2006年湖南高考理科数学真题及答案

一、选择题:本大题共10小题，每小题5分，共50分。在每个小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 函数 $y=\sqrt{\log_2 x-2}$ 的定义域是

A. $(3,+\infty)$　　B. $[3,+\infty)$　　C. $(4,+\infty)$　　D. $[4,+\infty)$

2. 若数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_1=\frac{1}{3}$，且对任意正整数 m,n 都有 $a_{m+n}=a_m\cdot a_n$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=$

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. 2

3. 过平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 任意两条棱的中点作直线，其中与平面 DBB_1D_1 平行的直线共有

A. 4条　　B. 6条　　C. 8条　　D. 12条

4. “$a=1$”是“函数 $f(x)=|x-a|$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上为增函数”的

A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件　C. 充要条件　D. 既不充分也不必要条件

5. 已知 $|\vec{a}|=2|\vec{b}|\neq 0$，且关于 x 的方程 $x^2+|\vec{a}|x+\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ 有实根，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角的取值范围是

A. $[0,\frac{\pi}{6}]$　　B. $[\frac{\pi}{3},\pi]$　　C. $[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}]$　　D. $[\frac{\pi}{6},\pi]$

6. 某外商计划在4个候选城市投资3个不同的项目，且在同一个城市投资的项目不超过2个，则该外商不同的投资方案有

A. 16种　　B. 36种　　C. 42种　　D. 60种

7. 过双曲线 $M:x^2-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的左顶点 A 作斜率为1的直线 l，若 l 与双曲线 M 的两条渐近线分别相交于点 B,C，且 $|AB|=|BC|$，则双曲线 M 的离心率是

A. $\sqrt{10}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. $\frac{\sqrt{10}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

8. 设函数 $f(x)=\frac{x-a}{x-1}$，集合 $M=\{x\mid f(x)<0\},P=\{x\mid f'(x)>0\}$，若 $M\subset P$，则实数 a 的取值范围是

A．$(-\infty,-1)$　　B．$(0,1)$　　C．$(1,+\infty)$　　D．$[1,+\infty)$

9．棱长为 2 的正四面体的四个顶点都在同一个球面上，若过该球球心的一个截面如图 1，

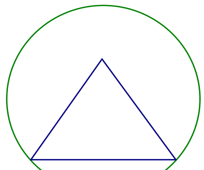


图 1

则图中三角形(正四面体的截面)的面积是

A．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\sqrt{2}$　　D．$\sqrt{3}$

10．若圆 $x^2+y^2-4x-4y-10=0$ 上至少有三个不同的点到直线 $l: ax+by=0$ 的距离为 $2\sqrt{2}$，则直线 l 的倾斜角的取值范围是

A．$[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{4}]$　　B．$[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{5\pi}{12}]$　　C．$[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}]$　　D．$[0,\dfrac{\pi}{2}]$

注意事项：

请用 0.5 毫米黑色的签字笔直接答在答题卡上。答在试题卷上无效。

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 4 分(第 15 小题每空 2 分)，共 20 分.　　把答案填在答题卡中对应题号后的横线上。

11．若 $(ax-1)^5$ 的展开式中 x^3 的系数是 -80，则实数 a 的值是__________.

12．已知 $\begin{cases} x\geq 1 \\ x-y+1\leq 0 \\ 2x-y-2\leq 0 \end{cases}$　则 x^2+y^2 的最小值是____________.

13．曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 和 $y=x^2$ 在它们的交点处的两条切线与 x 轴所围成的三角形的面积是___________.

14．若 $f(x)=a\sin(x+\dfrac{\pi}{4})+b\sin(x-\dfrac{\pi}{4})(ab\neq 0)$ 是偶函数，则有序实数对 (a,b) 可以是__________.(注：写出你认为正确的一组数字即可)

15．如图 2，$OM // AB$，点 P 在由射线 OM，线段 OB 及 AB 的延长线围成的区域内(不含边界)运动，且 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，则 x 的取值范围是__________；当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时，y 的取值范围是__________.

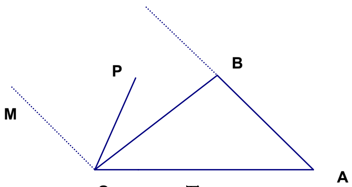


图2

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

16. （本小题满分 12 分）

如图 3， D 是直角 ΔABC 斜边 BC 上一点， $AB=AD$,记$\angle CAD=\alpha,\angle ABC=\beta$.

（Ⅰ）证明：$\sin\alpha+\cos 2\beta=0$；　（Ⅱ）若 $AC=\sqrt{3}DC$，求 β 的值.

