2001年湖南高考理科数学真题及答案

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分．第Ⅰ卷1至2页．第Ⅱ卷3至8页．共150分．考试时间120分钟．

第Ⅰ卷(选择题共60分)

注意事项：

1． 答第Ⅰ卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目用铅笔涂写在答题卡上．

2． 每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案，不能答在试题卷上．

3． 考试结束，监考人将本试卷和答题卡一并收回．

参考公式：

三角函数的积化和差公式

$$\sin a\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$$

$$\cos a\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right]$$

$$\cos a\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$\sin a\sin\beta=-\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right]$$

正棱台、圆台的侧面积公式

$$S_{台侧}=\frac{1}{2}(c'+c)l$$

其中 c' 、c 分别表示上、下底面周长， l 表示斜高或母线长

台体的体积公式

$$V台体=\frac{1}{3}(S'+\sqrt{S'S}+S)h$$

一．选择题 本大题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的**.**

1．若 sini θcos $\theta>0$，则 θ 在 （ ）

A．第一、二象限　　B．第一、三象限　　C．第一、四象限　　D．第二、四象限

2．过点 A（1，－1）、B（－1，1)且圆心在直线 $x+y-2=0$ 上的圆的方程是（ ）

A．$(x-3)^2+(y+1)^2=4$　　B．$(x+3)^2+(y-1)^2=4$

C．$(x-1)^2+(y-1)^2=4$　　　　　　　　D．$(x+1)^2+(y+1)^2=4$

3．设 $\{a_n\}$ 是递增等差数列，前三项的和为 12，前三项的积为 48，则它的首项是（　　）

A．1　　　　B．2　　　　C．4　　　　D．6

4．若定义在区间 $(-1, 0)$ 的函数 $f(x)=\log_{2a}(x+1)$ 满足 $f(x)>0$，则 a 的取值范围是

（　　）

A．$(0,\frac{1}{2})$　　　　B．$\left(0,\ \frac{1}{2}\right]$　　　　C．$(\frac{1}{2},\ +\infty)$　　　　D．$(0,\ +\infty)$

5．极坐标方程 $\rho=2\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$ 的图形是　　　（　　）

（A）　　　　（B）　　　　（C）　　　　（D）

6．函数 $y=\cos x+1(-\pi\leqslant x\leqslant 0)$ 的反函数是（　　）

A．$y=-\arccos(x-1)(0\leqslant x\leqslant 2)$　　　　B．$y=\pi-\arccos(x-1)(0\leqslant x\leqslant 2)$

C．$y=\arccos(x-1)(0\leqslant x\leqslant 2)$　　　　D．$y=\pi+\arccos(x-1)(0\leqslant x\leqslant 2)$

7．若椭圆经过原点，且焦点为 $F_1(1,\ 0)$，$F_2(3,\ 0)$，则其离心率为（　　）

A．$\frac{3}{4}$　　　　B．$\frac{2}{3}$　　　　C．$\frac{1}{2}$　　　　D．$\frac{1}{4}$

8．若 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{4}$，$\sin\alpha+\cos\alpha=a$，$\sin\beta+\cos\beta=b$，则（　　）

A．$a<b$　　　　B．$a>b$　　　　C．$ab<1$　　　　D．$ab>2$

9．在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，若 $AB=\sqrt{2}BB_1$，则 AB_1 与 C_1B 所成的角的大小为　　（　　）

A．60°　　　　B．90°　　　　C．105°　　　　D．75°

10．设 $f(x)$、$g(x)$ 都是单调函数，有如下四个命题：

① 若 $f(x)$ 单调递增，$g(x)$ 单调递增，则 $f(x)-g(x)$ 单调递增；

② 若 $f(x)$ 单调递增，$g(x)$ 单调递减，则 $f(x)-g(x)$ 单调递增；

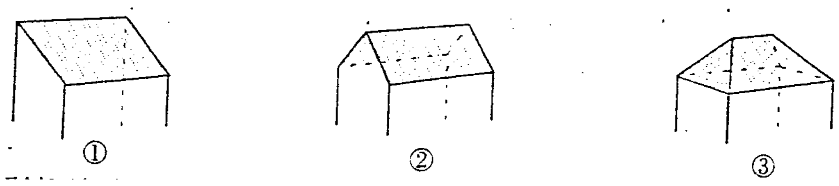
③ 若 $f(x)$ 单调递减，$g(x)$ 单调递增，则 $f(x)-g(x)$ 单调递减；

