

2013年普通高等学校招生全国统一考试(湖南卷)

数学文史类

一、选择题：本大题共9小题，每小题5分，共45分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 复数 $z=i \cdot (1+i)$ (i 为虚数单位) 在复平面上对应的点位于 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

2. “ $1 < x < 2$ ” 是 “ $x < 2$ ” 成立的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

3. 某工厂甲、乙、丙三个车间生产了同一种产品，数量分别为120件，80件，60件。为了解它们的产品质量是否存在显著差异，用分层抽样方法抽取了一个容量为 n 的样本进行调查，其中从丙车间的产品中抽取了3件，则 $n =$ ()

- A. 9 B. 10 C. 12 D. 13

4. 已知 $f(x)$ 是奇函数， $g(x)$ 是偶函数，且 $f(-1) + g(1) = 2$ ， $f(1) + g(-1) = 4$ ，则 $g(1)$ 等于 ()

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

5. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，角 A, B 所对的边长分别为 a, b 。若 $2a \sin B = \sqrt{3} b$ ，则角 A 等于 ()

- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{6}$ D. $\frac{\pi}{12}$

6. 函数 $f(x) = \ln x$ 的图像与函数 $g(x) = x^2 - 4x + 4$ 的图像的交点个数为 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

7. 已知正方体的棱长为1，其俯视图是一个面积为1的正方形，侧视图是一个面积为 $\sqrt{2}$ 的矩形，则该正方体的正视图的面积等于 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. 1 C. $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ D. $\sqrt{2}$

8. 已知 a, b 是单位向量， $a \cdot b = 0$ 。若向量 c 满足 $|c - a - b| = 1$ ，则 $|c|$ 的最大值为 ()

- A. $\sqrt{2} - 1$ B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{2} + 1$ D. $\sqrt{2} + 2$

9. 已知事件“在矩形 ABCD 的边 CD 上随机取一点 P, 使 $\triangle APB$ 的最大边是 AB”发生的概率为 $\frac{1}{2}$, 则 $\frac{AD}{AB} = (\quad)$

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{7}}{4}$

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

10. 已知集合 $U = \{2, 3, 6, 8\}, A = \{2, 3\}, B = \{2, 6, 8\}$, 则 $(C \cup A) \cap B = \underline{\hspace{2cm}}$

11. 在平面直角坐标系 xOy 中, 若直线 $l_1: \begin{cases} x = 2s + 1, \\ y = s \end{cases}$ (s 为参数) 和直线 $l_2: \begin{cases} x = at, \\ y = 2t - 1 \end{cases}$ (t 为参数)

平行, 则常数 a 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$

12. 执行如图 1 所示的程序框图, 如果输入 $a=1, b=2$, 则输出的 a 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$

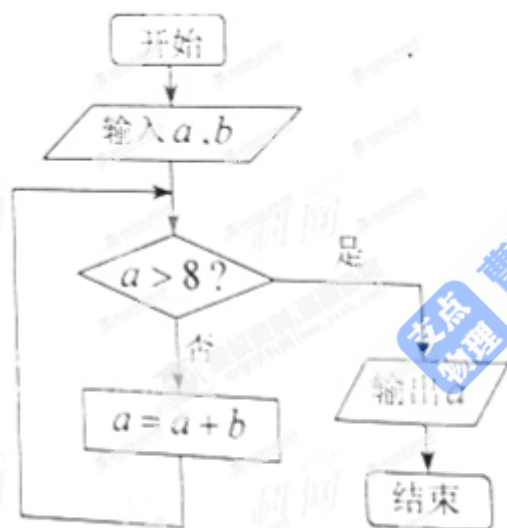


图 1

13. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + 2y \leq 8, \\ 0 \leq x \leq 4, \\ 0 \leq y \leq 3, \end{cases}$ 则 x+y 的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$

14. 设 F_1, F_2 是双曲线 C, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的两个焦点. 若在 C 上存在一点 P. 使

$PF_1 \perp PF_2$, 且 $\angle PF_1F_2 = 30^\circ$, 则 C 的离心率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15. 对于 $E = \{a_1, a_2, \dots, a_{100}\}$ 的子集 $X = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}\}$, 定义 X 的“特征数列”

