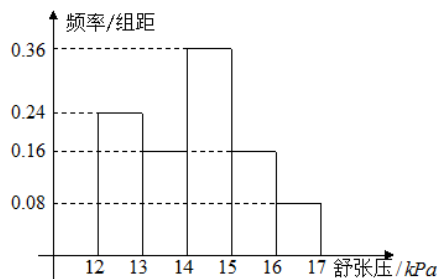


2014高考数学山东【理】

一、选择题

1. 已知 $a, b \in R$, i 是虚数单位, 若 $a-i$ 与 $2+bi$ 互为共轭复数, 则 $(a+bi)^2 = (\quad)$
- A. $5-4i$ B. $5+4i$ C. $3-4i$ D. $3+4i$
2. 设集合 $A = \{x \mid |x-1| < 2\}$, $B = \{y \mid y = 2^x, x \in [0, 2]\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$
- A. $[0, 2]$ B. $(1, 3)$ C. $[1, 3)$ D. $(1, 4)$
3. 函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(\log_2 x)^2 - 1}}$ 的定义域为 (\quad)
- A. $(0, \frac{1}{2})$ B. $(2, +\infty)$ C. $(0, \frac{1}{2}) \cup (2, +\infty)$ D. $(0, \frac{1}{2}] \cup [2, +\infty)$
4. 用反证法证明命题: “已知 a, b 为实数, 则方程 $x^2 + ax + b = 0$ 至少有一个实根” 时, 要做的假设是 (\quad)
- A. 方程 $x^2 + ax + b = 0$ 没有实根 B. 方程 $x^2 + ax + b = 0$ 至多有一个实根
- C. 方程 $x^2 + ax + b = 0$ 至多有两个实根 D. 方程 $x^2 + ax + b = 0$ 恰好有两个实根
5. 已知实数 x, y 满足 $a^x < a^y$ ($0 < a < 1$), 则下列关系式恒成立的是 (\quad)
- A. $\frac{1}{x^2+1} > \frac{1}{y^2+1}$ B. $\ln(x^2+1) > \ln(y^2+1)$ C. $\sin x > \sin y$ D. $x^3 > y^3$
6. 直线 $y = 4x$ 与曲线 $y = x^3$ 在第一象限内围成的封闭图形的面积为 (\quad)
- A. $2\sqrt{2}$ B. $4\sqrt{2}$ C. 2 D. 4
7. 为研究某药品的疗效, 选取若干名志愿者进行临床试验, 所有志愿者的舒张压数据 (单位: kPa) 的分组区间为 $[12, 13)$, $[13, 14)$, $[14, 15)$, $[15, 16)$, $[16, 17]$, 将其按从左到右的顺序分别编号为第一组, 第二组, ……., 第五组. 右图是根据试验数据制成的频率分布直方图. 已知第一组与第二组共有 20 人, 第三组中没有疗效的有 6 人, 则第三组中有疗效的人数为 (\quad)



- A. $(0, \frac{1}{2})$ B. $(\frac{1}{2}, 1)$ C. $(1, 2)$ D. $(2, +\infty)$

9. 已知 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - y - 1 \leq 0, \\ 2x - y - 3 \geq 0, \end{cases}$ 当目标函数 $z = ax + by (a > 0, b > 0)$ 在该约束条件下取到最小

值 $2\sqrt{5}$ 时, $a^2 + b^2$ 的最小值为()

- A. 5 B. 4 C. $\sqrt{5}$ D. 2

10. 已知 $a > b$, 椭圆 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 双曲线 C_2 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, C_1 与 C_2 的离心率之积

为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 C_2 的渐近线方程为()

- A. $x \pm \sqrt{2}y = 0$ B. $\sqrt{2}x \pm y = 0$ C. $x \pm 2y = 0$ D. $2x \pm y = 0$

二、填空题

11. 执行右面的程序框图, 若输入的 x 的值为 1, 则输出的 n 的值为_____

;

12. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \tan A$, 当 $A = \frac{\pi}{6}$ 时, $\triangle ABC$ 的面积为_____

;