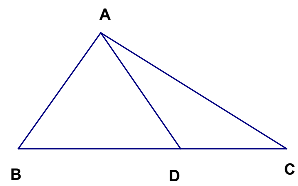


图3

17. （本小题满分 12 分）

某安全生产监督部门对 5 家小型煤矿进行安全检查(简称安检)，若安检不合格，则必须整改. 若整改后经复查仍不合格，则强制关闭. 设每家煤矿安检是否合格是相互独立的，且每家煤矿整改前合格的概率是0.5，整改后安检合格的概率是0.8，

计算(结果精确到0.01)；

(Ⅰ) 恰好有两家煤矿必须整改的概率；

(Ⅱ) 平均有多少家煤矿必须整改；

(Ⅲ) 至少关闭一家煤矿的概率 .

18. （本小题满分 14 分）

如图 4，已知两个正四棱锥 $P-ABCD$与$Q-ABCD$ 的高分别为 1 和 2， $AB=4$

（Ⅰ）证明：$PQ\perp$平面$ABCD$ ；　（Ⅱ）求异面直线 AQ与PQ 所成的角；

(Ⅲ) 求点 P 到平面 QAD 的距离.

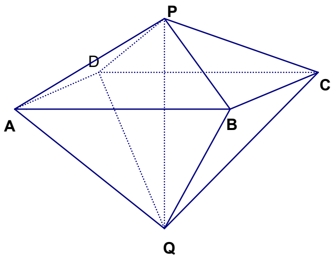


图4

19.（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=x-\sin x$，数列 $\{a_n\}$ 满足：$0<a_1<1$，$n=1,2,3,\cdots$

证明（Ⅰ）$0<a_{n+1}<a_n<1$ ；（Ⅱ）$a_{n+1}<\frac{1}{6}a_n^3$.

20.（本小题满分 14 分）

对 1 个单位质量的含污物体进行清洗，清洗前其清洁度(含污物体的清洁度定义为: $1-\frac{\text{污物质量}}{\text{物体质量（含污物）}}$)为$0.8$，要求清洗完后的清洁度为$0.99$． 有两种方案可供选择，方案甲：一次清洗； 方案乙：分两次清洗．该物体初次清洗后受残留水等因素影响，其质量变为 $a(1\le a\le 3)$． 设用 x 单位质量的水初次清洗后的清洁度是 $\frac{x+0.8}{x+1}$ $(x>a-1)$，用 y 单位质量的水第二次清洗后的清洁度是 $\frac{y+ac}{y+a}$，

其中 c $(0.8<c<0.99)$ 是该物体初次清洗后的清洁度.

(Ⅰ)分别求出方案甲以及 $c=0.95$ 时方案乙的用水量，并比较哪一种方案用水量较少；

(Ⅱ)若采用方案乙，当 a 为某固定值时，如何安排初次与第二次清洗的用水量，使总用水量最小？并讨论 a 取不同数值时对最少总用水量多少的影响.

21.（本小题满分 14 分）

已知椭圆 $C_1:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，抛物线 $C_2:(y-m)^2=2px(p>0)$，且 C_1,C_2 的公共弦 AB 过椭圆 C_1 的右焦点 .

（Ⅰ）当 $AB\perp x$轴时，求 m, p 的值，并判断抛物线 C_2 的焦点是否在直线 AB 上；

（Ⅱ）是否存在 m, p 的值，使抛物线 C_2 的焦点恰在直线 AB 上？若存在，求出符合条件的 m, p 的值；若不存在，请说明理由．

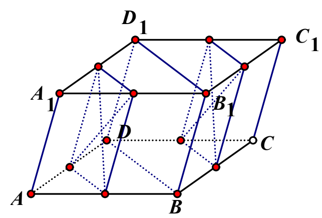
2006年湖南高考理科数学真题参考答案

1—10　DADAB　DACCB

11．-2　　12．5　　13．$\dfrac{3}{4}$　　14．$(1,-1)$　　15．$(-\infty,0)$，$(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2})$

1．函数 $y=\sqrt{\log_2 x-2}$ 的定义域是 $\log_2 x-2\geqslant 0$，解得 x≥4，选 D.

2.数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=\dfrac{1}{3}$，且对任意正整数 m, n 都有 $a_{m+n}=a_m\cdot a_n$ $a_2=a_{1+1}=a_1\cdot a_1=\dfrac{1}{9}$，$a_{n+1}=a_n\cdot a_1=\dfrac{1}{3}a_n$，∴数列 $\{a_n\}$ 是首项为 $\dfrac{1}{3}$，公比为 $\dfrac{1}{3}$ 的等比数列。$\lim\limits_{n\to+\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\dfrac{a_1}{1-q}=\dfrac{1}{2}$，选 A.



