定位】 1. 程序框图的应用.

【名师点睛】 解决算法问题的关键是读懂程序框图，明晰顺序结构、条件结构、循环结构的真正含义，本题巧妙而自然地将算法、不等式、函数赋值交汇在一起，用循环结构来进行考查. 这类问题可能出现的错误：① 读不懂程序框图；② 循环出错；③ 计算出错.

(14) 已知数列 $\{a_n\}$ 是递增的等比数列, $a_1 + a_4 = 9, a_2 a_3 = 8$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和等于_____.

【答案】 $2^n - 1$

【解析】 由题意, $\begin{cases} a_1 + a_4 = 9 \\ a_2 \cdot a_3 = a_1 \cdot a_4 = 8 \end{cases}$, 解得 $a_1 = 1, a_4 = 8$ 或者 $a_1 = 8, a_4 = 1$, 而数列 $\{a_n\}$ 是递增的等比数

列, 所以 $a_1 = 1, a_4 = 8$, 即 $q^3 = \frac{a_4}{a_1} = 8$, 所以 $q = 2$, 因而数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1.$$

【考点定位】 1. 等比数列的性质; 2. 等比数列的前 n 项和公式.

【名师点睛】 对于等差数列与等比数列综合考查的问题, 要做到: ①熟练掌握等差或等比数列的性质, 尤其是 $m+n=p+q$, 则 $a_m + a_n = a_p + a_q$ (等差数列), $a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q$ (等比数列); ②注意题目给定的限制条件, 如本题中“递增”, 说明 $q > 1$; ③要熟练掌握数列中相关的通项公式, 前 n 项和公式等.

(15) 设 $x^3 + ax + b = 0$, 其中 a, b 均为实数, 下列条件中, 使得该三次方程仅有一个实根的是_____. (写出所有正确条件的编号)

- ① $a = -3, b = -3$; ② $a = -3, b = 2$; ③ $a = -3, b > 2$; ④ $a = 0, b = 2$; ⑤ $a = 1, b = 2$.

【答案】①③④⑤

【解析】令 $f(x) = x^3 + ax + b$ ，求导得 $f'(x) = 3x^2 + a$ ，当 $a \geq 0$ 时， $f'(x) \geq 0$ ，所以 $f(x)$ 单调递增，且至少存在一个数使 $f(x) < 0$ ，至少存在一个数使 $f(x) > 0$ ，所以 $f(x) = x^3 + ax + b$ 必有一个零点，即方程 $x^3 + ax + b = 0$ 仅有一根，故④⑤正确；当 $a < 0$ 时，若 $a = -3$ ，则 $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$ ，易知， $f(x)$ 在 $(-\infty, -1), (1, +\infty)$ 上单调递增，在 $[-1, 1]$ 上单调递减，所以 $f(x)_{\text{极大}} = f(-1) = -1 + 3 + b = b + 2$ ， $f(x)_{\text{极小}} = f(1) = 1 - 3 + b = b - 2$ ，要使方程仅有一根，则 $f(x)_{\text{极大}} = f(-1) = -1 + 3 + b = b + 2 < 0$ 或者 $f(x)_{\text{极小}} = f(1) = 1 - 3 + b = b - 2 > 0$ ，解得 $b < -2$ 或 $b > 2$ ，故①③正确。所以使得三次方程仅有一个实根的是①③④⑤。

【考点定位】1. 函数零点与方程的根之间的关系；2. 函数的单调性及其极值。

【名师点睛】高考中若出现方程问题，通常情况下一定要考虑其对应的函数，了解函数的大致图象特征，便于去分析方程；若出现的是高次函数或非基本初等函数，要利用导数这一工具进行分析其单调性、极值与最值；函数零点问题考查时，要经常使用零点存在性定理。

三. 解答题：本大题共 6 小题，共 75 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 解答写在答题卡上的指定区域内。

(16) (本小题满分 12 分)