13. 三棱锥 $P-ABC$ 中, D, E 分别为 PB, PC 的中点, 记三棱锥

$D-ABE$ 的体积为 V_1 , $P-ABC$ 的体积为 V_2 , 则 $\frac{V_1}{V_2} =$ _____;

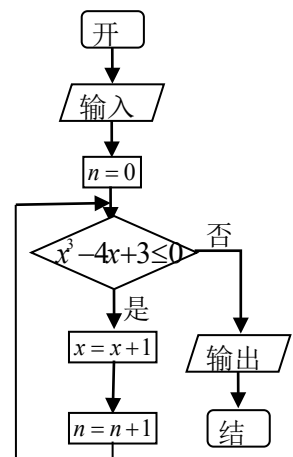
14. 若 $(ax^2 + \frac{b}{x})^6$ 的展开式中 x^3 项的系数为 20, 则 $a^2 + b^2$ 的最小值为_____

;

15. 已知函数 $y = f(x) (x \in R)$. 对函数 $y = g(x) (x \in I)$, 定义 $g(x)$ 关于 $f(x)$ 的“对称函数”为

$y = h(x) (x \in I)$, $y = h(x)$ 满足: 对任意 $x \in I$, 两个点 $(x, h(x)), (x, g(x))$ 关于点 $(x, f(x))$ 对称, 若

$h(x)$ 是 $g(x) = \sqrt{4-x^2}$ 关于 $f(x) = 3x+b$ 的“对称函数”, 且 $h(x) > g(x)$ 恒成立, 则实数 b 的取值范围是_____;



三、解答题: 本大题共6小题, 共75分.

16. (本小题满分12分)

已知向量 $\vec{a} = (m, \cos 2x)$, $\vec{b} = (\sin 2x, n)$, 设函数 $f(x) = \vec{a} \cdot \vec{b}$, 且 $y = f(x)$ 的图象过点 $(\frac{\pi}{12}, \sqrt{3})$ 和点 $(\frac{2\pi}{3}, -2)$.

(I) 求 m, n 的值;

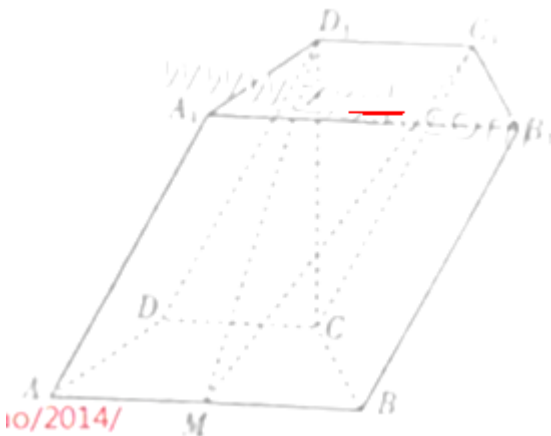
(II) 将 $y = f(x)$ 的图象向左平移 φ ($0 < \varphi < \pi$) 个单位后得到函数 $y = g(x)$ 的图象. 若 $y = g(x)$ 的图象上各最高点到点 $(0, 3)$ 的距离的最小值为 1, 求 $y = g(x)$ 的单调增区间.

17. (本小题满分12分)

如图, 在四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 是等腰梯形, $\angle DAB = 60^\circ$, $AB = 2CD = 2$, M 是线段 AB 的中点.

(I) 求证: $C_1M \parallel A_1ADD_1$;

(II) 若 CD_1 垂直于平面 $ABCD$ 且 $CD_1 = \sqrt{3}$, 求平面 C_1D_1M 和平面 $ABCD$ 所成的角 (锐角) 的余弦值.



18. (本小题满分12分)

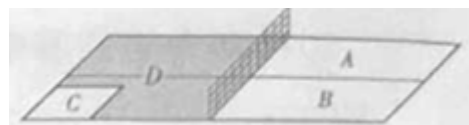
乒乓球台面被网分成甲、乙两部分, 如图,

甲上有两个不相交的区域 A, B , 乙被划分为两个不相交的区域 C, D . 某次测试要求队员接到落点在甲上

的来球后向乙回球. 规定: 回球一次, 落点在 C 上记 3 分,

上记 1 分, 其它情况记 0 分. 对落点在 A 上的来球, 小明回

落点在 C 上的概率为 $\frac{1}{2}$, 在 D 上的概率为 $\frac{1}{3}$; 对落点在



在 D
球的
 B 上

的来球，小明回球的落点在 C 上的概率为 $\frac{1}{5}$ ，在 D 上的概率为 $\frac{3}{5}$ 。假设共有两次来球且落在 A, B 上各一次，小明的两次回球互不影响。求：