3．如图，过平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 任意两条棱的中点作直线，其中与平面 DBB_1D_1 平行的直线共有 12 条，选 D.

4.若“$a=1$”，则函数 $f(x)=|x-a|=|x-1|$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上为增函数；而若 $f(x)=|x-a|$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上为增函数，则 0≤a≤1，所以“$a=1$”是“函数 $f(x)=|x-a|$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上为增函数”的充分不必要条件，选 A.

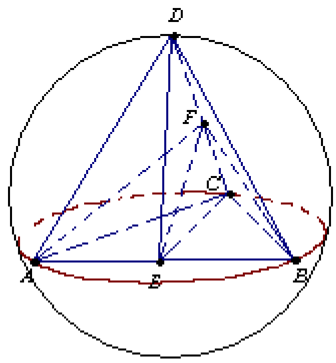
5．$|\vec{a}|=2|\vec{b}|\neq 0$，且关于 x 的方程 $x^2+|\vec{a}|x+\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ 有实根，则 $|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}\geqslant 0$，设向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角为 θ，$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\leqslant\dfrac{\frac{1}{4}|\vec{a}|^2}{\frac{1}{2}|\vec{a}|^2}=\dfrac{1}{2}$，∴ $\theta\in[\dfrac{\pi}{3},\pi]$，选 B.

6．某外商计划在 4 个候选城市投资 3 个不同的项目，且在同一个城市投资的项目不超过 2 个，则有两种情况，一是在两个城市分别投资 1 个项目、2 个项目，此时有 $C_3^1\cdot A_4^2=36$ 种方案，二是在三个城市各投资 1 个项目，有 $A_4^3=24$ 种方案，共计有 60 种方案，选 D.

7．过双曲线$M: x^2-\frac{y^2}{b^2}=1$的左顶点A(1，0)作斜率为1的直线l：y=x－1，若l与双曲线M的两条渐近线$x^2-\frac{y^2}{b^2}=0$分别相交于点$B(x_1,y_1),C(x_2,y_2)$， 联立方程组代入消元得$(b^2-1)x^2+2x-1=0$，∴ $\begin{cases} x_1+x_2=\frac{2}{1-b^2} \\ x_1\cdot x_2=\frac{1}{1-b^2} \end{cases}$，$x_1+x_2=2x_1x_2$，又$|AB|=|BC|$，则B为AC中点，$2x_1=1+x_2$，代入解得$\begin{cases} x_1=\frac{1}{4} \\ x_2=-\frac{1}{2} \end{cases}$，∴ $b^2=9$，双曲线M的离心率 e=$\frac{c}{a}=\sqrt{10}$，选A.

8．设函数$f(x)=\frac{x-a}{x-1}$，集合$M=\{x|f(x)<0\}$，若a>1时，M={x| 1<x<a}；若a<1时M={x| a<x<1}，a=1时，M=$\varnothing$；$P=\{x|f'(x)>0\}$，∴ $f'(x)=\frac{(x-1)-(x-a)}{(x-1)^2}$>0，∴ a>1时，P=R，a<1时，P=$\varnothing$； 已知$M\subset P$，所以选C.

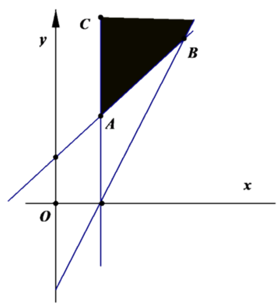
9．棱长为2的正四面体ABCD的四个顶点都在同一个球面上，若过该球球心的一个截面如图为△ABF，则图中AB=2，E为AB中点，则EF⊥DC，在△DCE中，DE=EC=$\sqrt{3}$，DC=2，∴EF=$\sqrt{2}$，∴三角形ABF的面积是$\sqrt{2}$，选C.



10．圆$x^2+y^2-4x-4y-10=0$整理为$(x-2)^2+(y-2)^2=(3\sqrt{2})^2$，∴圆心坐标为(2，2)，半径为3$\sqrt{2}$，要求圆上至少有三个不同的点到直线$l: ax+by=0$的距离为$2\sqrt{2}$，则圆心到直线的距离应小于等于$\sqrt{2}$，

$$\therefore\ \frac{|2a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}\leqslant\sqrt{2},\therefore\ (\frac{a}{b})^2+4(\frac{a}{b})+1\leqslant 0,\therefore\ -2-\sqrt{3}\leqslant(\frac{a}{b})\leqslant-2+\sqrt{3},$$

$k=-(\frac{a}{b})$，∴ $2-\sqrt{3}\leqslant k\leqslant 2+\sqrt{3}$，直线$l$的倾斜角的取值范围是$[\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}]$，选B.



