

2017年普通高等学校招生全国统一考试上海--数学试卷

考生注意

1. 本场考试时间120分钟，试卷共4页，满分150分，答题纸共2页。
2. 作答前，在答题纸正面填写姓名、准考证号，反面填写姓名，将核对后的条形码贴在答题纸指定位置。
3. 所有作答务必填涂或书写在答题纸上与试卷题号对应的区域，不得错位。在试卷上作答一律不得分。
4. 用2B铅笔作答选择题，用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答非选择题。

一、填空题（本大题共有12题，满分54分，第1-6题每题4分，第7-12题每题5分）考生应在答题纸的相应位置直接填写结果。

1. 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5\}$, 则 $A \cap B =$.

【解析】本题考查集合的运算，交集，属于基础题

【答案】 $\{3, 4\}$

2. 若排列数 $P_6^m = 6 \times 5 \times 4$, 则 $m =$.

【解析】本题考查排列的计算，属于基础题

【答案】 3

3. 不等式 $\frac{x-1}{x} > 1$ 的解集为.

【解析】本题考查分式不等式的解法，属于基础题

【答案】 $(-\infty, 0)$

4. 已知球的体积为 36π , 则该球主视图的面积等于.

【解析】本题考查球的体积公式和三视图的概念, $\frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi \Rightarrow R = 3$,

所以 $S = \pi R^2 = 9\pi$, 属于基础题

【答案】 9π

5. 已知复数 z 满足 $z + \frac{3}{z} = 0$, 则 $|z| =$.

【解析】本题考查复数的四则运算和复数的模, $z + \frac{3}{z} = 0 \Rightarrow z^2 = -3$ 设 $z = a + bi$,

则 $a^2 - b^2 + 2abi = -3 \Rightarrow a = 0, b = \pm\sqrt{3}i$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, 属于基础题

【答案】 $\sqrt{3}$

6. 设双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的焦点为 F_1, F_2 , P 为该双曲线上的一点. 若 $|PF_1| = 5$, 则

$$|PF_2| = .$$

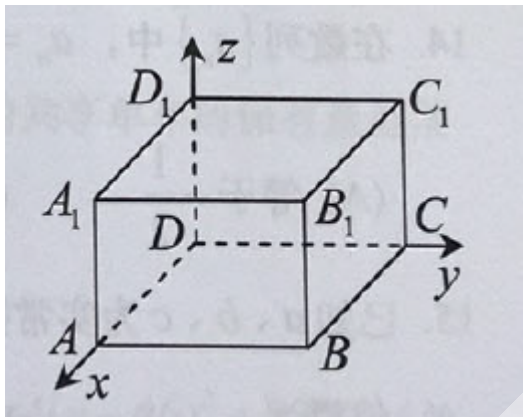
【解析】 本题考查双曲线的定义和性质， $|PF_1| - |PF_2| = 2a = 6$ （舍），

$$|PF_2| - |PF_1| = 2a = 6 \Rightarrow |PF_2| = 11$$

【答案】 11

7. 如图，以长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 D 为坐标原点，过 D 的三条棱所在的直线为

坐标轴，建立空间直角坐标系. 若 $\overrightarrow{DB_1}$ 的坐标为 $(4, 3, 2)$ ，则 $\overrightarrow{AC_1}$ 的坐标是.



【解析】 本题考查空间向量，可得 $A(4, 0, 0)$ ， $C_1(0, 3, 2) \Rightarrow \overrightarrow{AC_1} = (-4, 3, 2)$ ，属于基础题

【答案】 $(-4, 3, 2)$

8. 定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $y = f(x)$ 的反函数 $y = f^{-1}(x)$. 若 $g(x) = \begin{cases} 3^x - 1, & x \leq 0 \\ f(x), & x > 0 \end{cases}$ 为奇函数

，则 $f^{-1}(x) = 2$ 的解为.