(I) 小明的两次回球的落点中恰有一次的落点在乙上的概率；

(II) 两次回球结束后，小明得分之和 ξ 的分布列与数学期望。

19. (本小题满分12分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为2，前 n 项和为 S_n ，且 S_1, S_2, S_4 成等比数列。

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(II) 令 $b_n = (-1)^{n-1} \frac{4n}{a_n a_{n+1}}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

20. (本小题满分13分)

设函数 $f(x) = \frac{e^x}{x^2} - k\left(\frac{2}{x} + \ln x\right)$ (k 为常数， $e = 2.71828 \dots$ 是自然对数的底数)。

(I) 当 $k \leq 0$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(II) 若函数 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 内存在两个极值点，求 k 的取值范围。

21. (本小题满分14分)

已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点为 F ， A 为 C 上异于原点的任意一点，过点 A 的直线 l 交 C 于另一点 B ，交 x 轴的正半轴于点 D ，且有 $|FA| = |FD|$ 。当点 A 的横坐标为3时， $\triangle ADF$ 为正三角形。

(I) 求 C 的方程；

(II) 若直线 $l_1 \parallel l$ ，且 l_1 和 C 有且只有一个公共点 E ，

(i) 证明直线 AE 过定点，并求出定点坐标；

(ii) $\triangle ABE$ 的面积是否存在最小值？若存在，请求出最小值；若不存在，请说明理由。

参考答案

2014年普通高等学校招生全国统一考试（山东卷）

理科数学参考答案

一. 1、D 2、C 3、C 4、A 5、D 6、D 7、C 8、B 9、B 10、A

二. 11、3 12、 $\frac{1}{6}$ 13、 $\frac{1}{4}$ 14、2 15、 $(2\sqrt{10}, +\infty)$

三. 16、解：（I）已知 $f(x) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = m \sin 2x + n \cos 2x$ ，

Q $f(x)$ 的图像过点 $(\frac{\pi}{12}, \sqrt{3})$, $(\frac{2\pi}{3}, -2)$

$$\therefore f(\frac{\pi}{12}) = m \sin \frac{\pi}{6} + n \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{3},$$

$$f(\frac{2\pi}{3}) = m \sin \frac{4\pi}{3} + n \cos \frac{4\pi}{3} = -2$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{1}{2}m + \frac{\sqrt{3}}{2}n = \sqrt{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}m - \frac{1}{2}n = -2 \end{cases} \text{解得} \begin{cases} m = \sqrt{3} \\ n = 1 \end{cases}$$

$$\text{（II） } f(x) = \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = 2 \sin(2x + \frac{\pi}{6}), \quad g(x) = f(x + \varphi) = 2 \sin(2x + 2\varphi + \frac{\pi}{6})$$

设 $g(x)$ 的对称轴为 $x = x_0$ ，Q $d = \sqrt{1 + x_0^2} = 1$ 解得 $x_0 = 0$

$$\therefore g(0) = 2, \text{ 解得 } \varphi = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore g(x) = 2 \sin(2x + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}) = 2 \sin(2x + \frac{\pi}{2}) = 2 \cos 2x$$

$$\therefore -\pi + 2k\pi \leq 2x \leq 2k\pi, k \in Z$$

$$-\frac{\pi}{2} + k\pi \leq x \leq k\pi, k \in Z$$

$$\therefore f(x) \text{ 的单调增区间 } \left[-\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi \right], k \in Z$$