④ 若 $f(x)$ 单调递减，$g(x)$ 单调递减，则 $f(x)-g(x)$ 单调递减．

其中，正确的命题是　（　　）

A．①③　　　　B．①④　　　　C．②③　　　　D．②④

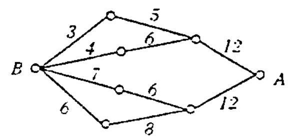
11．　一间民房的屋顶有如图三种不同的盖法：①单向倾斜；②双向倾斜；③四向倾斜．记三种盖法屋顶面积分别为 P_1、P_2、P_3．



若屋顶斜面与水平面所成的角都是 α，则　　　　（　　）

A．$P_3>P_2>P_1$　　　　B．$P_3>P_2=P_1$　　　　C．$P_3=P_2>P_1$　　　　D．$P_3=P_2=P_1$

12．　如图，小圆圈表示网络的结点，结点之间的连线表示它们有网线相联．连线标注的数字表示该段网线单位时间内可以通过的最大信息量．现从结点 A 向结点 B 传递信息，信息可以分开沿不同的路线同时传递．则单位时间内传递的最大信息量为　　　　（　　）



A．26　　　　B．24　　　　C．20　　　　D．19

第Ⅱ卷(非选择题共 90 分)

注意事项：

1．第Ⅱ卷共 6 页，用钢笔或圆珠笔直接答在试题卷中．

2．答卷前将密封线内的项目填写清楚．

二．填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分．把答案填在题中横线上．

13．若一个圆锥的轴截面是等边三角形，其面积为 $\sqrt{3}$，则这个圆锥的侧面积是_____．

14．双曲线 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 的两个焦点为 F_1、F_2，点 P 在双曲线上．若 $PF_1\perp PF_2$，则点 P 到 x 轴的距离为________．

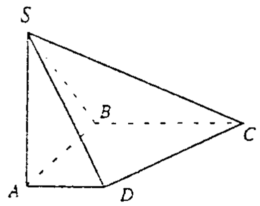
15．设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列，S_n 是它的前 n 项和．若 $\{S_n\}$ 是等差数列，则 $q=$ _________．

16．圆周上有 $2n$ 个等分点($n>1$)，以其中三个点为顶点的直角三角形的个数为______．

三．解答题：本大题共 6 小题，共 74 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

17．（本小题满分 12 分）

如图，在底面是直角梯形的四棱锥 $S—ABCD$ 中，$\angle ABC = 90°$，$SA\perp$ 面 $ABCD$，$SA = AB = BC = 1$，$AD=\dfrac{1}{2}$．



(Ⅰ)求四棱锥 $S—ABCD$ 的体积；

(Ⅱ)求面 SCD 与面 SBA 所成的二面角的正切值．

18．（本小题满分 12 分）

已知复数 $z_1 = i(1-i)^3$．

(Ⅰ)求 $\arg z_1$ 及 $\left|z_1\right|$；

(Ⅱ)当复数 z 满足 $\left|z_1\right|=1$，求 $\left|z-z_1\right|$ 的最大值．

19．（本小题满分 12 分）

设抛物线 $y^2=2px$（$p>0$）的焦点为 F，经过点 F 的直线交抛物线于 A、B 两点，点 C 在抛物线的准线上，且 $BC/\!/x$ 轴．证明直线 AC 经过原点 O．

20．（本小题满分 12 分）

已知 i，m，n 是正整数，且 $1<i\leqslant m<n$．

(Ⅰ)证明 $n^iP_m^i<m^iP_n^i$；

(Ⅱ)证明 $(1+m)^n>(1+n)^m$．

21．（本小题满分 12 分）

从社会效益和经济效益出发，某地投入资金进行生态环境建设，并以此发展旅游产业．根据规划，本年度投入 800 万元，以后每年投入将比上年减少$\dfrac{1}{5}$．本年度当地旅游业收入估计为 400 万元，由于该项建设对旅游业的促进作用，预计今后的旅游业收入每年会比上年增加$\dfrac{1}{4}$．

(Ⅰ)设 n 年内(本年度为第一年)总投入为 a_n 万元，旅游业总收入为 b_n 万元．写出 a_n，b_n 的表达式；

(Ⅱ)至少经过几年旅游业的总收入才能超过总投入？

22．（本小题满分 14 分）

设 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，其图像关于直线 $x = 1$ 对称．对任意 x_1，$x_2\in[0,$

