

2010年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）

数学（理科）

一、填空题（本大题满分56分）本大题共有14题，考生必须在答题纸相应编号的空格内直接填写结果，每个空格填对得4分，否则一律得零分。

1. 不等式 $\frac{2-x}{x+4} > 0$ 的解集是 $(-4, 2)$ 。

解析：考查分式不等式的解法 $\frac{2-x}{x+4} > 0$ 等价于 $(x-2)(x+4) < 0$, 所以 $-4 < x < 2$

2. 若复数 $z = 1 - 2i$ (i 为虚数单位), 则 $z \cdot \bar{z} + z =$ $6 - 2i$ 。

解析：考查复数基本运算 $z \cdot \bar{z} + z = (1 - 2i)(1 + 2i) + 1 - 2i = 6 - 2i$

3. 动点 P 到点 $F(2, 0)$ 的距离与它到直线 $x + 2 = 0$ 的距离相等, 则 P 的轨迹方程为

$y^2 = 8x$ 。

解析：考查抛物线定义及标准方程

定义知 P 的轨迹是以 $F(2, 0)$ 为焦点的抛物线, $p=2$ 所以其方程为 $y^2 = 8x$

4. 行列式 $\begin{vmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & \sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{6} \end{vmatrix}$ 的值是 0。

解析：考查行列式运算法则 $\begin{vmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & \sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{6} \end{vmatrix} = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{2} = 0$

5. 圆 $C: x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ 的圆心到直线 $l: 3x + 4y + 4 = 0$ 的距离 $d =$ 3。

解析：考查点到直线距离公式

圆心 $(1, 2)$ 到直线 $3x + 4y + 4 = 0$ 距离为 $\frac{|3 \times 1 + 4 \times 2 + 4|}{5} = 3$

6. 随机变量 ξ 的概率分布率由下图给出：

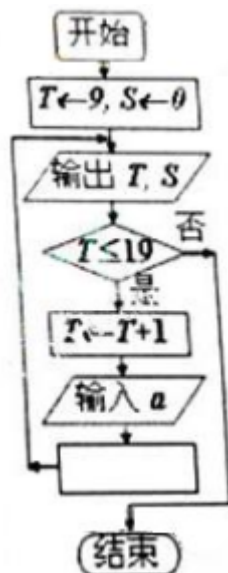
x	7	8	9	10
$P(\xi = x)$	0.3	0.35	0.2	0.15

则随机变量 ξ 的均值是 8.2

解析：考查期望定义式 $E\xi = 7 \times 0.3 + 8 \times 0.35 + 9 \times 0.2 + 10 \times 0.15 = 8.2$

7.

2010年上海世博会园区每天9:00开园，20:00停止入园。在右边的框图中， S 表示上海世博会官方网站在每个整点报道的入园总人数， a 表示整点报道前1个小时内入园人数，则空白的



执行框内应填入 $S \leftarrow S+a$ 。

8. 对任意不等于1的正数 a ，函数 $f(x) = \log_a(x+3)$ 的反函数的图像都经过点 P ，则点 P 的坐标是 $(0, -2)$

解析： $f(x) = \log_a(x+3)$ 的图像过定点 $(-2, 0)$ ，所以其反函数的图像过定点 $(0, -2)$

9. 从一副混合后的扑克牌（52张）中随机抽取1张，事件 A 为“抽得红桃K”，事件 B 为“抽得为

黑桃”，则概率 $P(A \cup B) = \frac{7}{26}$ （结果用最简分数表示）

解析：考查互斥事件概率公式 $P(A \cup B) = \frac{1}{52} + \frac{13}{52} = \frac{7}{26}$

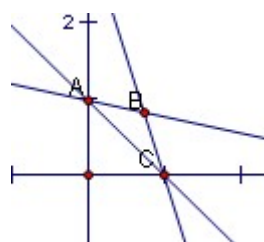
10. 在 n 行 n 列矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & 1 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$ 中，

记位于第 i 行第 j 列的数为 $a_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n)$ 。当 $n = 9$ 时， $a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{99} = 45$

解析： $a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{99} = 1+3+5+7+9+2+4+6+8=45$

11.