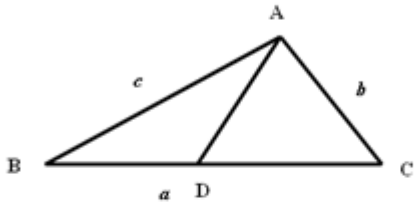
在 $\triangle ABC$ 中， $A = \frac{3\pi}{4}$ ， $AB = 6$ ， $AC = 3\sqrt{2}$ ，点 D 在 BC 边上， $AD = BD$ ，求 AD 的长。

【答案】 $\sqrt{10}$

【解析】

试题分析：根据题意，设出 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对边的长分别是 a, b, c ，由余弦定理求出 a 的长度，再由正弦定理求出角 B 的大小，在 $\triangle ABD$ 中，利用正弦定理即可求出 AD 的长度。

试题解析：如图，



设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对边的长分别是 a, b, c ，由余弦定理得

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle BAC = (3\sqrt{2})^2 + 6^2 - 2 \times 3\sqrt{2} \times 6 \times \cos \frac{3\pi}{4} = 18 + 36 - (-36) = 90,$$

所以 $a = 3\sqrt{10}$.

$$\text{又由正弦定理得 } \sin B = \frac{b \sin \angle BAC}{a} = \frac{3}{3\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

$$\text{由题设知 } 0 < B < \frac{\pi}{4}, \text{ 所以 } \cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \sqrt{1 - \frac{1}{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

$$\text{在 } \triangle ABD \text{ 中, 由正弦定理得 } AD = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin(\pi - 2B)} = \frac{6 \sin B}{2 \sin B \cos B} = \frac{3}{\cos B} = \sqrt{10}.$$

【考点定位】1.正弦定理、余弦定理的应用.

【名师点睛】三角函数考题大致可以分为以下几类：与三角函数单调性有关的问题，应用同角变换和诱导公式求值、化简、证明的问题，与周期性、对称性有关的问题，解三角形及其应用问题等.其中解三角形可能会放在测量、航海等实际问题中去考查（常以解答题的形式出现）.本题主要通过给定条件进行画图，利

用数形结合的思想，找准需要研究的三角形，利用正弦、余弦定理进行解题.

(17) (本小题满分 12 分)

已知 2 件次品和 3 件正品放在一起，现需要通过检测将其区分，每次随机检测一件产品，检测后不放回，直到检测出 2 件次品或者检测出 3 件正品时检测结束.

(I) 求第一次检测出的是次品且第二次检测出的是正品的概率;

(II) 已知每检测一件产品需要费用 100 元, 设 X 表示直到检测出 2 件次品或者检测出 3 件正品时所需要的检测费用 (单位: 元), 求 X 的分布列和均值 (数学期望).

【答案】 (I) $\frac{3}{10}$; (II) 350.

【解析】

试题分析: (I) 依据题目所给的条件可以先设“第一次检查出的是次品且第二次检测出的是正品”为事件 A .

得出 $P(A) = \frac{A_2^1 A_3^1}{A_5^2} = \frac{3}{10}$. (II) X 的可能取值为 200, 300, 400. 依此求出各自的概率 $\frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{6}{10}$, 列出

分布列, 求出期望 $EX = 200 \times \frac{1}{10} + 300 \times \frac{3}{10} + 400 \times \frac{6}{10} = 350$.

试题解析: (I) 记“第一次检查出的是次品且第二次检测出的是正品”为事件 A .

$$P(A) = \frac{A_2^1 A_3^1}{A_5^2} = \frac{3}{10}.$$

(II) X 的可能取值为 200, 300, 400.

$$P(X = 200) = \frac{A_2^2}{A_5^2} = \frac{1}{10}.$$

$$P(X = 300) = \frac{A_3^3 + C_2^1 C_3^1 A_2^2}{A_5^3} = \frac{3}{10}.$$

$$P(X = 400) = 1 - P(X = 200) - P(X = 300) = 1 - \frac{1}{10} - \frac{3}{10} = \frac{6}{10}.$$

故 X 的分布列为

X	200	300	400
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$

$$EX = 200 \times \frac{1}{10} + 300 \times \frac{3}{10} + 400 \times \frac{6}{10} = 350.$$

【考点定位】 1. 概率; 2. 随机变量的分布列与期望.