二．填空题：

11． -2　　12．5　　13．$\frac{3}{4}$　　14．$(1,-1)$　　15．$(-\infty,0)$，$(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$

11．$(ax-1)^5$的展开式中x^3的系数$C_5^3(ax)^3\cdot(-1)^2 10a^3x^3=-80x^3$， 则实数$a$的

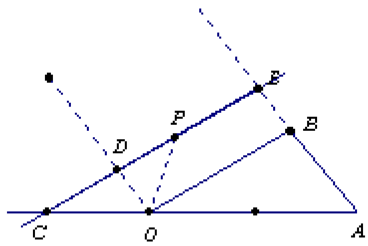
值是－2.

12．已知$\begin{cases}x\ge 1\\ x-y+1\le 0\\ 2x-y-2\le 0\end{cases}$，如图画出可行域，得交点 A(1，2)，B(3，4)，则x^2+y^2的最小值是 5.

13. 曲线$y=\dfrac{1}{x}$和$y=x^2$在它们的交点坐标是(1，1)，两条切线方程分别是 y=－x+2 和 y=2x－1，它们与 x 轴所围成的三角形的面积是$\dfrac{3}{4}$.

14．$ab\ne 0$，$f(x)=a\sin(x+\dfrac{\pi}{4})+b\sin(x-\dfrac{\pi}{4})=a(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x)+b(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x)$是偶函数，只要 $a+b=0$ 即可，可以取 $a=1$，$b=-1$.

15．如图，$OM \,/\!/\, AB$，点P在由射线OM，线段OB及AB的延长线围成的区域内（不含边界）运动，且$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，由向量加法的平行四边形法则，OP 为平行四边形的对角线，该四边形应是以 OB 和 OA 的反向延长线为两邻边，∴ x 的取值范围是(－∞，0)；



当$x=-\dfrac{1}{2}$时，要使 P 点落在指定区域内，即 P 点应落在 DE 上，CD=$\dfrac{1}{2}$OB，CE=$\dfrac{3}{2}$OB，∴ y 的取值范围是($\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{3}{2}$).

三、解答题：本大题共 6 个小题，共 80 分，解答应写出

文字说明，证明过程或演算步骤。

16.（本小题满分 12 分）如图 3，D 是直角△ABC 斜边 BC 上一点，AB=AD，

记∠CAD=α，∠ABC=β.

(1)．证明 $\sin\alpha+\cos 2\beta=0$；

(2)．若 AC=$\sqrt{3}$DC，求β的值.

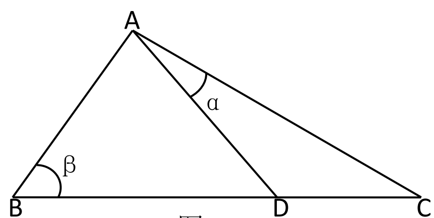


图 3

解：(1)．如图 3，$\because \alpha=\dfrac{\pi}{2}-(\pi-2\beta)=2\beta-\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore \sin\alpha=\sin(2\beta-\dfrac{\pi}{2})=-\cos 2\beta$，

即 $\sin\alpha+\cos 2\beta=0$.

（2）．在ΔABC中，由正弦定理得

$$\frac{DC}{\sin\alpha}=\frac{AC}{\sin(\pi-\beta)},\Rightarrow\frac{DC}{\sin\alpha}=\frac{\sqrt{3}DC}{\sin\beta}.\therefore\sin\beta=\sqrt{3}\sin\alpha$$

由(1)得$\sin\alpha=-\cos 2\beta$，$\therefore\sin\beta=-\sqrt{3}\cos 2\beta=-\sqrt{3}(1-2\sin^2\beta)$,

即$2\sqrt{3}\sin^2\beta-\sin\beta-\sqrt{3}=0$.解得$\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$或$\sin\beta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$$\because 0<\beta<\frac{\pi}{2},\therefore\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{2},\Rightarrow\beta=\frac{\pi}{3}.$$

17.（本小题满分12分）某安全生产监督部门对5家小型煤矿进行安全检查(简称安检).若安检不合格,则必须进行整改.若整改后经复查仍不合格,则强行关闭.设每家煤矿安检是否合格是相互独立的,且每家煤矿整改前安检合格的概率是0.5，整改后安检合格的概率是0.8,计算(结果精确到0.01)：

(Ⅰ)恰好有两家煤矿必须整改的概率;

(Ⅱ)平均有多少家煤矿必须整改;

(Ⅲ)至少关闭一家煤矿的概率.

解：(Ⅰ)．每家煤矿必须整改的概率是1－0.5，且每家煤矿是否整改是相互独立的.