【解析】 本题考查函数基本性质和互为反函数的两个函数之间的关系，属于中档题

$x > 0, -x < 0, g(-x) = 3^{-x} - 1 = -g(x) \Rightarrow g(x) = 1 - \frac{1}{3^x}$ ，所以 $f(x) = 1 - \frac{1}{3^x}$ ，

当 $x = 2$ 时， $f(x) = \frac{8}{9}$ ，所以 $f^{-1}(\frac{8}{9}) = 2$

【答案】 $x = \frac{8}{9}$

9. 已知四个函数：① $y = -x$ ；② $y = -\frac{1}{x}$ ；③ $y = x^3$ ；④ $y = x^{\frac{1}{2}}$. 从中任选2个，则事件“

所选2个函数的图像有且仅有一个公共点”的概率为.

【解析】 本题考查事件的概率，幂函数的图像画法和特征，属于基础题

总的情况有： $C_4^2 = 6$ 种，符合题意的就两种：①和③，①和④

【答案】 $\frac{1}{3}$

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, 其中 $a_n = n^2, n \in \mathbb{N}^*$, $\{b_n\}$ 的项是互不相等的正整数. 若对于任意

$n \in \mathbb{N}^*$, $\{b_n\}$ 中的第 a_n 项等于 $\{a_n\}$ 中的第 b_n 项, 则 $\frac{\lg(b_1 b_4 b_9 b_{16})}{\lg(b_1 b_2 b_3 b_4)} =$.

【解析】 本题考查数列概念的理解, 对数的运算, 属于中档题

由题意可得: $b_{a_n} = a_{b_n} \Rightarrow b_{n^2} = (b_n)^2 \Rightarrow b_1 = b_1^2, b_4 = b_2^2, b_9 = b_3^2, b_{16} = b_4^2,$

所以 $\frac{\lg(b_1 b_4 b_9 b_{16})}{\lg(b_1 b_2 b_3 b_4)} = \frac{\lg(b_1 b_2 b_3 b_4)^2}{\lg(b_1 b_2 b_3 b_4)} = 2$

【答案】 2

11. 设 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, 且 $\frac{1}{2 + \sin \alpha_1} + \frac{1}{2 + \sin(2\alpha_2)} = 2$, 则 $|10\pi - \alpha_1 - \alpha_2|$ 的最小值等于.

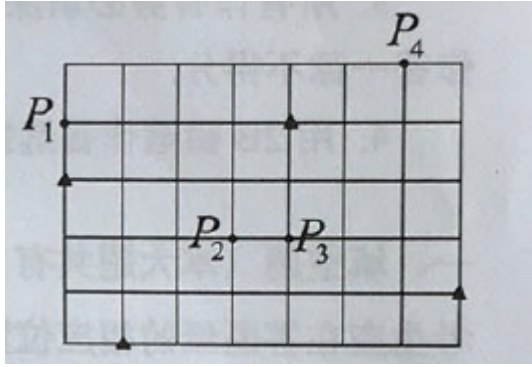
【解析】 考查三角函数的性质和值域, $\frac{1}{2 + \sin \alpha_1} \in \left[\frac{1}{3}, 1\right], \frac{1}{2 + \sin(2\alpha_2)} \in \left[\frac{1}{3}, 1\right],$

要使 $\frac{1}{2 + \sin \alpha_1} + \frac{1}{2 + \sin(2\alpha_2)} = 2$, 则 $\begin{cases} \frac{1}{2 + \sin \alpha_1} = 1 \\ \frac{1}{2 + \sin(2\alpha_2)} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\frac{\pi}{2} + 2k_1\pi \\ \alpha_2 = -\frac{\pi}{4} + k_2\pi \end{cases}, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$

$|10\pi - \alpha_1 - \alpha_2|_{\min} = \left| 10\pi + \frac{3}{4}\pi - (2k_1 + k_2)\pi \right|_{\min} = \frac{\pi}{4}$, 当 $2k_1 + k_2 = 11$ 时成立

【答案】 $\frac{\pi}{4}$

12. 如图, 用 35 个单位正方形拼成一个矩形, 点 P_1, P_2, P_3, P_4 以及四个标记为“▲”的点在正方形的顶点处. 设集合 $\Omega = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$, 点 $P \in \Omega$. 过 P 作直线 l_P , 使得不在 l_P 上的“▲”的点分布在 l_P 的两侧. 用 $D_1(l_P)$ 和 $D_2(l_P)$ 分别表示 l_P 一侧和另一侧的“▲”的点到 l_P 的距离之和. 若过 P 的直线 l_P 中有且只有一条满足 $D_1(l_P) = D_2(l_P)$, 则 Ω 中所有这样的 P 为.