【名师点睛】 高考中常常通过实际背景考查互斥事件、对立事件、相互独立事件、独立重复试验的概率计算及离散型随机变量的分布列和数学期望的计算，同时也考查二项分布、超几何分布等特殊的概率模型. 解读此类问题时要注意分清类型，运用相应的知识进行解答. 本题易犯的错误的关系混乱，没有理解题中给定的实际意义.

(18) (本小题满分 12 分)

设 $n \in N^*$ ， x_n 是曲线 $y = x^{2n+2} + 1$ 在点 $(1, 2)$ 处的切线与 x 轴交点的横坐标.

(I) 求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式;

(II) 记 $T_n = x_1^2 x_3^2 \cdots x_{2n-1}^2$ ，证明 $T_n \geq \frac{1}{4n}$.

【答案】 (I) $x_n = \frac{n}{n+1}$; (II) $T_n \geq \frac{1}{4n}$.

【解析】

试题分析: (I) 对题中所给曲线的解析式进行求导，得出曲线 $y = x^{2n+2} + 1$ 在点 $(1, 2)$ 处的切线斜率为

$2n+2$. 从而可以写出切线方程为 $y - 2 = (2n+2)(x-1)$. 令 $y = 0$. 解得切线与 x 轴交点的横坐标

$$x_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

(II) 要证 $T_n \geq \frac{1}{4n}$ ，需考虑通项 x_{2n-1}^2 ，通过适当放缩能够使得每项相消即可证明. 思路如下：先表示

$$T_n = x_1^2 x_3^2 \cdots x_{2n-1}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdots \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^2, \text{ 求出初始条件当 } n=1 \text{ 时, } T_1 = \frac{1}{4}. \text{ 当 } n \geq 2 \text{ 时, 单独考虑 } x_{2n-1}^2,$$

并放缩得 $x_{2n-1}^2 = \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^2 = \frac{(2n-1)^2}{(2n)^2} > \frac{(2n-1)^2 - 1}{(2n)^2} = \frac{4n^2 - 4n}{(2n)^2} = \frac{n-1}{n}$ ，所以

$$T_n > \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} = \frac{1}{4n}, \text{ 综上可得对任意的 } n \in N^*, \text{ 均有 } T_n \geq \frac{1}{4n}.$$

试题解析: (I) 解: $y' = (x^{2n+2} + 1)' = (2n+2)x^{2n+1}$ ，曲线 $y = x^{2n+2} + 1$ 在点 $(1, 2)$ 处的切线斜率为 $2n+2$.

从而切线方程为 $y - 2 = (2n+2)(x-1)$. 令 $y = 0$ ，解得切线与 x 轴交点的横坐标 $x_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$.

(II) 证: 由题设和 (I) 中的计算结果知

$$T_n = x_1^2 x_3^2 \cdots x_{2n-1}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdots \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^2.$$

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } T_1 = \frac{1}{4}.$$

当 $n \geq 2$ 时, 因为 $x_{2n-1}^2 = \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^2 = \frac{(2n-1)^2}{(2n)^2} > \frac{(2n-1)^2 - 1}{(2n)^2} = \frac{4n^2 - 4n}{(2n)^2} = \frac{n-1}{n}$,

所以 $T_n > \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \dots \times \frac{n-1}{n} = \frac{1}{4n}$.

综上可得对任意的 $n \in N^*$, 均有 $T_n \geq \frac{1}{4n}$.

【考点定位】 1. 曲线的切线方程; 2. 数列的通项公式; 3. 放缩法证明不等式.

【名师点睛】 数列是特殊的函数, 不等式是深刻认识函数与数列的重要工具, 三者的综合是近几年高考命题的新热点, 且数列的重心已经偏移到不等式的证明与求解中, 而不再是以前的递推求通项, 此类问题在 2010 年、2012 年、2013 年安徽高考解答题中都曾考过. 对于数列问题中求和类 (或求积类) 不等式证明, 如果是通过放缩的方法进行证明的, 一般有两种类型: 一种是能够直接求和 (或求积), 再放缩; 一种是不能直接求和 (或求积), 需要放缩后才能求和 (或求积), 求和 (或求积) 后再进行放缩. 在后一种类型中, 一定要注意放缩的尺度, 二是要注意从哪一项开始放缩. 学科网