17、解：（I）证明：因为四边形 $ABCD$ 是等腰梯形，

且 $AB = 2CD$

所以 $AB \parallel DC$ ，又由 M 是 AB 中点，

因此 $CD \parallel MA$ 且 $CD = MA$ 。

连接 AD_1

在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,

因为 $CD \parallel C_1D_1, CD = C_1D_1$

可得 $C_1D_1 \parallel MA, C_1D_1 = MA$

所以四边形 AMC_1D_1 为平行四边形

因此 $C_1M \parallel D_1A$

又 $C_1M \notin$ 平面 $A_1ADD_1, D_1A \subset$ 平面 A_1ADD_1 ,

所以 $C_1M \parallel$ 平面 A_1ADD_1

(II) 由 (I) 知, 平 $D_1C_1M \cap$ 面 $ABCD = AB$ 过 C 向 AB 做垂线交 AB 于 N , 连接 D_1N ,

由 $CD_1 \perp$ 面 $ABCD$, 可得 $D_1N \perp AB$, 故 $\angle D_1NC$ 为二面角 C_1-AB-C 的平面角

在 $RT\triangle D_1CN$ 中, $BC = 1, \angle NBC = 60^\circ$ 可得 $CN = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 $ND_1 = \sqrt{CD_1^2 + CN^2} = \frac{\sqrt{15}}{2}$

在 $Rt\triangle D_1CN$ 中, $\cos \angle D_1NC = \frac{CN}{D_1N} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{15}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$,

所以平面 C_1D_1M 和平面 $ABCD$ 所成的角 (锐角) 的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

18、解: (I) 设恰有一次的落点在乙上为事件 A

$$P(A) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{3}{10}$$

(II) ξ 的可能取值为 $0, 1, 2, 3, 4, 6$

$$P(\xi=0) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{30}, \quad P(\xi=1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{6}$$

$$P(\xi=2) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{5}, \quad P(\xi=3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$

$$P(\xi=4) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{11}{30}, \quad P(\xi=6) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$$

∴ ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3	4	6
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{1}{10}$

$$\therefore \text{其数学期望为 } E(\xi) = 0 \times \frac{1}{30} + 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{5} + 3 \times \frac{2}{15} + 4 \times \frac{11}{30} + 6 \times \frac{1}{10} = \frac{91}{30}$$

19、解：（I） $d = 2, S_1 = a_1, S_2 = 2a_1 + d, S_4 = 4a_1 + 6d$

∵ S_1, S_2, S_4 成等比数列

$$\therefore S_2^2 = S_1 S_4$$

解得 $a_1 = 1, \therefore a_n = 2n - 1$

$$\text{(II)} \quad b_n = (-1)^{n-1} \frac{4n}{a_n a_{n+1}} = (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \right)$$

当 n 为偶数时, $T_n = (1 + \frac{1}{3}) - (\frac{1}{3} + \frac{1}{5}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{7}) - \dots + (\frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-1}) - (\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1})$

当 n 为奇数时, $T_n = (1 + \frac{1}{3}) - (\frac{1}{3} + \frac{1}{5}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{7}) - \dots - (\frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-1}) + (\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1})$

$$\therefore T_n = 1 + \frac{1}{2n+1} = \frac{2n+2}{2n+1}$$

$$\therefore T_n = \begin{cases} \frac{2n}{2n+1}, & n \text{ 为偶数} \\ \frac{2n+2}{2n+1}, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

20、解：（I） $f'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - 2xe^x}{x^4} - k(-\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x})$

$$= \frac{(x-2)(e^x - kx)}{x^3} (x > 0)$$

当 $k \leq 0$ 时, $kx \leq 0, \therefore e^x - kx > 0$

令 $f'(x) = 0$, 则 $x = 2$

∴ 当 $x \in (0, 2)$ 时, $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $f(x)$ 单调递增.

（II）令 $g(x) = e^x - kx$

则 $g'(x) = e^x - k$

当 $k \leq 0$ 时, $g'(x) > 0$ 恒成立, $\therefore g(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递增, 不符合题意.

当 $k > 0$ 时

令 $g'(x) = 0, \therefore e^x = k, x = \ln k$

$\therefore g'(0) = 1 - k < 0, g(0) = 1 > 0$

$g'(2) = e^2 - k > 0, g(2) = e^2 - 2k > 0$

$\therefore k < \frac{e^2}{2}$

$g(\ln k) = e^{\ln k} - k \ln k < 0$

$\therefore \ln k > 1$

$\therefore k > e$

综上: k 的取值范围为 $\left(e, \frac{e^2}{2} \right)$.