将直线 $l_2: nx + y - n = 0$ 、 $l_3: x + ny - n = 0 (n \in N^*, n \geq 2)$ 与 x 轴



、y轴围成的封闭图形的面积记为 S_n ，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$ 。

解析：B($\frac{n}{n+1}, \frac{n}{n+1}$) 所以 $BO \perp AC$,

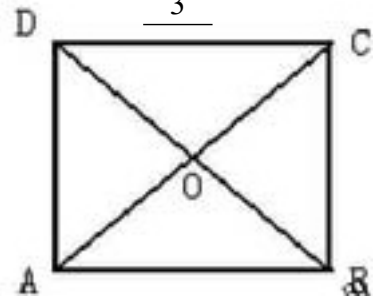
$$S_n = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{n}{n+1} \sqrt{2} = \frac{n}{n+1} \quad \text{所以} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2}$$

12. 如图所示，在边长为4的正方形纸片ABCD中，AC与BD相交于O，剪去 $\triangle AOB$ ，将剩余部分沿

OC、OD折叠，使OA、OB重合，则以A、(B)、C、D、O为顶点的四面体的体积为 $\frac{8\sqrt{2}}{3}$

解析：翻折后的几何体为底面边长为4，侧棱长为 $2\sqrt{2}$ 的正三棱锥，

$$\text{高为} \frac{2\sqrt{6}}{3} \quad \text{所以该四面体的体积为} \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 16 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$



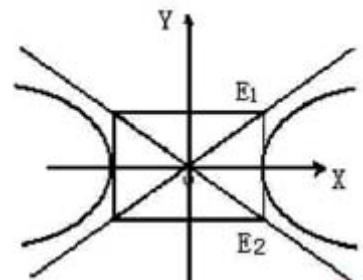
13. 如图所示，直线 $x=2$ 与双曲线 $\Gamma: \frac{\lambda^2}{4} - y^2 = 1$ 的渐近线交于 E_1, E_2 两点，记

$\overrightarrow{OE_1} = \overline{e_1}, \overrightarrow{OE_2} = \overline{e_2}$ ，任取双曲线 Γ 上的点P，若 $\overrightarrow{OP} = a\overline{e_1} + b\overline{e_2}$ ($a, b \in R$)，则a、b满足的一个等式是 $4ab=1$

解析： $E_1(2,1), E_2(2,-1)$

$$\overrightarrow{OP} = a\overline{e_1} + b\overline{e_2} = (2a+2b, a-b), \quad \text{点P在双曲线上}$$

$$\therefore \frac{(2a+2b)^2}{4} - (a-b)^2 = 1, \quad \text{化简得} 4ab=1$$



14. 以集合 $U = \{a, b, c, d\}$ 的子集中选出2个不同的子集，需同时满足以下两个条件：

(1) a、b都要选出；

(2) 对选出的任意两个子集A和B，必有 $A \subseteq B$ 或 $B \subseteq A$ ，那么共有 36 种不同的选法。

解析：列举法 共有36种

二. 选择题 (本大题满分20分) 本大题共有4题，每题有且只有一个正确答案。考生必须在答题纸的相应编号上，将代表答案的小方格涂黑，选对得5分，否则一律得零分。

15. “ $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} (k \in Z)$ ”是“ $\tan x = 1$ ”成立的 [答] (A)

(A) 充分不必要条件.

(B) 必要不充分条件.

(C) 充分条件.

(D) 既不充分也不必要条件.

