

1991年湖南高考理科数学真题及答案

一、选择题：本大题共15小题；每小题3分，共45分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。把所选项前的字母填在题后括号内。

(1) 已知 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ，并且 α 是第二象限的角，那么 $\operatorname{tg} \alpha$ 的值等于 ()

- (A) $-\frac{4}{3}$ (B) $-\frac{3}{4}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{4}{3}$

(2) 焦点在 $(-1, 0)$ ，顶点在 $(1, 0)$ 的抛物线方程是 ()

- (A) $y^2=8(x+1)$ (B) $y^2=-8(x+1)$
(C) $y^2=8(x-1)$ (D) $y^2=-8(x-1)$

(3) 函数 $y=\cos^4 x - \sin^4 x$ 的最小正周期是 ()

- (A) $\frac{\pi}{2}$ (B) π (C) 2π (D) 4π

(4) 如果把两条异面直线看成“一对”，那么六棱锥的棱所在的12条直线中，异面直线共有 ()

- (A) 12对 (B) 24对 (C) 36对 (D) 48对

(5) 函数 $y=\sin(2x+\frac{5\pi}{2})$ 的图像的一条对称轴的方程是 ()

- (A) $x=-\frac{\pi}{2}$ (B) $x=-\frac{\pi}{4}$
(C) $x=\frac{\pi}{8}$ (D) $x=\frac{5\pi}{4}$

(6) 如果三棱锥 $S-ABC$ 的底面是不等边三角形，侧面与底面所成的二面角都相等，且顶点 S 在底面的射影 O 在 $\triangle ABC$ 内，那么 O 是 $\triangle ABC$ 的 ()

- (A) 垂心 (B) 重心 (C) 外心 (D) 内心

(7) 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列，且 $a_n > 0$ ， $a_2 a_4 + 2 a_3 a_5 + a_4 a_6 = 25$ ，那么 $a_3 + a_5$ 的值等于 ()

- (A) 5 (B) 10 (C) 15 (D) 20

(8) 如果圆锥曲线的极坐标方程为 $\rho = \frac{16}{5-3\cos\theta}$ ，那么它的焦点的极坐标为 ()

- (A) $(0, 0), (6, \pi)$ (B) $(-3, 0), (3, 0)$
(C) $(0, 0), (3, 0)$ (D) $(0, 0), (6, 0)$

(9) 从4台甲型和5台乙型电视机中任意取出3台，其中至少要有甲型与乙型电视机各1台，则不同的取法共有 ()

- (A) 140 种 (B) 84 种 (C) 70 种 (D) 35 种

(10) 如果 $AC < 0$ 且 $BC < 0$, 那么直线 $Ax + By + C = 0$ 不通过 ()

- (A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

(11) 设甲、乙、丙是三个命题. 如果甲是乙的必要条件; 丙是乙的充分条件但不是乙的必要条件, 那么 ()

- (A) 丙是甲的充分条件, 但不是甲的必要条件
(B) 丙是甲的必要条件, 但不是甲的充分条件
(C) 丙是甲的充要条件
(D) 丙不是甲的充分条件, 也不是甲的必要条件

(12) $\lim_{n \rightarrow \infty} [n(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{5}) \cdots (1 - \frac{1}{n+2})]$ 的值等于 ()

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

(13) 如果奇函数 $f(x)$ 在区间 $[3, 7]$ 上是增函数且最小值为 5, 那么 $f(x)$ 在区间 $[-7, -3]$ 上是 ()

- (A) 增函数且最小值为 -5 (B) 增函数且最大值为 -5
(C) 减函数且最小值为 -5 (D) 减函数且最大值为 -5

(14) 圆 $x^2 + 2x + y^2 + 4y - 3 = 0$ 上到直线 $x + y + 1 = 0$ 的距离为 $\sqrt{2}$ 的点共有 ()

- (A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个

(15) 设全集为 \mathbb{R} , $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $M = \{x | f(x) \neq 0\}$, $N = \{x | g(x) \neq 0\}$, 那么集合

$\{x | f(x)g(x) = 0\}$ 等于 ()

- (A) $\overline{M} \cap \overline{N}$ (B) $\overline{M} \cup N$ (C) $M \cup \overline{N}$ (D) $\overline{M} \cup \overline{N}$

二、填空题: 本大题共 5 小题; 每小题 3 分, 共 15 分. 把答案填在题中横线上.