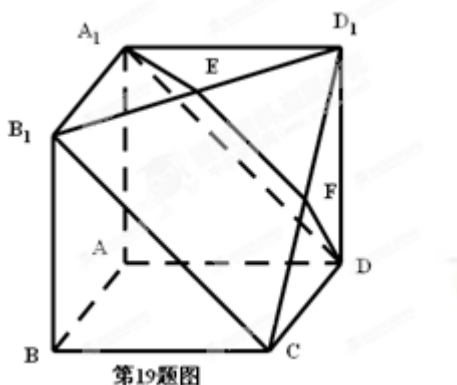
(19) (本小题满分 13 分)

如图所示, 在多面体 $A_1B_1D_1DCBA$, 四边形 AA_1B_1B , ADD_1A_1 , $ABCD$ 均为正方形, E 为 B_1D_1 的中

点, 过 A_1, D, E 的平面交 CD_1 于 F .

(I) 证明: $EF \parallel B_1C$;

(II) 求二面角 $E-A_1D-B_1$ 余弦值.



第19题图

【答案】 (I) $EF \parallel B_1C$; (II) $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

【解析】

试题分析：(I) 证明：依据正方形的性质可知 $A_1B_1 \parallel AB \parallel DC$ ，且 $A_1B_1 = AB = DC$ ，从而 A_1B_1CD 为平行四边形，则 $B_1C \parallel A_1D$ ，根据线面平行的判定定理知 $B_1C \parallel$ 面 A_1DE ，再由线面平行的性质定理知 $EF \parallel B_1C$ 。(II) 因为四边形 AA_1B_1B ， ADD_1A_1 ， $ABCD$ 均为正方形，所以

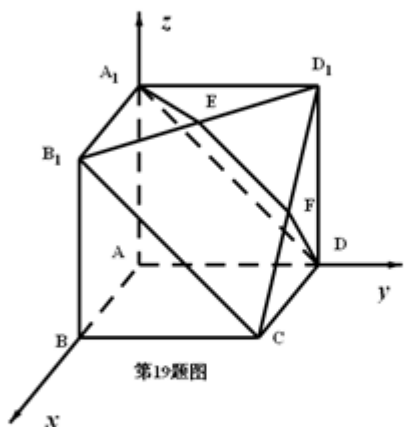
$AA_1 \perp AB$ ， $AA_1 \perp AD$ ， $AD \perp AB$ ，且 $AA_1 = AB = AD$ ，可以建以 A 为原点，分别以 \overline{AB} ， \overline{AD} ， $\overline{AA_1}$ 为 x 轴， y 轴， z 轴单位正向量的平面直角坐标系，写出相关的点的坐标，设出面 A_1DE 的法向量 $\vec{n}_1 = (r_1, s_1, t_1)$ 。由

$\vec{n}_1 \perp \overline{A_1E}$ ， $\vec{n}_1 \perp \overline{A_1D}$ 得 r_1, s_1, t_1 应满足的方程组 $\begin{cases} 0.5r_1 + 0.5s_1 = 0 \\ s_1 - t_1 = 0 \end{cases}$ ， $(-1, 1, 1)$ 为其一组解，所以可取

$\vec{n}_1 = (-1, 1, 1)$ 。同理 A_1B_1CD 的法向量 $\vec{n}_2 = (0, 1, 1)$ 。所以结合图形知二面角 $E-A_1D-B$ 的余弦值为

$$\frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{2}{\sqrt{3} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

试题解析：(I) 证明：由正方形的性质可知 $A_1B_1 \parallel AB \parallel DC$ ，且 $A_1B_1 = AB = DC$ ，所以四边形 A_1B_1CD 为平行四边形，从而 $B_1C \parallel A_1D$ ，又 $A_1D \subset$ 面 A_1DE ， $B_1C \not\subset$ 面 A_1DE ，于是 $B_1C \parallel$ 面 A_1DE ，又 $B_1C \subset$ 面 B_1CD_1 ，而面 $A_1DE \cap$ 面 $B_1CD_1 = EF$ ，所以 $EF \parallel B_1C$ 。