所以恰好有两家煤矿必须整改的概率是

$$P_1=C_5^2\times(1-0.5)^2\times 0.5^3=\frac{5}{16}=0.31.$$

(Ⅱ)．由题设，必须整改的煤矿数ξ服从二项分布B(5,0.5).从而ξ的数学期望是

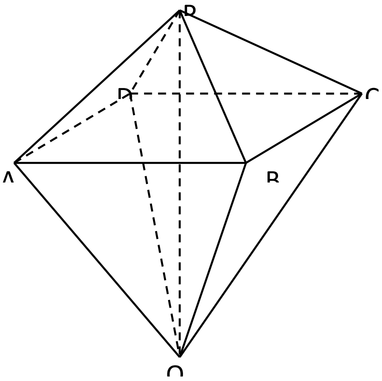
$E\xi=5\times 0.5=2.5$，即平均有2.50家煤矿必须整改.

(Ⅲ)．某煤矿被关闭，即该煤矿第一次安检不合格，整改后经复查仍不合格，所以该煤矿被关闭的概率是$P_2=(1-0.5)\times(1-0.8)=0.1$，从而该煤矿不被关闭的概率是0.9.

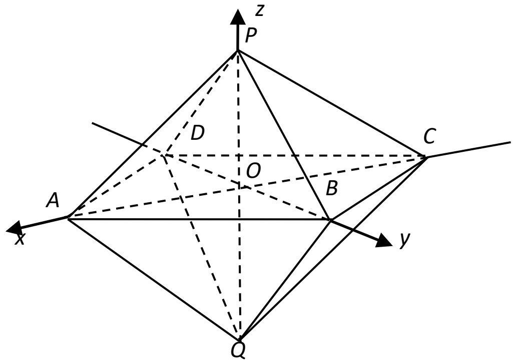
由题意，每家煤矿是否被关闭是相互独立的，所以至少关闭一家煤矿的概率是

$P_3=1-0.9^5=0.41$

18.（本小题满分14分）如图4,已知两个正四棱锥P-ABCD与Q-ABCD的高分别为1和2,AB=4.　(Ⅰ)证明PQ⊥平面ABCD;　(Ⅱ)求异面直线AQ与PB所成的角;(Ⅲ)求点P到平面QAD的距离.



图



解法一：（Ⅰ）．连结 AC、BD，设 $AC\bigcap BD=O$．由 P—$ABCD$ 与 Q—$ABCD$ 都是正四棱锥，所以 PO⊥平面 $ABCD$，QO⊥平面 $ABCD$．
从而 P、O、Q 三点在一条直线上，所以 PQ⊥平面 $ABCD$．

（II）由题设知，ABCD 是正方形，所以 $AC\perp BD$．由（I），$PQ\perp$ 平面 $ABCD$，故可以分别以直线 CA、DB、QP 为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系（如上图），由题设条件，相关各点的坐标分别是 $P(0,0,1)$，$Q(0,0,-2)$，$B(0,2\sqrt{2},0)$

所以 $\overrightarrow{AQ}=(-2\sqrt{2},0,-2)$，$\overrightarrow{PB}=(0,2\sqrt{2},-1)$，于是 $\cos<\overrightarrow{AQ},\overrightarrow{PB}>=\dfrac{\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{PB}}{\left|\overrightarrow{AQ}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PB}\right|}=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$.

从而异面直线 AQ 与 PB 所成的角是 $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{9}$．

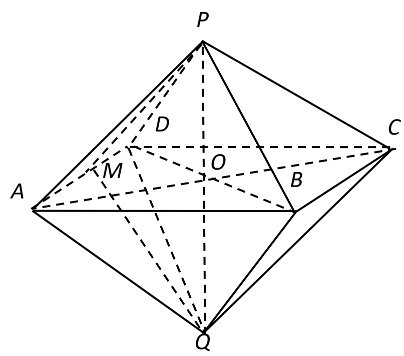
(III)．由（II），点 D 的坐标是（0，$-2\sqrt{2}$，0），$\overrightarrow{AD}=(-2\sqrt{2},-2\sqrt{2},0)$，

$\overrightarrow{PQ}=(0,0,-3)$，设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 是平面 QAD 的一个法向量，

由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AQ}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0\end{cases}$　　得 $\begin{cases}\sqrt{2}x+z=0\\ x+y=0\end{cases}$.

取 x=1，得 $\vec{n}=(1,-1,-\sqrt{2})$．　　所以点 P 到平面 QAD 的距离 $d=\dfrac{\left|\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$..