(16) $\arctg \frac{1}{3} + \arctg \frac{1}{2}$ 的值是_____.

(17) 不等式 $6^{x^2+x-2} < 1$ 的解集是_____.

(18) 已知正三棱台上底面边长为 2, 下底面边长为 4, 且侧棱与底面所成的角是 45° , 那么这个正三棱台的体积等于_____.

(19) $(ax+1)^7$ 的展开式中, x^3 的系数是 x^2 的系数与 x^4 的系数的等差中项. 若实数 $a>1$, 那么 $a=$ _____.

(20) 在球面上有四个点 P, A, B, C , 如果 PA, PB, PC 两两互相垂直, 且 $PA=PB=PC=a$. 那么这个球面的面积是_____.

三、解答题: 本大题共6小题; 共60分.

(21) (本小题满分8分)

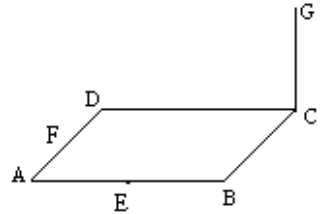
求函数 $y=\sin^2x+2\sin x\cos x+3\cos^2x$ 的最小值, 并写出使函数 y 取最小值的 x 的集合.

(22) (本小题满分8分)

已知复数 $z=1+i$, 求复数 $\frac{z^2-3z+6}{z+1}$ 的模和辐角的主值.

(23) (本小题满分10分)

已知 $ABCD$ 是边长为4的正方形, E, F 分别是 AB, AD 的中点, GC 垂直于 $ABCD$ 所在的平面, 且 $GC=2$. 求点 B 到平面 EFG 的距离.



(24) (本小题满分10分)

根据函数单调性的定义, 证明函数 $f(x)=-x^3+1$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数.

(25) (本小题满分12分)

已知 n 为自然数, 实数 $a>1$, 解关于 x 的不等式

$$\log_a x - \log_{a^2} x + 12 \log_{a^3} x + \dots + n(n-2)^{n-1} \log_{a^n} x > \frac{1-(-2)^n}{3} \log_a (x^2-a)$$

(26) (本小题满分12分)

双曲线的中心在坐标原点 O , 焦点在 x 轴上, 过双曲线右焦点且斜率为 $\sqrt{\frac{3}{5}}$ 的直线交双曲线于 P, Q 两点. 若 $OP \perp OQ$, $|PQ|=4$, 求双曲线的方程.

参考答案

说明:

一、本解答指出了每题所要考查的主要知识和能力,并给出了一种或几种较为常见的解法,如果考生的解法与本解答不同,可根据试题的主要考查内容参照评分标准制定相应评分细则.

二、每题都要评阅到底,不要因为考生的解答中出现错误而中断对该题的评阅.当考生的解答在某一步出现错误,影响了后继部分时,如果该步以后的解答未改变这一题的内容和难度时,可视影响的程度决定后面部分的给分,但不得超过后面部分应给分数的一半;如果这一步以后的解答有较严重的错误,就不给分.

三、为了阅卷方便,本试题解答中的推导步骤写得较为详细,允许考生在解题过程中合理省略非关键性的推导步骤.

四、解答右端所注分数,表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

五、只给整数分数.

一、选择题. 本题考查基本知识和基本运算. 每小题 3 分, 满分 45 分.

- (1)A (2)D (3)B (4)B (5)A (6) D (7)A (8)D
(9)C (10)C (11)A (12)C (13) B (14)C (15)D

二、填空题. 本题考查基本知识和基本运算. 每小题 3 分, 满分 15 分.

- (16) $\frac{\pi}{4}$ (17) $\{x|-2 < x < 1\}$ (18) $\frac{14}{3}$ (19) $1 + \frac{\sqrt{10}}{5}$ (20) $3\pi a^2$

三、解答题

(21) 本小题考查三角函数式的恒等变形及三角函数的性质. 满分8分.