【解析】本题考查有向距离，以左下角的顶点为原点建立直角坐标系。四个标记为“▲”的点的坐标分别为 $(0,3), (1,0), (4,4), (7,1)$ ，设过 P 点的直线为： $ax+by+c=0$ ，

$$\text{此时有向距离 } d_1 = \frac{3b+c}{\sqrt{a^2+b^2}}, d_2 = \frac{a+c}{\sqrt{a^2+b^2}}, d_3 = \frac{4a+4b+c}{\sqrt{a^2+b^2}}, d_4 = \frac{7a+b+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\text{且由 } d_1+d_2+d_3+d_4 = 12a+8b+4c=0 \Rightarrow 3a+2b+c=0$$

$$\text{则过 } P_1 \text{ 的直线满足 } 4b+c=0; \text{ 此时 } \begin{cases} a = -\frac{2}{3}b \\ c = -4b \end{cases}, \text{ 直线为:}$$

$$-\frac{2}{3}bx+by-4b=0 \Rightarrow b(-\frac{2}{3}x+y-4)=0:$$

$$\text{所以此时满足题意的直线为: } -\frac{2}{3}x+y-4=0$$

则过 P_2 的直线满足 $3a+2b+c=0$;此时有无数组解，例如：直线 $x=3$ ，直线 $y=2$ 等都满足题意。

$$\text{则过 } P_3 \text{ 的直线满足 } 4a+2b+c=0; \text{ 此时 } \begin{cases} a=0 \\ c=-2b \end{cases}, \text{ 直线为: } by-2b=0 \Rightarrow b(y-2)=0,$$

所以此时满足题意的直线为： $y-2=0$ 。

$$\text{则过 } P_4 \text{ 的直线满足 } 6a+6b+c=0; \text{ 此时 } \begin{cases} a = -\frac{4}{3}b \\ c = 2b \end{cases}, \text{ 直线为:}$$

$$-\frac{4}{3}bx+by+2b=0 \Rightarrow b(-\frac{4}{3}x+y+2)=0:$$

$$\text{所以此时满足题意的直线为: } -\frac{4}{3}x+y+2=0$$

【答案】 P_1, P_3, P_4

二、选择题（本大题共有4题，满分20分，每题5分）每题有且只有一个正确选项. 考生应在答题纸的相应位置，将代表正确选项的小方格涂黑.

13. 关于 x, y 的二元一次方程组 $\begin{cases} x+5y=0, \\ 2x+3y=4 \end{cases}$ 的系数行列式 D 为 ()

- A. $\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ B. $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ C. $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ D. $\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$

【答案】C

14. 在数列 $\{a_n\}$, $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n, n \in \mathbb{N}^*$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ().

- A. 等于 $-\frac{1}{2}$ B. 等于0 C. 等于 $\frac{1}{2}$ D. 不存在

【答案】B

15. 已知 a, b, c 为实常数, 数列 $\{x_n\}$ 的通项 $x_n = an^2 + bn + c, n \in \mathbb{N}^*$, 则“存在 $k \in \mathbb{N}^*$, 使得 $x_{100+k}, x_{200+k}, x_{300+k}$ 成等差数列”的一个必要条件是 ()

- A. $a \geq 0$ B. $b \leq 0$ C. $c = 0$ D. $a - 2b + c = 0$

【答案】A

16. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$ 和 $C_2: x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$. P 为 C_1 上的动点, Q 为 C_2 上的动点, ω 是 $\overline{OP} \cdot \overline{OQ}$ 的最大值. 记 $\Omega = \{(P, Q) \mid P \text{ 在 } C_1 \text{ 上, } Q \text{ 在 } C_2 \text{ 上, 且 } \overline{OP} \cdot \overline{OQ} = \omega\}$, 则 Ω 中 ()

- A. 元素个数为2 B. 元素个数为4 C. 元素个数为8 D. 含有无穷个元素

【答案】D

三、解答题（本大题共有5题，满分76分）解答下列各题必须在答题纸的相应位置写出必要的步骤.