(II) 因为四边形 AA_1B_1B ， ADD_1A_1 ， $ABCD$ 均为正方形，所以 $AA_1 \perp AB$ ， $AA_1 \perp AD$ ， $AD \perp AB$ ， $AA_1 = AB = AD$ ，以 A 为原点，分别以 \overrightarrow{AB} ， \overrightarrow{AD} ， $\overrightarrow{AA_1}$ 为 x 轴， y 轴， z 轴单位正向量建立，如图所示的空间直角坐标系，可得点的坐标 $A(0, 0, 0)$ ， $B(1, 0, 0)$ ， $D(0, 1, 0)$ ， $A_1(0, 0, 1)$ ， $B_1(1, 0, 1)$ ， $D_1(0, 1, 1)$ 。而 E 点为 B_1D_1 的中点，所以 E 点的坐标为 $(0.5, 0.5, 1)$ 。

设面 A_1DE 的法向量 $\vec{n}_1 = (r_1, s_1, t_1)$ 。而该面上向量 $\overrightarrow{A_1E} = (0.5, 0.5, 0)$ ， $\overrightarrow{A_1D} = (0, 1, -1)$ ，由

$$\vec{n}_1 \perp \overrightarrow{A_1E}, \vec{n}_1 \perp \overrightarrow{A_1D} \text{ 得 } r_1, s_1, t_1 \text{ 应满足的方程组 } \begin{cases} 0.5r_1 + 0.5s_1 = 0 \\ s_1 - t_1 = 0 \end{cases}, (-1, 1, 1) \text{ 为其一组解，所以可取}$$

$\vec{n}_1 = (-1, 1, 1)$ 。设面 A_1B_1CD 的法向量 $\vec{n}_2 = (r_2, s_2, t_2)$ ，而该面上向量 $\overrightarrow{A_1B_1} = (1, 0, 0)$ ， $\overrightarrow{A_1D} = (0, 1, -1)$ ，由此

$$\text{同理可得 } \vec{n}_2 = (0, 1, 1) \text{。所以结合图形知二面角 } E-A_1D-B \text{ 的余弦值为 } \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{2}{\sqrt{3} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \text{。}$$

【考点定位】1. 线面平行的判定定理与性质定理；2. 二面角的求解。

【名师点睛】解答空间几何体中的平行、垂直关系时，一般要根据已知条件把空间中的线线、线面、面面之间的平行、垂直关系进行转化，转化时要正确运用有关的定理，找出足够的条件进行推理；求二面角，则通过求两个半平面的法向量的夹角间接求解。此时建立恰当的空间直角坐标系以及正确求出各点的坐标是解题的关键所在。学科网

(20) (本小题满分 13 分)

设椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 点 O 为坐标原点, 点 A 的坐标为 $(a, 0)$, 点 B 的坐标为

$(0, b)$, 点 M 在线段 AB 上, 满足 $|BM| = 2|MA|$, 直线 OM 的斜率为 $\frac{\sqrt{5}}{10}$.

(I) 求 E 的离心率 e;

(II) 设点 C 的坐标为 $(0, -b)$, N 为线段 AC 的中点, 点 N 关于直线 AB 的对称点的纵坐标为 $\frac{7}{2}$, 求

E 的方程.

【答案】 (I) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$; (II) $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{9} = 1$.

【解析】

试题分析: (I) 由题设条件, 可得点 M 的坐标为 $(\frac{2}{3}a, \frac{1}{3}b)$, 利用 $k_{OM} = \frac{\sqrt{5}}{10}$, 从而 $\frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{5}}{10}$, 进而得

$a = \sqrt{5}b, c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2b$, 算出 $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. (II) 由题设条件和 (I) 的计算结果知, 直线 AB 的方程

为 $\frac{x}{\sqrt{5}b} + \frac{y}{b} = 1$, 得出点 N 的坐标为 $(\frac{\sqrt{5}}{2}b, -\frac{1}{2}b)$, 设点 N 关于直线 AB 的对称点 S 的坐标为 $(x_1, \frac{7}{2})$, 则

线段 NS 的中点 T 的坐标为 $(\frac{\sqrt{5}}{4}b + \frac{x_1}{2}, -\frac{1}{4}b + \frac{7}{4})$. 利用点 T 在直线 AB 上, 以及 $k_{NS} \cdot k_{AB} = -1$, 解得 $b = 3$,

所以 $a = 3\sqrt{5}$, 从而得到椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{9} = 1$.

