1993年天津高考文科数学真题及答案

一．选择题：本题共18个小题;每小题3分，共54分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。把所选项前的字母填在题后括号内。

（1）若双曲线实半轴长为2，焦距为6，那么离心率是　　（ C ）

（A）$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　（B）$\frac{\sqrt{6}}{2}$　　（C）$\frac{3}{2}$　　（D）2

（2）函数 $y=\frac{1-tg^2 2x}{1+tg^2 2x}$ 的最小正周期是　　（ B ）

（A）$\frac{\pi}{4}$　　（B）$\frac{\pi}{2}$　　（C）π　　（D）2π

（3）当圆锥的侧面积和底面积的比值是 $\sqrt{2}$ 时，圆锥的轴截面顶角是

(A) 45^0　　(B) 60^0　　(C) 90^0　　(D) 120^0　（ C ）

（4）当 $z=-\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ 时，$z^{100}+z^{50}+1$ 的值等于　　（ D ）

（A）1　　（B）-1　　（C）i　　（D）-i

（5）若正棱锥的底面边长与侧棱长相等，则该棱锥一定不是

（A）三棱锥　（B）四棱锥　（C）五棱锥　（D）六棱锥　　（ D ）

（6）在直角三角形中两锐角为A和B，则sinAsinB　　（ B ）

（A）有最大值 $\frac{1}{2}$ 和最小值0　　（B）有最大值 $\frac{1}{2}$，但无最小值

（C）即无最大值也无最小值　（D）有最大值1，但无最小值

（7）在各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_5a_6=9$，则

$\log_3 a_1+\log_3 a_2+\cdots+\log_3 a_{10}=$　　（ B ）

（A）12　　（B）10　　（C）8　　（D）$2+\log_3 5$

（8）$F(x)=(1+\frac{2}{2^x-1})f(x)(x\neq 0)$ 是偶函数，且 $f(x)$ 不恒等于零，则 $f(x)$

（ A ）

（A）是奇函数　　（B）是偶函数

（C）可能是奇函数也可能是偶函数 （D）不是奇函数也不是偶函数

（9）设直线 $2x-y-\sqrt{3}=0$ 与 y 轴的交点为 P，点 P 把圆 $(x+1)^2+y^2=25$ 的直径分为两段，则其长度之比为 （ A ）

（A） $\frac{7}{3}$ 或 $\frac{3}{7}$ （B） $\frac{7}{4}$ 或 $\frac{4}{7}$ （C） $\frac{7}{5}$ 或 $\frac{5}{7}$ （D） $\frac{7}{6}$ 或 $\frac{6}{7}$

（10）若 a,b 是任意实数，且 $a>b$，则 （ D ）

（A） $a^2>b^2$ （B） $\frac{b}{a}<1$ （C） $\lg(a-b)>0$ （D） $(\frac{1}{2})^a<(\frac{1}{2})^b$

（11）已知集合 $E=\{\theta \mid \cos\theta<\sin\theta, 0\le\theta\le2\pi\}, F=\{\theta \mid tg\theta<\sin\theta\}$，那么 $E\cap F$ 为区间 （ A ）

（A） $(\frac{\pi}{2},\pi)$ （B） $(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$ （C） $(\pi,\frac{3\pi}{2})$ （D） $(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4})$

（12）一动圆与两圆：$x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2-8x+12=0$ 都外切，则动圆圆心的轨迹为 （ C ）

（A）抛物线 （B）圆 （C）双曲线的一支 （D）椭圆

（13）若直线 ax+by+c=0 在第一、二、三象限，则 （ D ）

（A）ab>0, bc>0 （B）ab>0, bc<0 （C）ab<0, bc>0 （D）ab<0, bc<0

（14）如果圆柱轴截面的周长 l 为定值，那么圆柱体积的最大值是 （ A ）

（A） $(\frac{l}{6})^3\pi$ （B） $(\frac{l}{3})^3\pi$ （C） $(\frac{l}{4})^3\pi$ （D） $\frac{1}{4}(\frac{l}{4})^3\pi$