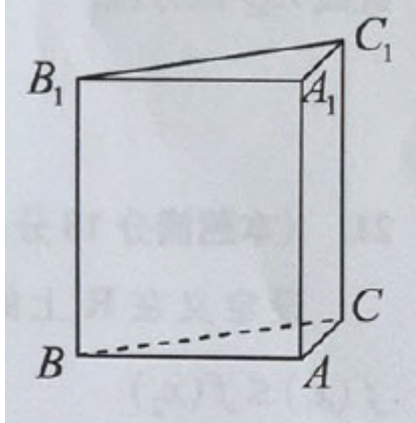
17. （本题满分14分，第1小题满分6分，第2小题满分8分）

如图，直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的底面为直角三角形，两直角边 AB 和 AC 的长分别为4和2

，侧棱 AA_1 的长为5.

(1) 求三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积；

(2) 设 M 是 BC 中点，求直线 A_1M 与平面 ABC 所成角的大小。



【答案】 (1) $V_{ABC-A_1B_1C_1} = \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 4\right) \times 5 = 20$

(2) $\arctan \sqrt{5}$

18. (本题满分14分，第1小题满分6分，第2小题满分8分)

已知函数 $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x + \frac{1}{2}, x \in (0, \pi)$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调递增区间；

(2) 设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，角 A 所对的边 $a = \sqrt{19}$ ，角 B 所对的边 $b = 5$. 若 $f(A) = 0$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积.

【答案】 (1) $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

(2) $S_{\triangle ABC} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$

19. (本题满分14分，第1小题满分6分，第2小题满分8分)

根据预测，某地第 n ($n \in \mathbb{N}^*$) 个月共享单车的投放量和损失量分别为 a_n 和 b_n (单位：辆

)，其中 $a_n = \begin{cases} 5n^4 + 15, & 1 \leq n \leq 3, \\ -10n + 470, & n \geq 4, \end{cases} b_n = n + 5$. 第 n 个月底的共享单车的保有量是前 n 个月

的累计投放量与累计损失量的差.

(1) 求该地第4个月底的共享单车的保有量；

(2) 已知该地共享单车停放点第 n 个月底的单车容纳量 $S_n = -4(n-46)^2 + 8800$ (单位: 辆). 设在某月底, 共享单车保有量达到最大, 问该保有量是否超出了此时停放点的单车容纳量?

【答案】 (1) 935

$$(2) Q = \begin{cases} 14, n=1 \\ 102, n=2 \\ 514, n=3 \\ -\frac{11}{2}n^2 + \frac{919}{2}n - 815, n \geq 4 \end{cases}, \text{ 所以当 } n=42 \text{ 时 } Q \text{ 取最大值, 为 } 8782$$

此时 $S_{42} = -4(42-46)^2 + 8800 = 8736 < 8782$, 所以当 Q 取最大值时, 停放点不能容纳

20. (本题满分16分, 第1小题满分4分, 第2小题满分5分, 第3小题满分7分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, A 为 Γ 的上顶点, P 为 Γ 上异于上、下顶点的动点. M 为 x 正半轴上的动点.

(1) 若 P 在第一象限, 且 $|OP| = \sqrt{2}$, 求 P 的坐标;

(2) 设 $P\left(\frac{8}{5}, \frac{3}{5}\right)$. 若以 A, P, M 为顶点的三角形是直角三角形, 求 M 的横坐标;

(3) 若 $|MA| = |MP|$, 直线 AQ 与 Γ 交于另一点 C , 且 $\overline{AQ} = 2\overline{AC}$, $\overline{PQ} = 4\overline{PM}$, 求直线 AQ 的方程.