解: $y = \sin^2 x + 2\sin x \cos x + 3\cos^2 x$

$= (\sin^2 x + \cos^2 x) + 2\sin x \cos x + 2\cos^2 x$ ——1

分

$= 1\sin 2x(1 + \cos 2x)$ ——3

分

$$=2+\sin 2x+\cos 2x$$

$$=2+\sqrt{2} \sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right). \quad \text{---5分}$$

$$\text{当}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-1\text{时}y\text{取得最小值}2-\sqrt{2}. \quad \text{---6分}$$

$$\text{使}y\text{取最小值的}x\text{的集合为}\left\{x\mid x=k\pi-\frac{3}{8}\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}. \quad \text{---8分}$$

(22) 本小题考查复数基本概念和运算能力. 满分8分.

$$\begin{aligned} \text{解: } \frac{z^2-3z+6}{z+1} &= \frac{(1+i)^2-3(1+i)+6}{1+i+1} \\ &= \frac{3-i}{2+i} \quad \text{---2分} \\ &= 1-i. \quad \text{---4分} \end{aligned}$$

$$1-i\text{的模}r=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}.$$

因为 $1-i$ 对应的点在第四象限且辐角的正切 $\operatorname{tg}\theta=-1$, 所以辐角的主值

$$\theta=\frac{7}{4}\pi. \quad \text{---8分}$$

(23) 本小题考查直线与直线, 直线与平面, 平面与平面的位置关系, 以及逻辑推理和空间想象能力. 满分10分.

解 如图, 连结 EG 、 FG 、 EF 、 BD 、 AC 、 EF 、 BD 分别交 AC 于 H 、 O . 因为 $ABCD$ 是正方形, E 、 F 分别为 AB 和 AD 的中点, 故 $EF\parallel BD$, H 为 AO 的中点.

BD 不在平面 EFG 上. 否则, 平面 EFG 和平面 $ABCD$ 重合, 从而点 G 在平面的 $ABCD$ 上, 与题设矛盾.

由直线和平面平行的判定定理知 $BD\parallel$ 平面 EFG , 所以 BD 和平面 EFG 的距离就是点 B 到平面 EFG 的距离. ---4分

$$\because BD\perp AC,$$

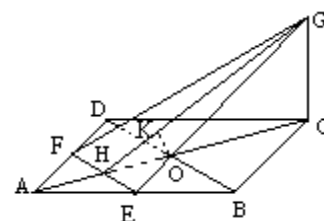
$$\therefore EF\perp HC.$$

$$\because GC\perp\text{平面}ABCD,$$

$$\therefore EF\perp GC,$$

$$\therefore EF\perp\text{平面}HCG.$$

$$\therefore \text{平面}EFG\perp\text{平面}HCG, HG\text{是这两个垂直平面的交线.}$$



---6分

作 $OK\perp HG$ 交 HG 于点 K , 由两平面垂直的性质定理知 $OK\perp$ 平面 EFG , 所以线段 OK 的长就

是点B到平面EFG的距离.

——8分

∵ 正方形ABCD的边长为4, GC=2,

$$\therefore AC=4\sqrt{2}, HO=\sqrt{2}, HC=3\sqrt{2}.$$

$$\therefore \text{在Rt}\triangle HCG\text{中, } HG=\sqrt{(3\sqrt{2})^2+2^2}=\sqrt{22}.$$

由于Rt△HKO和Rt△HCG有一个锐角是公共的, 故Rt△HKO~△HCG.

$$\therefore OK=\frac{HO \cdot GC}{HG}=\frac{\sqrt{2} \times 2}{\sqrt{22}}=\frac{2\sqrt{11}}{11}.$$

$$\text{即点B到平面EFG的距离为}\frac{2\sqrt{11}}{11}.$$

——10分

注: 未证明“BD不在平面EFG上”不扣分.

(24) 本小题考查函数单调性的概念, 不等式的证明, 以及逻辑推理能力. 满分10分.

证法一: 在 $(-\infty, +\infty)$ 上任取 x_1, x_2 且 $x_1 < x_2$

——1分

$$\text{则 } f(x_2) - f(x_1) = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$$

——3分

∵ $x_1 < x_2$,

∴ $x_1 - x_2 < 0$.