解析： $\tan(2k\pi + \frac{\pi}{4}) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$ ，所以充分；

但反之不成立，如 $\tan \frac{5\pi}{4} = 1$ ，所以不必要

16. 直线l的参数方程是 $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-t \end{cases} (t \in R)$, 则l的方向向量是 \vec{d} 可以是 【答】 (C)

- (A) (1, 2) (B) (2, 1) (C) (-2, 1) (D) (1, -2)

解析: 直线l的一般方程是 $x + 2y - 5 = 0$, $k = -\frac{1}{2}$, 所以C正确

17. 若 x_0 是方程 $(\frac{1}{2})^x = x^{\frac{1}{3}}$ 的解, 则 x_0 属于区间 【答】 (C)

- (A) $(\frac{2}{3}, 1)$ (B) $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ (C) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ (D) $(0, \frac{1}{3})$

解析: 结合图形: $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}} > (\frac{1}{3})^{\frac{1}{3}}, (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} < (\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}}$, $\therefore x_0$ 属于区间 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$

18. 某人要制作一个三角形, 要求它的三条高的长度分别为 $\frac{1}{13}, \frac{1}{11}, \frac{1}{5}$, 则此人能

【答】 (D)

- (A) 不能作出这样的三角形 (B) 作出一个锐角三角形
(C) 作出一个直角三角形 (D) 作出一个钝角三角形

解析: 设三边分别为a,b,c, 利用面积相等可知

$$\frac{1}{13}a = \frac{1}{11}b = \frac{1}{5}c, \therefore a : b : c = 13 : 11 : 5$$

由余弦定理得 $\cos A = \frac{5^2 + 11^2 - 13^2}{2 \times 5 \times 11} < 0$, 所以角A为钝角

三、解答题 (本大题满分74分) 本大题共有5题, 解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域内写出必要的步骤。

19. (本题满分12分)

已知 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 化简:

$$\lg(\cos x \cdot \tan x + 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}) + \lg[\sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4})] - \lg(1 + \sin 2x).$$

=0

20. (本题满分13分) 本题共有2个小题, 第一个小题满分5分, 第二个小题满分8分。

已知数列 $\{a_n\}$ 的前n项和为 S_n , 且 $S_n = n - 5a_n - 85$, $n \in N^*$

(1) 证明: $\{a_n - 1\}$ 是等比数列;

(2) 求数列 $\{S_n\}$ 的通项公式, 并求出n为何值时, S_n 取得最小值, 并说明理由。

$$(2) S_n = n + 75(\frac{5}{6})^{n-1} - 90 \quad n=15 \text{ 取得最小值}$$

解析: (1) 当 $n=1$ 时, $a_1=-14$; 当 $n \geq 2$ 时, $a_n=S_n-S_{n-1}=-5a_n+5a_{n-1}+1$, 所以 $a_n-1=\frac{5}{6}(a_{n-1}-1)$,

又 $a_1-1=-15 \neq 0$, 所以数列 $\{a_n-1\}$ 是等比数列;

(2)

由(1)知: $a_n-1=-15 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$, 得 $a_n=1-15 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$, 从而 $S_n=75 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} + n - 90$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

;

解不等式 $S_n < S_{n+1}$, 得 $\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} < \frac{2}{5}$, $n > \log_{\frac{5}{6}} \frac{2}{25} + 1 \approx 14.9$, 当 $n \geq 15$ 时, 数列 $\{S_n\}$ 单调递增;

同理可得, 当 $n \leq 15$ 时, 数列 $\{S_n\}$ 单调递减; 故当 $n=15$ 时, S_n 取得最小值.

21、(本大题满分13分) 本题共有2个小题, 第1小题满分5分, 第2小题满分8分.

如图所示, 为了制作一个圆柱形灯笼, 先要制作4个全等的矩形骨架, 总计耗用9.6米铁丝, 骨架把圆柱底面8等份, 再用 S 平方米塑料片制成圆柱的侧面和下底面(不安装上底面).