【答案】 (1) $P\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$;

(2) $M\left(\frac{29}{20}, 0\right)$ 或 $M\left(\frac{3}{5}, 0\right)$ 或 $M(1, 0)$;

(3) $y = \frac{\sqrt{5}}{10}x + 1$

解析 (3) \because 点 P 是 Γ 上一动点, 设 $P(2\cos\alpha, \sin\alpha)$, $M(t, 0)$, $t > 0$, $Q(x_q, y_q)$, $C(x_c, y_c)$, 且 $A(0, 1)$.

记线段 AP 中点为点 $N(x_n, y_n)$, 则 $N\left(\cos\alpha, \frac{\sin\alpha + 1}{2}\right)$

$$\because \overline{PQ} = 4\overline{PM}, \therefore \overline{PQ} = -\frac{3}{4}\overline{QM}, \therefore \begin{cases} x_q = \frac{2\cos\alpha - \frac{4}{3}t}{1 - \frac{4}{3}} = 4t - 6\cos\alpha \\ y_q = \frac{\sin\alpha - \frac{4}{3} \times 0}{1 - \frac{4}{3}} = -3\sin\alpha \end{cases},$$

$$Q(4t - 6\cos\alpha, -3\sin\alpha);$$

$$\text{又 } \overline{AQ} = 2\overline{AC}, \therefore \overline{AC} = \overline{CQ}, \therefore C \text{ 是 } AQ \text{ 中点}, \therefore C\left(2t - 3\cos\alpha, \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sin\alpha\right)$$

又 $\because C$ 是 Γ 上的一点, \therefore

$$\frac{(2t - 3\cos\alpha)^2}{4} + \frac{(1 - 3\sin\alpha)^2}{4} = 1 \Rightarrow 2t^2 + 3 - 6t\cos\alpha - 3\sin\alpha = 0$$

$\because |\overline{MA}| = |\overline{MP}|$, $\therefore \triangle MAP$ 为等腰三角形, N 为底边 AP 中点, $\therefore \overline{MN} \perp \overline{AP}$

$$\therefore \overline{MN} = \left(\cos\alpha - t, \frac{\sin\alpha + 1}{2}\right), \overline{AP} = (2\cos\alpha, \sin\alpha - 1),$$

$$\therefore \overline{MN} \cdot \overline{AP} = 2\cos\alpha(\cos\alpha - t) + \frac{1}{2}(\sin\alpha + 1)(\sin\alpha - 1) = 0$$

$$\Rightarrow 4\cos\alpha(\cos\alpha - t) - \cos^2\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha(4\cos\alpha - 4t - \cos\alpha) = 0$$

(1) 若 $\cos\alpha = 0$, 则 $P(0, \sin\alpha)$, 由 P 不在上顶点可知, $\sin\alpha \neq 1$, P 为下顶点,

$$\sin\alpha = -1, P(0, -1)$$

$$\therefore 2t^2 + 3 - 6t \times 0 - 3 \times (-1) = 0 \Rightarrow t^2 = -3, \text{ 无解};$$

(2) $\cos\alpha \neq 0$, 则 $3\cos\alpha - 4t = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{4}\cos\alpha > 0$, $\therefore \cos\alpha > 0$

$$\therefore 2\left(\frac{3}{4}\cos\alpha\right)^2 + 3 - 6 \times \frac{3}{4}\cos\alpha \times \cos\alpha - 3\sin\alpha = 0 \Rightarrow 9\sin^2\alpha - 8\sin\alpha - 1 = 0$$

$$\therefore \sin\alpha = -\frac{1}{9} \text{ 或 } 1 \text{ (舍)}, \therefore \cos\alpha = \frac{4\sqrt{5}}{9}, \therefore t = \frac{3}{4} \times \frac{4\sqrt{5}}{9} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\therefore Q\left(-\frac{4\sqrt{5}}{3}, \frac{1}{3}\right), \therefore k_{AQ} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{0 - \left(\frac{4\sqrt{5}}{3}\right)} = \frac{\sqrt{5}}{10}, \therefore \text{直线 } AQ \text{ 方程 } y = \frac{\sqrt{5}}{10}x + 1$$

21. (本题满分18分, 第1小题满分4分, 第2小题满分6分, 第3小题满分8分)

设定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 满足: 对于任意的 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有

$$f(x_1) \leq f(x_2).$$

(1) 若 $f(x) = ax^3 + 1$, 求 a 的取值范围;

(2) 若 $f(x)$ 是周期函数, 求证: $f(x)$ 是常值函数;

(3) 若 $f(x)$ 恒大于零. $g(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的、恒大于零的周期函数, M 是 $g(x)$ 的最大值. 函数 $h(x) = f(x)g(x)$, 证明: “ $h(x)$ 是周期函数”的充要条件是“ $f(x)$ 是常值函数”.