——4分

当 $x_1x_2 < 0$ 时, 有 $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - x_1x_2 > 0$;

——6分

当 $x_1x_2 \geq 0$ 时, 有 $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 > 0$;

$$\therefore f(x_2) - f(x_1) = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) < 0.$$

$$\text{即 } f(x_2) < f(x_1)$$

——8分

所以, 函数 $f(x) = -x^3 + 1$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数.

——10分

分

证法二: 在 $(-\infty, +\infty)$ 上任取 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$,

——1分

$$\text{则 } f(x_2) - f(x_1) = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2).$$

$$\text{即 } f(x_2) < f(x_1)$$

——3分

$$\because x_1 < x_2,$$

$$\therefore x_1 - x_2 < 0.$$

——4分

$\because x_1, x_2$ 不同时为零,

$$\therefore x_1^2 + x_2^2 > 0.$$

$$\text{又 } \because x_1^2 + x_2^2 > \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \geq |x_1 x_2| \geq -x_1 x_2$$

$$\therefore x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 > 0,$$

$$\therefore f(x_2) - f(x_1) = (x_1 - x_2)$$

$$(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) < 0. \quad \text{——8分}$$

$$\text{即 } f(x_2) < f(x_1).$$

所以, 函数 $f(x) = -x^3 + 1$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数.

——10

分

(25) 本小题考查对数、数列、解不等式等基本知识, 以及分析问题的能力. 满分12分.

解: 利用对数换底公式, 原不等式左端化为

$$\begin{aligned} & \log_a x - 4 \cdot \frac{\log_a x}{\log_a a^2} + 12 \cdot \frac{\log_a x}{\log_a a^3} + \cdots + n(-2)^{n-1} \cdot \frac{\log_a x}{\log_a a^n} \\ &= [1 - 2 + 4 + \cdots + (-2)^{n-1}] \log_a x \\ &= \frac{1 - (-2)^n}{3} \log_a x \end{aligned}$$

$$\text{故原不等式可化为 } \frac{1 - (-2)^n}{3} \log_a x > \frac{1 - (-2)^n}{3} \log_a (x^2 - a). \quad \textcircled{1}$$

当 n 为奇数时, $\frac{1 - (-2)^n}{3} > 0$, 不等式①等价于

$$\log_a x > \log_a (x^2 - a). \quad \textcircled{2}$$

因为 $a > 1$, ②式等价于

$$\begin{cases} x > 0 \\ x^2 - a > 0 \\ x > x^2 - a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ |x| > \sqrt{a} \\ x^2 - x - a < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \sqrt{a} \\ \frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2} \end{cases} \quad \text{---6分}$$

$$\text{因为 } \frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2} < 0, \quad \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2} > \frac{\sqrt{4a}}{2} = \sqrt{a},$$

$$\text{所以, 不等式②的解集为 } \{x \mid \sqrt{a} < x < \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}\}. \quad \text{---8分}$$

当 n 为偶数时, $\frac{1 - (-2)^n}{3} < 0$, 不等式①等价于

$$\log_a x > \log_a (x^2 - a). \quad \text{③}$$

因为 $a > 1$, ③式等价于

$$\begin{cases} x > 0 \\ x^2 - a > 0 \\ x < x^2 - a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ |x| > \sqrt{a} \\ x^2 - x - a > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \sqrt{a} \\ x < \frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2} \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x > \sqrt{a} \\ x > \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2} \end{cases} \quad \text{---10分}$$

$$\text{因为 } \frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2} < 0, \quad \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2} > \frac{\sqrt{4a}}{2} = \sqrt{a}, \quad \text{---12分}$$

$$\text{所以, 不等式③的解集为 } \{x \mid x > \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}\}.$$

综合得: 当 n 为奇数时, 原不等式的解集是 $\{x \mid \sqrt{a} < x < \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}\}$;

当 n 为偶数时, 原不等式的解集是 $\{x \mid x > \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}\}$

(26) 本小题考查双曲线性质，两点距离公式，两直线垂直条件，代数二次方程等基本知识，以及综合分析能力。满分12分。

解法一：设双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 。

依题意知，点 P, Q 的坐标满足方程组

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 & \text{①} \\ y = \sqrt{\frac{3}{5}}(x-c) \quad (\text{其中 } c = \sqrt{a^2 + b^2}) & \text{②} \end{cases}$$