$\frac{1}{2}$]都有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$．且 $f(1)=a>0$．

(Ⅰ)求 $f(\frac{1}{2})$ 及 $f(\frac{1}{4})$；

(Ⅱ)证明 $f(x)$ 是周期函数；

(Ⅲ)记 $a_n=f(2n+\frac{1}{2n})$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\ln a_n)$．

参考答案：

说明：

一． 本解答指出了每题要考查的主要知识和能力，并给出了一种或几种解法供参考，如果考生物解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制订相应的评分细则．

二． 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定部分的给分，但不得超过该部分正确解答得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分．

三． 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数．

四． 只给整数分数．选择题和填空题不给中间分．

一．选择题：本题考查基本知识和基本运算．每小题 5 分，满分 60 分．

（1）B	（2）C	（3）B	（4）A	（5）C
（6）A	（7）C	（8）A	（9）B	（10）C
（11）D	（12）D			

二．填空题：本题考查基本知识和基本运算．每小题 4 分，满分 16 分．

（13）2π　　（14）$\dfrac{16}{5}$　　（15）1　　（16）$2n(n-1)$

三．解答题：

（17）本小题考查线面关系和棱锥体积计算，以及空间想象能力和逻辑推理能力．满分12分．

解：（Ⅰ）直角梯形 $ABCD$ 的面积是

$$M_{底面}=\frac{1}{2}(BC+AD)\cdot AB=\frac{1+0.5}{2}\times 1=\frac{3}{4},$$ ……2分

∴ 四棱锥 $S—ABCD$ 的体积是

$$V=\frac{1}{3}\times SA\times M_{底面}$$
$$=\frac{1}{3}\times 1\times\frac{3}{4}$$
$$=\frac{1}{4}.$$ ……4分

（Ⅱ）延长 BA、CD 相交于点 E，连结 SE 则 SE 是所求二面角的棱．　……6分

∵ $AD\parallel BC$，$BC=2AD$，

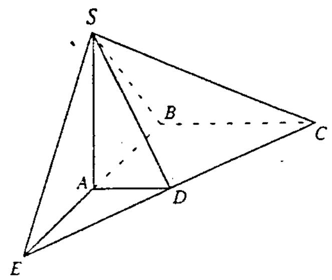
∴ $EA=AB=SA$，∴ $SE\perp SB$，

∵ $SA\perp$ 面 $ABCD$，得 $SEB\perp$ 面 EBC，EB 是交线，

又 $BC\perp EB$，∴ $BC\perp$ 面 SEB，

故 SB 是 CS 在面 SEB 上的射影，

∴ $CS\perp SE$，



所以 $\angle BSC$ 是所求二面角的平面角．　……10分

∵ $SB=\sqrt{SA^2+AB^2}=\sqrt{2}$，$BC=1$，$BC\perp SB$，

∴ $\tan\angle BSC=\dfrac{BC}{SB}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．

即所求二面角的正切值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．　……12分

（18）本小题考查复数基本性质和基本运算，以及分析问题和解决问题的能力．满分12分．

解：（Ⅰ）$z_1=i(1-i)^3=2-2i$，

将 z_1 化为三角形式，得

$z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$，

∴ $\arg z_1 = \frac{7\pi}{4}$，$|z_1| = 2\sqrt{2}$． ……6 分

（Ⅱ）设 $z=\cos\alpha + i\sin\alpha$，则

$z - z_1 = (\cos\alpha - 2) + (\sin\alpha + 2)i$，

$$|z - z_1|^2 = (\cos\alpha - 2)^2 + (\sin\alpha + 2)^2$$

$$= 9 + 4\sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)，$$ ……9 分

当 $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = 1$ 时，$|z - z_1|^2$ 取得最大值 $9 + 4\sqrt{2}$．