（15）由 $(\sqrt{3}x+\sqrt[3]{2})^{100}$ 展开所得的 x 的多项式中，系数为有理数的共有 （ B ）

（A）50 项 （B）17 项 （C）16 项 （D）15 项

（16）设 a,b,c 都是正数，且 $3^a=4^b=6^c$，那么 （ B ）

（A） $\frac{1}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ （B） $\frac{2}{c}=\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$ （C） $\frac{1}{c}=\frac{2}{a}+\frac{2}{b}$ （D） $\frac{2}{c}=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$

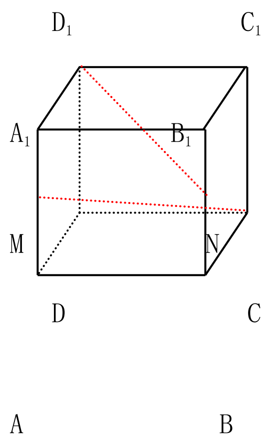
（17）同室四人各写一张贺年卡，先集中起来，然后每人从中拿一张别人送出的贺年卡，则四张贺年卡不同的分配方式有 （ B ）

（A）6 种 （B）9 种 （C）11 种 （D）23 种

（18）在正方体 $A_1B_1C_1D_1$-ABCD 中，M、N 分别为棱 A_1A 和 B_1B 的中点（如图）。若 θ 为直线 CM 与 D_1N 所成的角，则 $\sin\theta =$ （ D ）

（A）$\frac{1}{9}$　（B）$\frac{2}{3}$

（C）$\frac{2\sqrt{5}}{9}$　（D）$\frac{4\sqrt{5}}{9}$



二．填空题：本大题共 6 小题;每小题 3 分，共 18 分。把答案填在题中横线上。

（19）抛物线 $y^2=4x$ 的弦 AB 垂直于 x 轴，若 AB 的长为 $4\sqrt{3}$，则焦点到 AB 的距离为________________.

[答]：2

（20）在半径为 30m 的圆形广场中央上空，设置一个照明光源，射向地面的光呈圆锥形，且其轴截面顶角为 120^0。若要光源恰好照亮整个广场，则其高度应为________m（精确到）.

[答]：

（21）在 50 件产品中有 4 件是次品，从中任意抽出 5 件，至少有 3 件是次品的抽法共_________种（用数字作答）.

[答]：4186

（22）建造一个容积为 $8m^3$，深为 2m 的长方体无盖水池。如果池底和池壁的造价每平方米分别为 120 元和 80 元，那么水池的最低造价为_______元.

[答]：1760

（23）设 $f(x)=4^x-2^{x+1}$，则 $f^{-1}(0)=$__________

[答]：1

（24）设 $a>1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-a^{n+1}}{1+a^{n+1}}=$____________

[答]：-1

三．解答题：本大题共 5 小题;共 48 分.解答应写出文字说明、演算步骤。

（25）（本小题满分 8 分）

解方程$\lg(x^2+4x-26)-\lg(x-3)=1$.

解：原方程可化为$\lg\dfrac{x^2+4x-26}{x-3}=\lg 10$,

$\dfrac{x^2+4x-26}{x-3}=10$解得$x_1=3-\sqrt{5};x_2=3+\sqrt{5}$

检验:$x=3-\sqrt{5}$时,$x-3=-\sqrt{5}<0$所以是增根

$x=3+\sqrt{5}$时,满足方程,

所以原方程的根是$x=3+\sqrt{5}$

（26）（本小题满分 8 分）

已知数列$\dfrac{8\cdot 1}{1^2\cdot 3^2},\dfrac{8\cdot 2}{3^2\cdot 5^2},\cdots\dfrac{8n}{(2n-1)^2(2n+1)^2},\cdots$ S_n为其前 n 项和，计算得