解法二：（Ⅰ）．取 AD 的中点 M，连结 PM，QM．因为 P—$ABCD$ 与 Q—$ABCD$ 都是正四棱锥，所以 AD⊥PM，AD⊥QM．从而 AD⊥平面 PQM．



又 $PQ\subset$ 平面 PQM，所以 $PQ\perp AD$. 同理 $PQ\perp AB$，所以 $PQ\perp$ 平面 $ABCD$.

（Ⅱ）. 连结 AC、BD 设 $AC\cap BD=O$，由 $PQ\perp$ 平面 $ABCD$ 及正四棱锥的性质可知 O 在 PQ 上，从而 P、A、Q、C 四点共面.

取 OC 的中点 N，连结 PN.

因为 $\dfrac{PO}{OQ}=\dfrac{1}{2},\dfrac{NO}{OA}=\dfrac{NO}{OC}=\dfrac{1}{2}$，所以 $\dfrac{PO}{OQ}=\dfrac{NO}{OA}$，

从而 $AQ// PN$. $\angle BPN$（或其补角）是异面直线 AQ 与 PB 所成的角. 连接 BN，

因为 $PB=\sqrt{OB^2+OP^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+1}=3$.

$$PN=\sqrt{ON^2+OP^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+1}=\sqrt{3}$$

$$BN=\sqrt{OB^2+ON^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{10}$$

所以 $\cos\angle BPN=\dfrac{PB^2+PN^2-BN^2}{2PB\cdot PN}=\dfrac{9+3-10}{2\times3\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$.

从而异面直线 AQ 与 PB 所成的角是 $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{9}$.

（Ⅲ）. 由（Ⅰ）知，$AD\perp$ 平面 PQM，所以平面 $PQM\perp$ 平面 QAD. 过Ｐ作ＰＨ⊥ＱＭ于Ｈ，则ＰＨ⊥平面 QAD，所以ＰＨ的长为点 P 到平面 QAD 的距离.

连结 OM，则 $OM=\dfrac{1}{2}AB=2=OQ$. 所以 $\angle MQP=45^\circ$，

又ＰＱ＝ＰＯ＋ＱＯ＝３，于是 $PH=PQ\sin45^\circ=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

即点 P 到平面 QAD 的距离是 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

19. （本小题满分 14 分）已知函数 $f(x)=x-\sin x$，

数列 $\{a_n\}$ 满足: $0<a_1<1, a_{n+1}=f(a_n), n=1,2,3,\cdots$.

证明：（I）. $0<a_{n+1}<a_n<1$；

（II）. $a_{n+1}<\dfrac{1}{6}a_n^{\ 3}$.

证明：（I）. 先用数学归纳法证明 $0<a_n<1$，n＝1, 2, 3, …

(i). 当 n=1 时, 由已知显然结论成立.

(ii). 假设当 n=k 时结论成立, 即 $0<a_k<1$. 因为 0<x<1 时

$f'(x)=1-\cos x>0$, 所以 f(x) 在 (0, 1) 上是增函数. 又 f(x) 在 [0, 1] 上连续,

从而 $f(0)<f(a_k)<f(1)$,即$0<a_{k+1}<1-\sin 1<1$. 故 n=k+1 时, 结论成立.

由(i)、(ii)可知, $0<a_n<1$ 对一切正整数都成立.

又因为 $0<a_n<1$ 时, $a_{n+1}-a_n=a_n-\sin a_n-a_n=-\sin a_n<0$,

所以 $a_{n+1}<a_n$, 综上所述 $0<a_{n+1}<a_n<1$.

(II). 设函数 $g(x)=\sin x-x+\frac{1}{6}x^3$, $0<x<1$. 由(I)知, 当 $0<x<1$ 时, $\sin x<x$,

从而 $g'(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}=-2\sin^2\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}>-2(\frac{x}{2})^2+\frac{x^2}{2}=0.$

所以 g (x) 在 (0, 1) 上是增函数. 又 g (x) 在 [0, 1] 上连续, 且 g (0)=0,

所以当 $0<x<1$ 时, g (x)>0 成立. 于是 $g(a_n)>0$,即$\sin a_n-a_n+\frac{1}{6}a_n^3>0$.

故 $a_{n+1}<\frac{1}{6}a_n^3$.

20. (本小题满分 14 分) 对 1 个单位质量的含污物体进行清洗, 清洗前其清洁度(含污物体的清洁度定义为: $1-\frac{\text{污物质量}}{\text{物体质量(含污物)}}$)为 0.8, 要求洗完后的清洁度是 0.99. 有两种方案可供选择, 方案甲: 一次清洗; 方案乙: 两次清洗. 该物体初次清洗后受残留水等因素影响, 其质量变为 a (1≤a≤3). 设用 x 单位质量的水初次清洗后的清洁度是 $\frac{x+0.8}{x+1}$ $(x>a-1)$, 用 y 质量的水第二次清洗后的清洁度是 $\frac{y+ac}{y+a}$, 其中 $c(0.8<c<0.99)$ 是该物体初次清洗后的清洁度.