(1) 当圆柱底面半径 r 取何值时, S 取得最大值? 并求出该

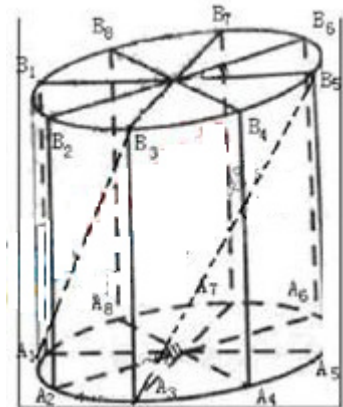
最大值(结果精确到0.01平方米);

(2) 在灯笼内, 以矩形骨架的顶点为点, 安装一些霓虹灯,

当灯笼的底面半径为0.3米时, 求图中两根直线 A_1B_3 与 A_3B_5 所

在异面直线所成角的大小(结果用反三角函数表示)

解析: (1)



设圆柱形灯笼的母线长为 l , 则 $l=1.2-2r$ ($0 < r < 0.6$), $S=-3\pi(r-0.4)^2+0.48\pi$,

所以当 $r=0.4$ 时, S 取得最大值约为1.51平方米;

(2) 当 $r=0.3$ 时, $l=0.6$, 建立空间直角坐标系, 可得 $\overrightarrow{A_1B_3} = (-0.3, 0.3, 0.6)$,

$\overrightarrow{A_3B_5} = (-0.3, -0.3, 0.6)$,

设向量 $\overrightarrow{A_1B_3}$ 与 $\overrightarrow{A_3B_5}$ 的夹角为 θ , 则 $\cos \theta = \frac{\overrightarrow{A_1B_3} \cdot \overrightarrow{A_3B_5}}{|\overrightarrow{A_1B_3}| \cdot |\overrightarrow{A_3B_5}|} = \frac{2}{3}$,

所以 A_1B_3 、 A_3B_5 所在异面直线所成角的大小为 $\arccos \frac{2}{3}$.

22. (本题满分18分) 本题共有3个小题, 第1小题满分3分, 第2小题满分5分, 第3小题满分10分.

若实数 x 、 y 、 m 满足 $|x-m| > |y-m|$, 则称 x 比 y 远离 m .

(1) 若 x^2-1 比1远离0, 求 x 的取值范围;

(2) 对任意两个不相等的正数 a 、 b ，证明： $a^3 + b^3$ 比 $a^2b + ab^2$ 远离 $2ab\sqrt{ab}$ ；

(3) 已知函数 $f(x)$ 的定义域 $D = \{x | x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}, x \in \mathbf{R}\}$. 任取 $x \in D$ ， $f(x)$ 等于 $\sin x$ 和 $\cos x$ 中远离 0 的那个值. 写出函数 $f(x)$ 的解析式，并指出它的基本性质（结论不要求证明）.

解析：(1) $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ ；

(2) 对任意两个不相等的正数 a 、 b ，有 $a^3 + b^3 > 2ab\sqrt{ab}$ ， $a^2b + ab^2 > 2ab\sqrt{ab}$ ，

因为 $|a^3 + b^3 - 2ab\sqrt{ab}| - |a^2b + ab^2 - 2ab\sqrt{ab}| = (a+b)(a-b)^2 > 0$ ，

所以 $|a^3 + b^3 - 2ab\sqrt{ab}| > |a^2b + ab^2 - 2ab\sqrt{ab}|$ ，即 $a^3 + b^3$ 比 $a^2b + ab^2$ 远离 $2ab\sqrt{ab}$ ；

$$(3) f(x) = \begin{cases} |\sin x|, & x \in (k\pi + \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{3\pi}{4}) \\ |\cos x|, & x \in (k\pi - \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{4}) \end{cases},$$

性质：1° $f(x)$ 是偶函数，图像关于 y 轴对称，2° $f(x)$ 是周期函数，最小正周期 $T = \frac{\pi}{2}$ ，

3° 函数 $f(x)$ 在区间 $(\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4}, \frac{k\pi}{2})$ 单调递增，在区间 $[\frac{k\pi}{2}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4})$ 单调递减， $k \in \mathbf{Z}$ ，

4° 函数 $f(x)$ 的值域为 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$.

23 (本题满分18分) 本题共有3个小题，第1小题满分3分，第2小题满分6分，第3小题满分9分.