【答案】 (1) 记 $x_1 < x_2$, 若 $f(x_1) \leq f(x_2)$, $f(x) = ax^3 + 1$

$$\text{则 } f(x_1) - f(x_2) = a(x_1^3 - x_2^3) \leq 0, \because x_1 < x_2, \therefore x_1^3 - x_2^3 < 0, \therefore a \geq 0$$

(2) 若 $f(x)$ 是周期函数, 记其周期为 T_k , 任取 $x_0 \in \mathbf{R}$, 则有 $f(x_0) = f(x_0 + T_k)$

又由题意, 对任意 $x \in [x_0, x_0 + T_k]$, $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_0 + T_k)$, \therefore

$$f(x_0) = f(x) = f(x_0 + T_k)$$

又 $\because f(x_0) = f(x_0 + nT_k), n \in \mathbf{Z}$, 并且

$$\dots \cup [x_0 - 3T_k, x_0 - 2T_k] \cup [x_0 - 2T_k, x_0 - T_k] \cup [x_0 - T_k, x_0] \cup [x_0, x_0 + T_k] \cup [x_0 + T_k, x_0 + 2T_k] \cup \dots = \mathbf{R}$$

所以对任意 $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = f(x_0) = C$, 为常数, 证毕。

(3) **充分性:** 若 $f(x)$ 是常值函数, 记 $f(x) = c_1$, 设 $g(x)$ 的一个周期为 T_g , 则

$$h(x) = c_1 \cdot g(x), \text{ 则对任意 } x_0 \in \mathbf{R}, h(x_0 + T_g) = c_1 \cdot g(x_0 + T_g) = c_1 \cdot g(x_0) = h(x_0),$$

故 $h(x)$ 是周期函数成立。

必要性: 若 $h(x)$ 是周期函数, 记其一个周期为 T_h 。集合 $A = \{x \mid g(x) = m\}$

任取 $x_0 \in A$, 则必存在 $N_2 \in \mathbf{N}$, 使得 $x_0 - N_2T_h \leq x_0 - T_g$, 即

$$[x_0 - T_g, x_0] \subseteq [x_0 - N_2T_h, x_0],$$

$$\dots \cup [x_0 - 3T_g, x_0 - 2T_g] \cup [x_0 - 2T_g, x_0 - T_g] \cup [x_0 - T_g, x_0] \cup [x_0, x_0 + T_g] \cup [x_0 + T_g, x_0 + 2T_g] \cup \dots = \mathbf{R}$$

\therefore

$$\dots \cup [x_0 - 2N_2T_h, x_0 - N_2T_h] \cup [x_0 - N_2T_h, x_0] \cup [x_0, x_0 + N_2T_h] \cup [x_0 + N_2T_h, x_0 + 2N_2T_h] \cup \dots = \mathbf{R}$$

$$h(x_0) = g(x_0) \cdot f(x_0) = h(x_0 - N_2T_h) = g(x_0 - N_2T_h) \cdot f(x_0 - N_2T_h)$$

因为 $g(x_0) = M \geq g(x_0 - N_2 T_h) > 0$, $f(x_0) \geq f(x_0 - N_2 T_h) > 0$, 因此若

$$h(x_0) = h(x_0 - N_2 T_h)$$

必有 $g(x_0) = M = g(x_0 - N_2 T_h)$, 且 $f(x_0) = f(x_0 - N_2 T_h) = c$, 而由第 (2) 问证明可知

对任意 $x \in R$, $f(x) = f(x_0) = C$, 为常数。必要性证毕。