为 x_1, x_2, \dots, x_{100} , 其中 $x_{i_1} = x_{i_2} = \dots = x_{i_k} = 1$. 其余项均为 0, 例如子集 $\{a_2, a_3\}$ 的

“特征数列”为 0, 1, 0, 0, ..., 0

(1) 子集 $\{a_1, a_3, a_5\}$ 的“特征数列”的前三项和等于_____;

(2) 若 E 的子集 P 的“特征数列” P_1, P_2, \dots, P_{100} 满足 $P_i + P_{i+1} = 1, 1 \leq i \leq 99$;

E 的子集 Q 的“特征数列” q_1, q_2, \dots, q_{100} 满足 $q_1 = 1, q_1 + q_{j+1} + q_{j+2} = 1,$

$1 \leq j \leq 98$, 则 $P \cap Q$ 的元素个数为_____.

三、解答题; 本大题共 6 小题, 共 75 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

16. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \cos x \cdot \cos(x - \frac{\pi}{3})$

(1) 求 $f(\frac{2\pi}{3})$ 的值;

(2) 求使 $f(x) < \frac{1}{4}$ 成立的 x 的取值集合

17. (本小题满分 12 分)

如图 2. 在直棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC = \sqrt{2}$, $AA_1 = 3$, D 是 BC 的中点, 点 E 在菱 BB_1 上运动。

(I) 证明: $AD \perp C_1E$;

(II) 当异面直线 AC, C_1E 所成的角为 60° 时,

求三棱锥 $C_1-A_1B_1E$ 的体积

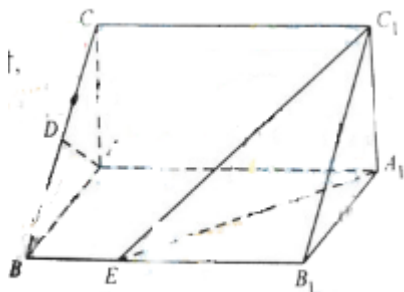
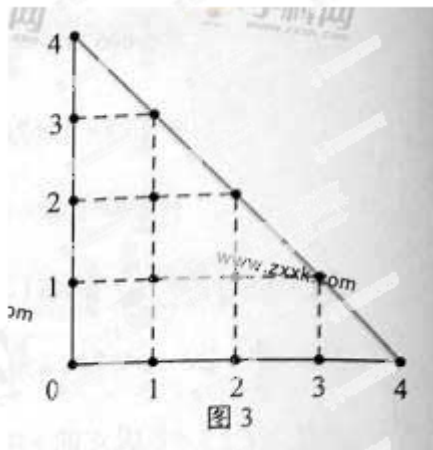


图 2



18. (本小题满分 12 分)

某人在如图 3 所示的直角边长为 4 米的三角形地块的每个格点（指纵、横直线的交叉点以及三角形的顶点）处都种了一株相同品种的作物。根据历年的种植经验，一株该种作物的年收货量 Y (单位: kg)与它的“相近”作物株数 X 之间的关系如下表所示:

X	1	2	3	4
Y	51	48	45	42

这里，两株作物“相近”是指它们之间的直线距离不超过 1 米。

(I) 完成下表,并求所种作物的平均年收获量;

Y	51	48	45	42
频数		4		

(II) 在所种作物中随机选取一株,求它的年收获量至少为 48kg 的概率.

19. (本小题满分 13 分)

设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_1 \neq 0, 2a_n - a_1 = S_1 \cdot S_n, n \in \mathbb{N}^*$

(I) 求 a_1, a_2 , 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 求数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和.

20. (本小题满分 13 分)

已知 F_1, F_2 分别是椭圆 $E: \frac{x^2}{5} + y^2 = 1$ 的左、右焦点 F_1, F_2 关于直线 $x + y - 2 = 0$ 的对称点是圆 C 的一条直径的两个端点。

(I) 求圆 C 的方程;

(II) 设过点 F_2 的直线 l 被椭圆 E 和圆 C 所截得的弦长分别为 a, b 。当 ab 最大时, 求直线 l 的方程。

21. (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = \frac{1-x}{1+x^2} e^x$ 。

(I) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 证明: 当 $f(x_1) = f(x_2)$ ($x_1 \neq x_2$) 时, $x_1 + x_2 < 0$ 。