试题解析: (I) 由题设条件知, 点 M 的坐标为 $(\frac{2}{3}a, \frac{1}{3}b)$, 又 $k_{OM} = \frac{\sqrt{5}}{10}$, 从而 $\frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{5}}{10}$, 进而得

$$a = \sqrt{5}b, c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2b, \text{ 故 } e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

(II) 由题设条件和 (I) 的计算结果可得, 直线 AB 的方程为 $\frac{x}{\sqrt{5}b} + \frac{y}{b} = 1$, 点 N 的坐标为 $(\frac{\sqrt{5}}{2}b, -\frac{1}{2}b)$,

设点 N 关于直线 AB 的对称点 S 的坐标为 $(x_1, \frac{7}{2})$, 则线段 NS 的中点 T 的坐标为 $(\frac{\sqrt{5}}{4}b + \frac{x_1}{2}, -\frac{1}{4}b + \frac{7}{4})$ 又

$$\text{点 } T \text{ 在直线 } AB \text{ 上, 且 } k_{NS} \cdot k_{AB} = -1, \text{ 从而有 } \begin{cases} \frac{\frac{\sqrt{5}}{4}b + \frac{x_1}{2} + \frac{-\frac{1}{4}b + \frac{7}{4}}{2}}{\frac{\frac{\sqrt{5}}{4}b + \frac{x_1}{2} - \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}b}{2}}{2}} = \sqrt{5} \\ \frac{\frac{\sqrt{5}}{4}b + \frac{x_1}{2}}{\sqrt{5}b} + \frac{-\frac{1}{4}b + \frac{7}{4}}{b} = 1 \end{cases} \quad \text{解得 } b = 3, \text{ 所以 } a = 3\sqrt{5}, \text{ 故椭圆 } E \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

【考点定位】1. 椭圆的离心率; 2. 椭圆的标准方程; 3. 点点关于直线对称的应用.

【名师点睛】椭圆一直是解答题中考查解析几何知识的重要载体, 不管对其如何进行改编与设计, 抓住基础知识、考基本技能是不变的话题. 解析几何主要研究两类问题: 一是根据已知条件确定曲线方程, 二是利用曲线方程研究曲线的几何性质. 曲线方程的确定可分为两类: 若已知曲线类型, 则采用待定系数法; 若曲线类型未知时, 则可利用直接法、定义法、相关点法等求解. 本题是第一种类型, 要利用给定条件求出 a, b .

(21) (本小题满分 13 分)

设函数 $f(x) = x^2 - ax + b$.

(I) 讨论函数 $f(\sin x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内的单调性并判断有无极值, 有极值时求出极值;

(II) 记 $f_0(x) = x^2 - a_0x + b_0$, 求函数 $|f(\sin x) - f_0(\sin x)|$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值 D ;

(III) 在 (II) 中, 取 $a_0 = b_0 = 0$, 求 $z = b - \frac{a^2}{4}$ 满足 $D \leq 1$ 时的最大值.

【答案】 (I) 极小值为 $b - \frac{a^2}{4}$; (II) $D = |a - a_0| + |b - b_0|$; (III) 1.

【解析】

试题分析: (I) 将 $\sin x$ 代入 $f(x)$ 为 $f(\sin x) = \sin^2 x - a \sin x + b = \sin x(\sin x - a) + b$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

求导得 $[f(\sin x)]' = (2 \sin x - a) \cos x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 因为 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\cos x > 0, -2 < 2 \sin x < 2$.