$S_1=\dfrac{8}{9},S_2=\dfrac{24}{25},S_3=\dfrac{48}{49},S_4=\dfrac{80}{81}$.观察上述结果，推测出计算 S_n 的公式，并用数学归纳法加以证明。

解：$S_n=\dfrac{(2n+1)^2-1}{(2n+1)^2}(n\in N)$

证明如下：

（1）当 n=1 时，$S_1=\dfrac{3^2-1}{3^2}=\dfrac{8}{9}$,等式成立。

（2）设 n=k 时等式成立，即$S_k=\dfrac{(2k+1)^2-1}{(2k+1)^2}$

$$
\begin{aligned}
则S_{k+1}&=S_k+\frac{8(k+1)}{(2k+1)^2(2k+3)^2}\\
&=\frac{(2k+1)^2-1}{(2k+1)^2}+\frac{8(k+1)}{(2k+1)^2(2k+3)^2}\\
&=\frac{[(2k+1)^2-1](2k+3)^2+8(k+1)}{(2k+1)^2(2k+3)^2}\\
&=\frac{(2k+1)^2(2k+3)^2-(2k+3)^2+8(k+1)}{(2k+1)^2(2k+3)^2}
\end{aligned}
$$

$$=\frac{(2k+1)^2 2k+3)^2-(2k+1)}{(2k+1)^2(2k+3)^2}$$

$$=\frac{(2k+3)^2-1}{(2k+3)^2}$$

$$=\frac{[2(k+1)+1]^2-1}{[2(k+1)+1]^2}$$

由此可知，当 n=k+1 时等式也成立

根据（1），（2）可知，等式对任何 $n\in N$ 都成立。

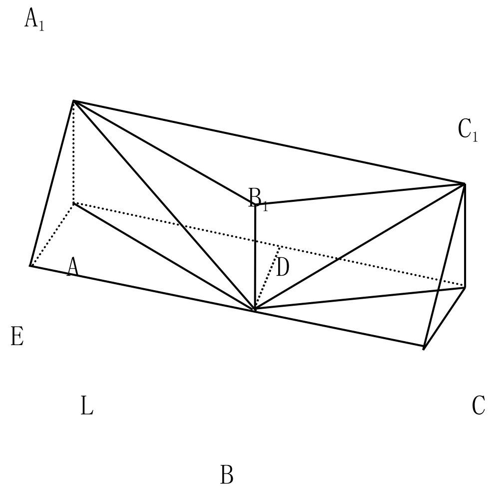
（27）（本小题满分 10 分）

如图，$A_1B_1C_1$-ABC 是直三棱柱，过点 A_1、B、C_1 的平面和平面 ABC 的交线记作 L。

（Ⅰ）判定直线 A_1C_1 和 L 的位置关系，并加以证明;

（Ⅱ）若 $A_1A=1$，AB=4，BC=3，$\angle ABC=90^0$，求顶点 A_1 到直线 L 的距离。

解：（Ⅰ）L∥A_1C_1 证明如下：



根据棱柱的定义知

平面 $A_1B_1C_1$ 和平面 ABC 平行。

由题设知直线

A_1C_1=平面 $A_1B_1C_1$∩平面 A_1BC_1，

直线 L=平面 $A_1B_1C_1$∩平面 A_1BC_1，根据两平面平行的性质定理

有 L∥A_1C_1

（Ⅱ）过点 A_1 作 A_1E⊥L 于 E，则 A_1E

的长为点 A_1 到 L 的距离。连接 AE，由直棱柱的定义知 A_1A⊥平面 ABC

∴直线 AE 是直线 A_1E 在平面 ABC 上的射影。

又 L 在平面 ABC 上，根据三垂线定理的逆定理有 AE⊥L

由棱柱的定义质 A_1C_1∥AC，又 L∥A_1C_1，∴L∥AC

作 BD⊥AC 于 D，

则 BD 是 Rt△ABC 斜边 AC 上的高，且 BD=AE，

从而 $AE=BD=\dfrac{AB\times BC}{AC}=\dfrac{12}{5}$

在 Rt△A_1AE 中，∵$A_1A=1$，∠$A_1AE=90^0$，

$\therefore A_1E=\sqrt{AE^2+A_1A^2}=\frac{13}{5}.$

故点 A_1 到直线 L 的距离为 $\frac{13}{5}$.