从而得到 $|z - z_1|$ 的最大值为 $2\sqrt{2} + 1$． ……12 分

（19）本小题考查抛物线的概念和性质，直线的方程和性质，运算能力和逻辑推理能力．满分 12 分．

证明一：因为抛物线 $y^2 = 2px$（$p>0$）的焦点为 $F\left(\frac{p}{2}，0\right)$，所以经过点 F 的直线的方程可设为

$$x = my + \frac{p}{2}；$$ ……4 分

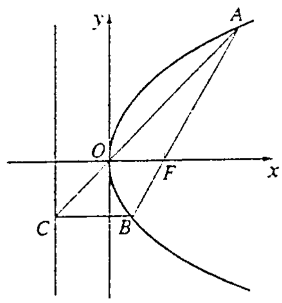
代入抛物线方程得

$y^2 - 2pmy - p^2 = 0$，

若记 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，则 y_1，y_2 是该方程的两个根，所以

$$y_1y_2 = -p^2.$$ ……8 分

因为 $BC//x$ 轴，且点 c 在准线 $x=-\frac{p}{2}$ 上，所以点 c 的坐标为 $\left(-\frac{p}{2}，y_2\right)$，故直线 CO 的斜率为



$$k = \frac{y_2}{-\frac{p}{2}} = \frac{2p}{y_1} = \frac{y_1}{x_1}.$$

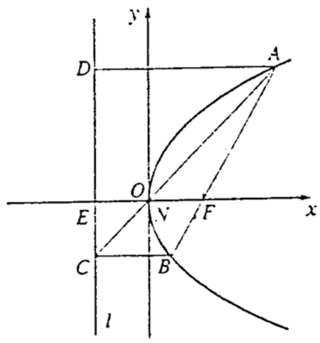
即 k 也是直线 OA 的斜率，所以直线 AC 经过原点 O.

……12 分

证明二：如图，记 x 轴与抛物线准线 l 的交点为 E，过 A 作 $AD\perp l$，D 是垂足．则

$AD//FE//BC$. ……2 分

连结 AC，与 EF 相交于点 N，则



$$\frac{|EN|}{|AD|}=\frac{|CN|}{|AC|}=\frac{|BF|}{|AB|},$$

$$\frac{|NF|}{|BC|}=\frac{|AF|}{|AB|},$$ ……6 分

根据抛物线的几何性质，$|AF|=|AD|$，

$|BF|=|BC|$， ……8 分

$$\therefore\ |EN|=\frac{|AD|\cdot|BF|}{|AB|}=\frac{|AF|\cdot|BC|}{|AB|}=|NF|,$$

即点 N 是 EF 的中点，与抛物线的顶点 O 重合，所以直线 AC 经过原点 O． ……12 分

（20）本小题考查排列、组合、二项式定理、不等式的基本知识和逻辑推理能力．满分 12 分．

（Ⅰ）证明： 对于 $1<i\leqslant m$ 有

$$p_m^i=m\cdot\cdots\cdot(m-i+1),$$

$$\frac{p_m^i}{m^i}=\frac{m}{m}\cdot\frac{m-1}{m}\cdot\cdots\cdot\frac{m-i+1}{m},$$

同理 $\dfrac{p_n^i}{n^i}=\dfrac{n}{n}\cdot\dfrac{n-1}{n}\cdot\cdots\cdot\dfrac{n-i+1}{n}$， ……4 分

由于 $m<n$，对整数 $k=1，2\cdots，i-1$，有 $\dfrac{n-k}{n}>\dfrac{m-k}{m}$，

所以 $\dfrac{p_n^i}{n^i}>\dfrac{p_m^i}{m^i}$，即 $m^ip_n^i>n^ip_m^i$． ……6 分

（Ⅱ）证明由二项式定理有

$$(1+m)^n=\sum_{i=0}^{n}m^iC_n^i,$$

$$(1+n)^m=\sum_{i=0}^{m}n^iC_m^i,$$ ……8 分

由（Ⅰ）知 $m^ip_n^i>n^ip_m^i$（$1<i\leqslant m<n$=，

而 $C_m^i = \frac{p_m^i}{i!}$，$C_n^i = \frac{p_n^i}{i!}$， ……10 分

所以， $m^i C_n^i > n^i C_m^i$ (1＜i≤m＜n=.

因此，$\sum_{i=2}^{m} m^i C_n^i > \sum_{i=2}^{m} n^i C_m^i$.

又 $m^0 C_n^0 = n^0 C_m^0 = 1$，$mC_n^1 = nC_m^1 = mn$，$m^i C_n^i > 0 (m < i \le n)$.

∴ $\sum_{i=0}^{n} m^i C_n^i > \sum_{i=0}^{m} n^i C_m^i$.

即 $(1+m)^n > (1+n)^m$. ……12 分

（21）本小题主要考查建立函数关系式、数列求和、不等式等基础知识；考查综合运用数学知识解决实际问题的能力．满分 12 分．

解：（Ⅰ）第 1 年投入为 800 万元，第 2 年投入为 800×（1－$\frac{1}{5}$）万元，……，第 n 年投入为 800×（1－$\frac{1}{5}$）$^{n-1}$万元.