按 a 的范围分三种情况进行讨论: ①当 $a \leq -2, b \in R$ 时, 函数 $f(\sin x)$ 单调递增, 无极值. ②当 $a \geq 2, b \in R$

时, 函数 $f(\sin x)$ 单调递减, 无极值. ③当 $-2 < a < 2$, 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内存在唯一的 x_0 , 使得

$2 \sin x_0 = a$. $-\frac{\pi}{2} < x \leq x_0$ 时, 函数 $f(\sin x)$ 单调递减; $x_0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, 函数 $f(\sin x)$ 单调递增. 因此,

$-2 < a < 2, b \in R$ 时, 函数 $f(\sin x)$ 在 x_0 处有极小值 $f(\sin x_0) = f(\frac{a}{2}) = b - \frac{a^2}{4}$. (II) 当 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 时,

依据绝对值不等式可知 $|f(\sin x) - f_0(\sin x)| = |(a_0 - a) \sin x + b - b_0| \leq |a - a_0| + |b - b_0|$, 从而能够得出函

数 $|f(\sin x) - f_0(\sin x)|$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值为 $D = |a - a_0| + |b - b_0|$. (III) 当 $D \leq 1$, 即 $|a| + |b| \leq 1$,

此时 $0 \leq a^2 \leq 1, -1 \leq b \leq 1$, 从而 $z = b - \frac{a^2}{4} \leq 1$. 依据式子特征取 $a = 0, b = 1$, 则 $|a| + |b| \leq 1$, 并且

$z = b - \frac{a^2}{4} = 1$. 由此可知, $z = b - \frac{a^2}{4}$ 满足条件 $D \leq 1$ 的最大值为 1.

试题解析: (I) $f(\sin x) = \sin^2 x - a \sin x + b = \sin x(\sin x - a) + b$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

$[f(\sin x)]' = (2 \sin x - a) \cos x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

因为 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\cos x > 0, -2 < 2 \sin x < 2$.

①当 $a \leq -2, b \in R$ 时, 函数 $f(\sin x)$ 单调递增, 无极值.

②当 $a \geq 2, b \in R$ 时, 函数 $f(\sin x)$ 单调递减, 无极值.

③当 $-2 < a < 2$, 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内存在唯一的 x_0 , 使得 $2 \sin x_0 = a$.

$-\frac{\pi}{2} < x \leq x_0$ 时, 函数 $f(\sin x)$ 单调递减; $x_0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, 函数 $f(\sin x)$ 单调递增.

因此, $-2 < a < 2$, $b \in R$ 时, 函数 $f(\sin x)$ 在 x_0 处有极小值 $f(\sin x_0) = f(\frac{a}{2}) = b - \frac{a^2}{4}$.

(II) $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 时, $|f(\sin x) - f_0(\sin x)| = |(a_0 - a) \sin x + b - b_0| \leq |a - a_0| + |b - b_0|$,

当 $(a_0 - a)(b_0 - b) \geq 0$ 时, 取 $x = \frac{\pi}{2}$, 等号成立,

当 $(a_0 - a)(b_0 - b) < 0$ 时, 取 $x = -\frac{\pi}{2}$, 等号成立,

由此可知, 函数 $|f(\sin x) - f_0(\sin x)|$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值为 $D = |a - a_0| + |b - b_0|$.

(III) $D \leq 1$, 即 $|a| + |b| \leq 1$, 此时 $0 \leq a^2 \leq 1, -1 \leq b \leq 1$, 从而 $z = b - \frac{a^2}{4} \leq 1$.

取 $a = 0, b = 1$, 则 $|a| + |b| \leq 1$, 并且 $z = b - \frac{a^2}{4} = 1$.

由此可知, $z = b - \frac{a^2}{4}$ 满足条件 $D \leq 1$ 的最大值为 1.

【考点定位】 1. 函数的单调性、极值与最值; 2. 绝对值不等式的应用.

【名师点睛】 函数、导数解答题中贯穿始终的是数学思想方法, 在含有参数的试题中, 分类与整合思想是必要的, 由于是函数问题, 所以函数思想、数形结合思想也是必要的, 把不等式问题转化为函数最值问题、把方程的根转化为函数零点问题等, 转化与化归思想也起着同样的作用, 解决函数、导数的解答题要充分注意数学思想方法的应用.