(Ⅰ) 分别求出方案甲以及 $c=0.95$ 时方案乙的用水量, 并比较哪一种方案用水量较少;

(Ⅱ) 若采用方案乙, 当 a 为某定值时, 如何安排初次与第二次清洗的用水量, 使总用水量最少? 并讨论 a 取不同数值时对最少总用水量多少的影响.

解: (Ⅰ) 设方案甲与方案乙的用水量分别为 x 与 z, 由题设有 $\frac{x+0.8}{x+1}$=0.99, 解得 x=19.

由 $c=0.95$ 得方案乙初次用水量为 3, 第二次用水量 y 满足方程:

$\frac{y+0.95a}{y+a}=0.99$, 解得 y=4a, 故 z=4a+3. 即两种方案的用水量分别为 19 与 4a+3.

因为当$1\le a\le 3$时,$x-z=4(4-a)>0$,即$x>z$,故方案乙的用水量较少.

（II）设初次与第二次清洗的用水量分别为x与y，类似（I）得

$x=\dfrac{5c-4}{5(1-c)}$， $y=a(99-100c)$ （*）

于是 $x+y=\dfrac{5c-4}{5(1-c)}+a(99-100c)=\dfrac{1}{5(1-c)}+100a(1-c)-a-1$

当a为定值时, $x+y\ge 2\sqrt{\dfrac{1}{5(1-c)}\times 100a(1-c)}-a-1=-a+4\sqrt{5a}-1$,

当且仅当$\dfrac{1}{5(1-c)}=100a(1-c)$时等号成立. 此时

$c=1+\dfrac{1}{10\sqrt{5a}}$(不合题意, 舍去)或$c=1-\dfrac{1}{10\sqrt{5a}}\in(0.8,0.99)$,

将$c=1-\dfrac{1}{10\sqrt{5a}}$代入（*）式得$x=2\sqrt{5a}-1>a-1, y=2\sqrt{5a}-a.$

故$c=1-\dfrac{1}{10\sqrt{5a}}$时总用水量最少, 此时第一次与第二次用水量分别为

$2\sqrt{5a}-1$与$2\sqrt{5a}-a$, 最少总用水量是$T(a)=-a+4\sqrt{5a}-1$.

当$1\le a\le 3$时,$T'(a)=\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{a}}-1>0$, 故T($a$)是增函数(也可以用二次函数的单调性判断). 这说明, 随着a的值的最少总用水量, 最少总用水量最少总用水量.

21. （本小题满分 14 分）已知椭圆 C_1: $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$, 抛物线 C_2: $(y-m)^2=2px(p>0)$,

且 C_1、C_2的公共弦 AB 过椭圆 C_1的右焦点.

(Ⅰ)当 AB⊥x轴时, 求m、p的值，并判断抛物线 C_2的焦点是否在直线 AB 上;

(Ⅱ)是否存在m、p的值，使抛物线 C_2的焦点恰在直线 AB 上？若存在，

求出符合条件的m、p的值；若不存在，请说明理由.

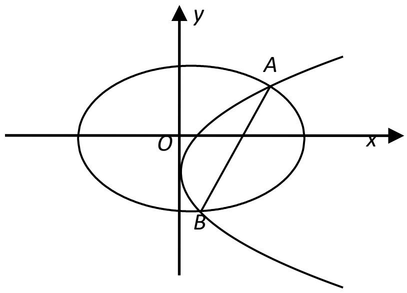
解:（Ⅰ）当 $AB\perp x$轴时，点 A、B关于 x轴对称，所以 $m=0$，直线 AB的方程为:

$x=1$，从而点 A的坐标为（1，$\dfrac{3}{2}$）或（1，$-\dfrac{3}{2}$）． 因为点 A在抛物线上.

所以 $\dfrac{9}{4}=2p$，即 $p=\dfrac{9}{8}$. 此时 C_2 的焦点坐标为（$\dfrac{9}{16}$，0），该焦点不在直线 AB 上.

（II）解法一： 假设存在 m、p 的值使 C_2 的焦点恰在直线 AB 上，由（I）知直线 AB 的斜率存在，故可设直线 AB 的方程为 $y=k(x-1)$.

由 $\begin{cases} y=k(x-1) \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 消去 y 得 $(3+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$ ………………①



设 A、B 的坐标分别为（x_1, y_1），（x_2, y_2），

则 x_1, x_2 是方程①的两根，$x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{3+4k^2}$.