21、解: (I) 当 A 的横坐标为 3 时, 过 A 作 $AG \perp x$ 轴于 G ,

$|AF| = 3 + \frac{p}{2}$

$\therefore |FD| = |AF| = 3 + \frac{p}{2}$

$\triangle AFD$ 为等边三角形

$\therefore |FG| = \frac{1}{2}|FD| = \frac{3}{2} + \frac{p}{4}$

又 $|FG| = 3 - \frac{p}{2}$

$\therefore \frac{3}{2} + \frac{p}{4} = 3 - \frac{p}{2}, \therefore p = 2, \therefore C: y^2 = 4x$

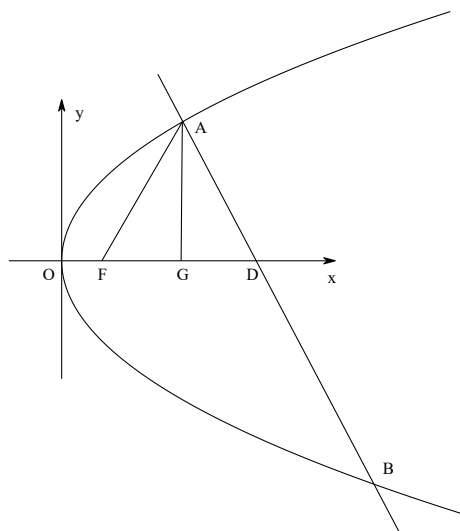
(II) (i) 设 $A(x_1, y_1), |FD| = |AF| = x_1 + 1$

$\therefore D(x_1 + 2, 0) \therefore k_{AB} = \frac{y_1}{2}$

$l_1 \perp AB \therefore k_{l_1} = -\frac{1}{2}y_1$

又 l_1 与 C 相切, 设切点 $E(x_E, y_E)$,

$x = \frac{1}{4}y^2, x' = \frac{1}{2}y \therefore \frac{1}{2}y_E = \frac{-2}{y_1}, \therefore y_E = -\frac{4}{y_1}$



$$x_E = \frac{1}{4} \left(-\frac{4}{y_1} \right)^2 = \frac{4}{y_1^2} \therefore E \left(\frac{4}{y_1^2}, -\frac{4}{y_1} \right), A \left(\frac{y_1^2}{4}, y_1 \right)$$

$$\therefore l_{AE}: y - y_1 = \frac{y_1 + \frac{4}{y_1}}{\frac{4}{y_1^2} - \frac{y_1^2}{4}} \left(x - \frac{y_1^2}{4} \right)$$

即 $y = \frac{4y_1}{y_1^2 - 4}(x - 1)$ 恒过点 $(1, 0)$ \therefore 直线 AE 过定点 $(1, 0)$.

$$(ii) l_{AB}: y - y_1 = -\frac{y_1}{2} \left(x - \frac{y_1^2}{4} \right),$$

$$\text{即} \begin{cases} x = -\frac{2}{y_1}y + \frac{y_1^2}{4} + 2 \\ y^2 = 4x \end{cases}$$

$$y^2 + \frac{8}{y_1}y - (y_1^2 + 8) = 0$$

$$y_1 + y_2 = -\frac{8}{y_1}$$

$$\therefore y_2 = -y_1 - \frac{8}{y_1}$$

$$|AB| = \sqrt{1 + \frac{4}{y_1^2}} \cdot |y_1 - y_2| = \sqrt{1 + \frac{4}{y_1^2}} \left| 2y_1 + \frac{8}{y_1} \right|$$

$$\text{点 } E \text{ 到 } AB \text{ 的距离 } d = \frac{\left| \frac{8}{y_1^2} + \frac{y_1^2}{4} + 2 - \frac{4}{y_1^2} \right|}{\sqrt{1 + \frac{4}{y_1^2}}} = \frac{\left| \frac{4}{y_1^2} + \frac{y_1^2}{4} + 2 \right|}{\sqrt{1 + \frac{4}{y_1^2}}}$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} |AB| \cdot d = \frac{1}{2} \left| 2y_1 + \frac{8}{y_1} \right| \left| \frac{4}{y_1^2} + \frac{y_1^2}{4} + 2 \right| = 2 \left| \frac{y_1}{2} + \frac{2}{y_1} \right|^3 \geq 2 \times 2^3 = 16, \text{ 当且仅当 } y_1 = \pm 2 \text{ 时, “=” 成立.}$$