将②式代入①式，整理得

$$(5b^2 - 3a^2)x^2 + 6a^2cx - (3a^2c^2 + 5a^2b^2) = 0. \quad \text{③} \quad \text{---3分}$$

设方程③的两个根为 x_1, x_2 ，若 $5b^2 - 3a^2 = 0$ ，则 $\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{3}{5}}$ ，即直线②与双曲线①的两条渐近线中的一条平行，故与双曲线只能有一个交点同，与题设矛盾，所以 $5b^2 - 3a^2 \neq 0$ 。

根据根与系数的关系，有

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{6a^2c}{5b^2 - 3a^2} & \text{④} \\ x_1x_2 = -\frac{3a^2c^2 + 5a^2b^2}{5b^2 - 3a^2} & \text{⑤} \end{cases} \quad \text{---6分}$$

由于 P, Q 在直线 $y = \sqrt{\frac{3}{5}}(x-c)$ 上，可记为

$$P(x_1, \sqrt{\frac{3}{5}}(x_1 - c)), \quad Q(x_2, \sqrt{\frac{3}{5}}(x_2 - c)).$$

$$\text{由 } OP \perp OQ \text{ 得 } \frac{\sqrt{\frac{3}{5}}(x_1 - c)}{x_1} \cdot \frac{\sqrt{\frac{3}{5}}(x_2 - c)}{x_2} = -1,$$

$$\text{整理得 } 3c(x_1 + x_2) - 8x_1x_2 - 3c^2 = 0. \quad \text{⑥}$$

将④，⑤式及 $c^2 = a^2 + b^2$ 代入⑥式，并整理得

$$3a^4 + 8a^2b^2 - 3b^4 = 0,$$

$$(a^2 + 3b^2)(3a^2 - b^2) = 0.$$

因为 $a^2+3b^2 \neq 0$, 解得 $b^2=3a^2$,

所以 $c=\sqrt{a^2+b^2}=2a$. ——8分

由 $|PQ|=4$, 得 $(x_2-x_1)^2 = \left[\sqrt{\frac{3}{5}}(x_2-c) - \sqrt{\frac{3}{5}}(x_1-c) \right]^2 = 4^2$.

整理得 $(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2 - 10 = 0$. ⑦

将④, ⑤式及 $b^2=3a^2$, $c=2a$ 代入⑦式, 解得 $a^2=1$. ——10分

将 $a^2=1$ 代入 $b^2=3a^2$ 得 $b^2=3$.

故所求双曲线方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$. ——12分

解法二: ④式以上同解法一. ——4分

解方程③得 $x_1 = \frac{-3a^2c + \sqrt{40ab^2}}{5b^2 - 3a^2}$, $x_2 = \frac{-3a^2c - \sqrt{40ab^2}}{5b^2 - 3a^2}$ ④ ——6分

由于 P, Q 在直线 $y = \sqrt{\frac{3}{5}}(x-c)$ 上, 可记为 $P(x_1, \sqrt{\frac{3}{5}}(x_1-c))$, $Q(x_2, \sqrt{\frac{3}{5}}(x_2-c))$.

由 $OP \perp OQ$, 得 $x_1x_2 + \sqrt{\frac{3}{5}}(x_1-c) \cdot \sqrt{\frac{3}{5}}(x_2-c) = 0$. ⑤

将④式及 $c^2=a^2b^2$ 代入⑤式并整理得 $3a^4+8a^2b^2-3b^4=0$,

即 $(a^2+3b^2)(3a^2-b^2)=0$.

因 $a^2+3b^2 \neq 0$, 解得 $b^2=3a^2$. ——8分

由 $|PQ|=4$, 得 $(x_2-x_1)^2 + \left[\sqrt{\frac{3}{5}}(x_2-c) - \sqrt{\frac{3}{5}}(x_1-c) \right]^2 = 4^2$.

即 $(x_2-x_1)^2 = 10$. ⑥

将④式代入⑥式并整理得

$(5b^2-3a^2)^2 - 16a^2b^2 = 0$. ——10分

将 $b^2=3a^2$ 代入上式, 得 $a^2=1$,

将 $a^2=1$ 代入 $b^2=3a^2$ 得 $b^2=3$.

故所求双曲线方程为

$$x^2 - \frac{y^2}{3} = 1.$$

——12分