由 $\begin{cases} (y-m)^2=2px \\ y=k(x-1) \end{cases}$

消去 y 得 $(kx-k-m)^2=2px$. ………………②

因为 C_2 的焦点 $F'(\dfrac{p}{2},m)$ 在直线 $y=k(x-1)$ 上，

所以 $m=k(\dfrac{p}{2}-1)$，即 $m+k=\dfrac{kp}{2}$. 代入②有 $(kx-\dfrac{kp}{2})^2=2px$.

即 $k^2x^2-p(k^2+2)x+\dfrac{k^2p^2}{4}=0$. ……………………③

由于 x_1, x_2 也是方程③的两根，所以 $x_1+x_2=\dfrac{p(k^2+2)}{k^2}$.

从而 $\dfrac{8k^2}{3+4k^2}=\dfrac{p(k^2+2)}{k^2}$. 解得 $p=\dfrac{8k^2}{(4k^2+3)(k^2+2)}$ ……………………④

又 AB 过 C_1、、\、、C_2 的焦点，所以

$|AB|=(x_1+\dfrac{p}{2})+(x_2+\dfrac{p}{2})=x_1+x_2+p=(2-\dfrac{1}{2}x_1)+(2-\dfrac{1}{2}x_2)$，

则 $p=4-\dfrac{3}{2}(x_1+x_2)=4-\dfrac{12k^2}{4k^2+3}=\dfrac{4k^2+12}{4k^2+3}$. ………………………………⑤

由④、⑤式得 $\dfrac{8k^2}{(4k^2+3)(k^2+2)}=\dfrac{4k^2+12}{4k^2+3}$，即 $k^4-5k^2-6=0$.

解得 $k^2=6.$ 于是 $k=\pm\sqrt{6}, p=\frac{4}{3}.$

因为 C_2 的焦点 $F'(\frac{2}{3},m)$ 在直线 $y=\pm\sqrt{6}(x-1)$ 上，所以 $m=\pm\sqrt{6}(\frac{2}{3}-1)$.

$\therefore\quad m=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 或 $m=-\frac{\sqrt{6}}{3}$.

由上知，满足条件的 m、p 存在，且 $m=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 或 $m=-\frac{\sqrt{6}}{3}$， $p=\frac{4}{3}$.

解法二： 设 A、B 的坐标分别为 (x_1,y_1)， (x_2y_2).

因为 AB 既过 C_1 的右焦点 $F(1,0)$， 又过 C_2 的焦点 $F'(\frac{p}{2},m)$，

所以 $|AB|=(x_1+\frac{p}{2})+(x_2+\frac{p}{2})=x_1+x_2+p=(2-\frac{1}{2}x_1)+(2-\frac{1}{2}x_2)$.

即 $x_1+x_2=\frac{2}{3}(4-p)$. ……①

由（Ⅰ）知 $x_1\neq x_2, p\neq 2$， 于是直线 AB 的斜率 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{m-0}{\frac{p}{2}-1}=\frac{2m}{p-2}$， ……②

且直线 AB 的方程是 $y=\frac{2m}{p-2}(x-1)$，

所以 $y_1+y_2=\frac{2m}{p-2}(x_1+x_2-2)=\frac{4m(1-p)}{3(p-2)}$. ……③

又因为 $\begin{cases}3x_1^2+4y_1^2=12\\3x_2^2+4y_2^2=12\end{cases}$， 所以 $3(x_1+x_2)+4(y_1+y_2)\cdot\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=0$. ……④

将①、②、③代入④得 $m^2=\frac{3(p-4)(p-2)^2}{16(1-p)}$. ……………⑤

因为 $\begin{cases}(y_1-m)^2=2px_1\\(y_2-m)^2=2px_2\end{cases}$， 所以 $y_1+y_2-2m=2p\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}$. …………⑥

将②、③代入⑥得 $m^2=\frac{3p(p-2)^2}{16-10p}$. ……………⑦

由⑤、⑦得 $\frac{3(p-4)(p-2)^2}{16(1-p)}=\frac{3p(p-2)^2}{16-10p}$. 即 $3p^2+20p-32=0$

解得 $p=\frac{4}{3}$ 或 $p=-8$(舍去). 将 $p=\frac{4}{3}$ 代入⑤得 $m^2=\frac{2}{3}$,

$\therefore \quad m=\frac{\sqrt{6}}{3}$或$m=-\frac{\sqrt{6}}{3}$.

由上知，满足条件的m、p存在，且$m=\frac{\sqrt{6}}{3}$或$m=-\frac{\sqrt{6}}{3}$，$p=\frac{4}{3}$