选择填空解析

2014年全国统一高考（山东）理科真题及详解

一. 选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分。在每小题给出的四个选项中，选择符

合题目要求的选项。

1. 已知 $a, b \in R, i$ 是虚数单位, 若 $a-i$ 与 $2+bi$ 互为共轭复数, 则 $(a+bi)^2 =$

- (A) $5-4i$ (B) $5+4i$ (C) $3-4i$ (D) $3+4i$

答案: D

解析: $a-i$ 与 $2+bi$ 互为共轭复数,

$$\begin{aligned} \therefore a=2, b=1 \therefore (a+bi)^2 &= (2+i)^2 \\ &= 4+4i+i^2 = 3+4i \end{aligned}$$

2. 设集合 $A = \{x \mid |x-1| < 2\}, B = \{y \mid y = 2^x, x \in [0, 2]\}$, 则 $A \cap B =$

- (A) $[0, 2]$ (B) $(1, 3)$ (C) $[1, 3)$ (D) $(1, 4)$

答案: C

解析:

$$\text{Q } |x-1| < 2 \therefore -2 < x-1 < 2 \therefore -1 < x < 3$$

$$\text{Q } y = 2^x, x \in [0, 2] \therefore y \in [1, 4]$$

$$\therefore A \cap B = [1, 3)$$

3. 函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(\log_2 x)^2 - 1}}$ 的定义域为

- (A) $(0, \frac{1}{2})$ (B) $(2, +\infty)$ (C) $(0, \frac{1}{2}) \cup (2, +\infty)$ (D) $(0, \frac{1}{2}] \cup [2, +\infty)$

答案: C

解析:

$$(\log_2 x)^2 - 1 > 0$$

$$\therefore \log_2 x > 1 \text{ 或 } \therefore \log_2 x < -1$$

$$\therefore x > 2 \text{ 或 } \therefore 0 < x < \frac{1}{2}.$$

4. 用反证法证明命题“设 $a, b \in R$, 则方程 $x^2 + ax + b = 0$ 至少有一个实根”时要做的假设是

(A) 方程 $x^2 + ax + b = 0$ 没有实根 (B) 方程 $x^2 + ax + b = 0$ 至多有一个实根

(C) 方程 $x^2 + ax + b = 0$ 至多有两个实根 (D) 方程 $x^2 + ax + b = 0$ 恰好有两个实根

5. 已知实数 x, y 满足 $a^x < a^y (0 < a < 1)$, 则下列关系式恒成立的是

- (A) $\frac{1}{x^2+1} > \frac{1}{y^2+1}$ (B) $\ln(x^2+1) > \ln(y^2+1)$ (C) $\sin x > \sin y$ (D) $x^3 > y^3$

答案: D

解析:

$Q a^x < a^y, 0 < a < 1$, 排除A,B, 对于C , $\sin x$ 是周期函数, 排除C.
 $\therefore x > y$

6. 直线 $y = 4x$ 与曲线 $y = x^2$ 在第一象限内围成的封闭图形的面积为

- (A) $2\sqrt{2}$ (B) $4\sqrt{2}$ (C) 2 (D) 4

答案: D

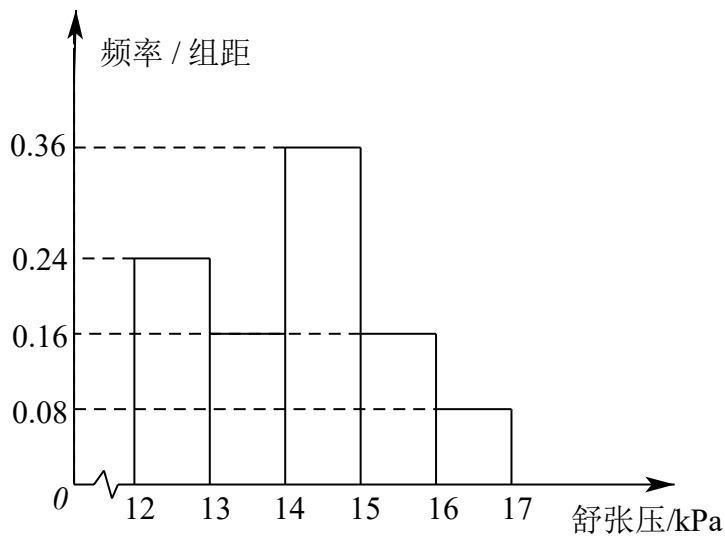
解析:

$$Q 4x = x^3, \quad Q 4x - x^3 = x(4 - x^2) = x(2 + x)(2 - x)$$

第一象限

$$\int_0^2 (4x - x^3) = 2x^2 - \frac{1}{4}x^4 = 8 - 4 = 0$$

7. 为了研究某药厂的疗效, 选取若干名志愿者进行临床试验, 所有志愿者的舒张压数据 (单位: kPa) 的分组区间为 $[12,13), [13,14), [14,15), [15,16), [16,17]$, 将其按从左到右的顺序分别编号为第一组, 第二组, ..., 第五组, 右图是根据试验数据制成的频率分布直方图, 已知第一组与第二组共有20人, 第三组中没有疗效的有6人, 则第三组中有疗效的人数为



- (A) 6 (B) 8 (C) 12 (D) 18

答案: C

解析: 第一组与第二组频率之和为 $0.24 + 0.16 = 0.4$

$$20 \div 0.4 = 50$$

$$50 \times 0.36 = 18$$

$$18 - 6 = 12$$

8. 已知函数 $f(x) = |x - 2| + 1$, $g(x) = kx$. 若方程 $f(x) = g(x)$ 有两个不相等的实根, 则实数 k 的取值范围是

- (A) $(0, \frac{1}{2})$ (B) $(\frac{1}{2}, 1)$ (C) $(1, 2)$ (D) $(2, +\infty)$

答案: B

解析: 画出 $f(x)$ 的图象最低点是 $(2, 1)$, $g(x) = kx$ 过原点和 $(2, 1)$ 时斜率最小为 $\frac{1}{2}$, 斜率最大时 $g(x)$ 的斜率与 $f(x) = x - 1$ 的斜率一致。

9. 已知 x, y 满足的约束条件 $\begin{cases} x - y - 1 \leq 0, \\ 2x - y - 3 \geq 0, \end{cases}$ 当目标函数 $z = ax + by (a > 0, b > 0)$ 在该约束条件下取得最小

值 $2\sqrt{5}$ 时, $a^2 + b^2$ 的最小值为

- (A) 5 (B) 4 (C) $\sqrt{5}$ (D) 2

答案: B

解析: $\begin{cases} x - y - 1 \leq 0 \\ 2x - y - 3 \geq 0 \end{cases}$ 求得交点为 $(2, 1)$, 则 $2a + b = 2\sqrt{5}$, 即圆心 $(0, 0)$ 到直线 $2a + b - 2\sqrt{5} = 0$ 的距

离的平方 $\left(\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right)^2 = 2^2 = 4$ 。

10. 已知 $a > 0, b > 0$, 椭圆 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 双曲线 C_2 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, C_1 与 C_2 的离心率

之积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 C_2 的渐近线方程为

- (A) $x \pm \sqrt{2}y = 0$ (B) $\sqrt{2}x \pm y = 0$ (C) $x \pm 2y = 0$ (D) $2x \pm y = 0$

答案: A

解析:

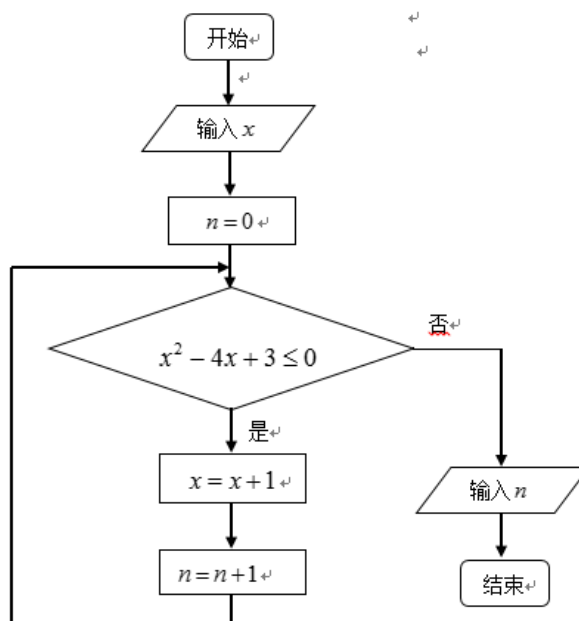
$$e_1^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

$$e_2^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2}$$

$$\therefore (e_1 e_2)^2 = \frac{a^4 - b^4}{a^4} = \frac{3}{4} \therefore a^4 = 4b^4$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

二. 填空题: 本大题共5小题, 每小题5分, 共25分, 答案须填在题中横线上。



11. 执行下面的程序框图，若输入的 x 的值为 1，

则输出的 n 的值为 _____。

答案：3

解析：根据判断条件 $x^2 - 4x + 3 \leq 0$ ，得 $1 \leq x \leq 3$ ，

输入 $x = 1$

第一次判断后循环， $x = x + 1 = 2, n = n + 1 = 1$

第二次判断后循环， $x = x + 1 = 3, n = n + 1 = 2$

第三次判断后循环， $x = x + 1 = 4, n = n + 1 = 3$

第四次判断不满足条件，退出循环，输出 $n = 3$

12. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \tan A$ ，当 $A = \frac{\pi}{6}$ 时， $\triangle ABC$ 的面积为 _____。

答案： $\frac{1}{6}$

解析：由条件可知 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = bc \cos A = \tan A$ ，

$$\text{当 } A = \frac{\pi}{6}, bc = \frac{2}{3}, S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{6}$$

13. 三棱锥 $P-ABC$ 中， D, E 分别为 PB, PC 的中点，记三棱锥 $D-ABE$ 的体积为 V_1 ， $P-ABC$ 的体

积为 V_2 ，则 $\frac{V_1}{V_2} =$ _____。

答案： $\frac{1}{4}$

解析：分别过 E, C 向平面做高 h_1, h_2 ，由 E 为 PC 的中点得 $\frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{2}$ ，

由 D 为 PB 的中点得 $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABP}$ ，所以 $V_1 : V_2 = \frac{1}{3}S_{\triangle ABD} \cdot h_1 = \frac{1}{3}S_{\triangle ABP} \cdot h_2 = \frac{1}{4}$

14. 若 $\left(ax^6 + \frac{b}{x}\right)^4$ 的展开式中 x^3 项的系数为 20，则 $a^2 + b^2$ 的最小值为 _____。

答案：2

解析：将 $(ax^2 + \frac{b}{x})^6$ 展开，得到 $T_{r+1} = C_6^r a^{6-r} b^r x^{12-3r}$ ，令 $12-3r=3$ ，得 $r=3$ 。

由 $C_6^3 a^3 b^3 = 20$ ，得 $ab=1$ ，所以 $a^2 + b^2 \geq 2ab = 2$ 。

15. 已知函数 $y=f(x)(x \in R)$ ，对函数 $y=g(x)(x \in I)$ ，定义 $g(x)$ 关于 $f(x)$ 的“对称函数”为函数 $y=h(x)(x \in I)$ ， $y=h(x)$ 满足：对任意 $x \in I$ ，两个点 $(x, h(x)), (x, g(x))$ 关于点 $(x, f(x))$ 对称，若 $h(x)$ 是 $g(x) = \sqrt{4-x^2}$ 关于 $f(x) = 3x+b$ 的“对称函数”，且 $h(x) > g(x)$ 恒成立，则实数 b 的取值范围是 _____。

答案： $b > 2\sqrt{10}$

解析：根据图像分析得，当 $f(x) = 3x+b$ 与 $g(x) = \sqrt{4-x^2}$ 在第二象限相切时，

$b = 2\sqrt{10}$ ，由 $h(x) > g(x)$ 恒成立得 $b > 2\sqrt{10}$ 。