已知椭圆 Γ 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ，点 P 的坐标为 $(-a, b)$ 。

(1) 若直角坐标平面上的点 M 、 $A(0, -b)$ 、 $B(a, 0)$ 满足 $\vec{PM} = \frac{1}{2}(\vec{PA} + \vec{PB})$ ，求点 M 的坐标；

(2) 设直线 $l_1: y = k_1x + p$ 交椭圆 Γ 于 C 、 D 两点，交直线 $l_2: y = k_2x$ 于点 E 。若

$k_1 \cdot k_2 = -\frac{b^2}{a^2}$ ，证明： E 为 CD 的中点；

(3) 对于椭圆 Γ 上的点 $Q(a \cos \theta, b \sin \theta)$ ($0 < \theta < \pi$)，如果椭圆 Γ 上存在不同的两个交点 P_1 、 P_2 满足 $\vec{PP_1} + \vec{PP_2} = \vec{PQ}$ ，写出求作点 P_1 、 P_2 的步骤，并求出使 P_1 、 P_2 存在的 θ 的取值范围。

解析：(1) $M(\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ ；

$$(2) \text{ 由方程组 } \begin{cases} y = k_1x + p \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}, \text{ 消 } y \text{ 得方程 } (a^2k_1^2 + b^2)x^2 + 2a^2k_1px + a^2(p^2 - b^2) = 0,$$

因为直线 $l_1: y = k_1x + p$ 交椭圆 Γ 于 C 、 D 两点,

所以 $\Delta > 0$, 即 $a^2k_1^2 + b^2 - p^2 > 0$,

设 $C(x_1, y_1)$ 、 $D(x_2, y_2)$, CD 中点坐标为 (x_0, y_0) ,

$$\text{则 } \begin{cases} x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{a^2k_1p}{a^2k_1^2 + b^2} \\ y_0 = k_1x_0 + p = \frac{b^2p}{a^2k_1^2 + b^2} \end{cases},$$

由方程组 $\begin{cases} y = k_1x + p \\ y = k_2x \end{cases}$, 消 y 得方程 $(k_2 - k_1)x = p$,

$$\text{又因为 } k_2 = -\frac{b^2}{a^2k_1}, \text{ 所以 } \begin{cases} x = \frac{p}{k_2 - k_1} = -\frac{a^2k_1p}{a^2k_1^2 + b^2} = x_0 \\ y = k_2x = \frac{b^2p}{a^2k_1^2 + b^2} = y_0 \end{cases},$$

故 E 为 CD 的中点;

(3) 求作点 P_1 、 P_2 的步骤: 1° 求出 PQ 的中点 $E(-\frac{a(1 - \cos \theta)}{2}, \frac{b(1 + \sin \theta)}{2})$,

2° 求出直线 OE 的斜率 $k_2 = -\frac{b(1 + \sin \theta)}{a(1 - \cos \theta)}$,

3° 由 $\overline{PP_1} + \overline{PP_2} = \overline{PQ}$ 知 E 为 CD 的中点, 根据(2)可得 CD 的斜率 $k_1 = -\frac{b^2}{a^2k_2} = \frac{b(1 - \cos \theta)}{a(1 + \sin \theta)}$,

4° 从而得直线 CD 的方程: $y - \frac{b(1 + \sin \theta)}{2} = \frac{b(1 - \cos \theta)}{a(1 + \sin \theta)}(x + \frac{a(1 - \cos \theta)}{2})$,

5° 将直线 CD 与椭圆 Γ 的方程联立, 方程组的解即为点 P_1 、 P_2 的坐标.

欲使 P_1 、 P_2 存在, 必须点 E 在椭圆内,

所以 $\frac{(1 - \cos \theta)^2}{4} + \frac{(1 + \sin \theta)^2}{4} < 1$, 化简得 $\sin \theta - \cos \theta < \frac{1}{2}$, $\sin(\theta - \frac{\pi}{4}) < \frac{\sqrt{2}}{4}$,

又 $0 < \theta < \pi$, 即 $-\frac{\pi}{4} < \theta - \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}$, 所以 $-\frac{\pi}{4} < \theta - \frac{\pi}{4} < \arcsin \frac{\sqrt{2}}{4}$,

故 θ 的取值范围是 $(0, \frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{\sqrt{2}}{4})$.