所以，n 年内的总投入为

$$a_n = 800+800\times(1-\frac{1}{5})+\cdots+800\times(1-\frac{1}{5})^{n-1}$$

$$=\sum_{k=1}^{n} 800\times(1-\frac{1}{5})^{k-1}$$

$$=4000\times[1-(\frac{4}{5})^n]；$$ ……3 分

第 1 年旅游业收入为 400 万元，第 2 年旅游业收入为 400×（1＋$\frac{1}{4}$）万元，……，第 n 年旅游业收入为 400×（1＋$\frac{1}{4}$）$^{n-1}$万元.

所以，n 年内的旅游业总收入为

$$b_n = 400+400\times(1+\frac{1}{4})+\cdots+400\times(1+\frac{1}{4})^{n-1}$$

$$=\sum_{k=1}^{n} 400\times(\frac{5}{4})^{k-1}$$

$$=1600\times[(\frac{4}{5})^n-1].$$ ……6 分

（Ⅱ）设至少经过 n 年旅游业的总收入才能超过总投入，由此

$b_n - a_n > 0$，

即 $1600\times[(\frac{5}{4})^n-1]-4000\times[1-(\frac{4}{5})^n]>0$.

化简得 $5\times(\frac{4}{5})^n+2\times(\frac{4}{5})^n-7>0$，　　　　　　　　……9 分

设 $x=(\frac{4}{5})^n$，代入上式得

$5x^2-7x+2>0$，

解此不等式，得

$x<\frac{2}{5}$，$x>1$(舍去).

即　　　　　　　　$(\frac{4}{5})^n<\frac{2}{5}$，

由此得　　　　　　　　$n\geqslant 5$.

答：至少经过 5 年旅游业的总收入才能超过总投入.　　　　　　　　……12 分

（22）本小题主要考查函数的概念、图像，函数的奇偶性和周期性以及数列极限等基础知识；考查运算能力和逻辑思维能力．满分 14 分.

（Ⅰ）解：因为对 x_1，$x_2\in[0,\frac{1}{2}]$，都有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$，所以

$f(x)=f(\frac{x}{2})\cdot f(\frac{x}{2})\geqslant 0$，$x\in[0,1]$.

∵ $f(1)=f(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})\cdot f(\frac{1}{2})=[f(\frac{1}{2})]^2$，

$f(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})=f(\frac{1}{4})\cdot f(\frac{1}{4})=[f(\frac{1}{4})]^2$.　　　　……3 分

$f(1)=a>0$，

∴ $f(\frac{1}{2})=a^{\frac{1}{2}}$，$f(\frac{1}{4})=a^{\frac{1}{4}}$.　　　　　　　　……6 分

（Ⅱ）证明：依题设 $y=f(x)$关于直线 $x=1$ 对称，

故 $f(x)=f(1+1-x)$，

即 $f(x)=f(2-x)$，$x\in R$.　　　　　　　　……8 分

又由 $f(x)$是偶函数知 $f(-x)=f(x)$，$x\in R$，

∴ $f(-x)=f(2-x)$，$x\in R$，

将上式中 $-x$ 以 x 代换，得

$f(x)=f(x+2)$，$x\in R$.

这表明 $f(x)$是 R 上的周期函数，且 2 是它的一个周期. ……10 分

（III）解：由（Ⅰ）知 $f(x)\geqslant 0$，$x\in[0,1]$.

$\because f(\frac{1}{2})=f(n\cdot\frac{1}{2n})=f(\frac{1}{2n}+(n-1)\cdot\frac{1}{2n})$

$=f(\frac{1}{2n})\cdot f((n-1)\cdot\frac{1}{2n})$

$=f(\frac{1}{2n})\cdot f(\frac{1}{2n})\cdot\cdots\cdot f(\frac{1}{2n})$

$=[f(\frac{1}{2n})]^n$,

$f(\frac{1}{2})=a^{\frac{1}{2}}$,

$\therefore f(\frac{1}{2n})=a^{\frac{1}{2n}}$.

$\because f(x)$的一个周期是 2，

$\therefore f(2n+\frac{1}{2n})=f(\frac{1}{2n})$，因此 $a_n=$

$a^{\frac{1}{2n}}$, ……12 分

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(\ln a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2n}\ln a)=0$. ……14 分