（28）（本小题满分 10 分）

在面积为 1 的△PMN 中，$tgM=\frac{1}{2},tgN=-2$.建立适当的坐标系，求出以 M，N 为焦点且过点 P 的椭圆方程。

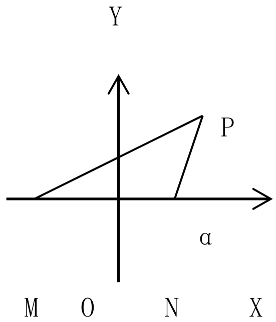
解：建立直角坐标系如图：

以 MN 所在直线为 x 轴，线段 MN 的垂直平分线为 y 轴

设所求的椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

分别记 M、N、P 点的坐标为

（-c, 0), (c, 0) 和 (x_0, y_0)



∵tgα=tg(π-∠N)=2

∴由题设知

$\begin{cases} y_0=\frac{1}{2}(x_0+c) \\ y_0=2(x_0-c) \end{cases}$ 解得

$\begin{cases} x_0=\frac{5}{3}c \\ y_0=\frac{4}{3}c \end{cases}$ 即 $P(\frac{5}{3}c,\frac{4}{3}c)$

在△PMN 中，MN=2c MN 上的高为 $\frac{4}{3}c$

$\therefore S_{\triangle PMN}=\frac{1}{2}\times 2c\times\frac{4}{3}c=1 \therefore c=\frac{\sqrt{3}}{2}$,即 $P(\frac{5\sqrt{3}}{6},\frac{2\sqrt{3}}{3})$

$|PM|=\sqrt{(x_0+c)^2+{y_0}^2}=\frac{2\sqrt{15}}{3}$

$|PN|=\sqrt{(x_0-c)^2+{y_0}^2}=\frac{\sqrt{15}}{3}$

$\therefore a=\frac{1}{2}(|PM|+|PN|)=\frac{\sqrt{15}}{2}$从而$b^2=a^2-c^2=3$

故所求椭圆方程为$\frac{4x^2}{15}+\frac{y^2}{3}=1$

（29）（本小题满分 12 分）

设复数$z=\cos\theta+i\sin\theta(0<\theta<\pi),\omega=\frac{1-(\bar{z})^4}{1+z^4}$,已知$|\omega|=\frac{\sqrt{3}}{3},\arg\omega<\frac{\pi}{2}$, 求$\theta$。

解：$\omega=\frac{1-[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]^4}{1+[\cos\theta+i\sin\theta]^4}=\frac{1-\cos(-4\theta)-i(-4\theta)}{1+\cos 4\theta+\sin 4\theta}$

$=\frac{2\sin^2 2\theta+2i\sin 2\theta\cos 2\theta}{2\cos^2 2\theta+2i\sin 2\theta\cos 2\theta}=tg2\theta(\sin 4\theta+i\cos 4\theta)$

$|\omega|=|tg2\theta|=\frac{\sqrt{3}}{3}\because 0<\theta<\pi$,故有

(1)当$tg2\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$时,得$\theta=\frac{\pi}{12}$或$\theta=\frac{7\pi}{12}$,

这时都有$\omega=\frac{\sqrt{3}}{3}(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$,得$\arg\omega=\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}$,适合题意

(2)当$tg2\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$时,得$\theta=\frac{5\pi}{12}$或$\theta=\frac{1\pi}{12}$,

这时都有$\omega=\frac{\sqrt{3}}{3}(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6})$,得$\arg\omega=\frac{11\pi}{6}>\frac{\pi}{2}$,不适合题意,舍去

综合(1),(2)可知$\theta=\frac{\pi}{12}$或$\theta=\frac{7\pi}{12}$.