2002年河南高考数学真题及答案

一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

1.（5分）函数 $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}$ 的最小正周期是(　　)

A．$\dfrac{\pi}{2}$　　B．π　　C．2π　　D．4π

2.（5分）圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 的圆心到直线 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ 的距离是(　　)

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C．1　　D．$\sqrt{3}$

3.（5分）不等式 $(1+x)(1-|x|)>0$ 的解集是(　　)

A．$\{x|0\leqslant x<1\}$　　B．$\{x|x<0$ 且 $x\neq -1\}$　　C．$\{x|-1<x<1\}$　　D．$\{x|x<1$ 且 $x\neq -1\}$

4.（5分）在 $(0,2\pi)$ 内，使 $\sin x>\cos x$ 成立的 x 的取值范围是(　　)

A．$(\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{2})\cup(\pi,\ \dfrac{5\pi}{4})$　　B．$(\dfrac{\pi}{4},\ \pi)$

C．$(\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5\pi}{4})$　　D．$(\dfrac{\pi}{4},\ \pi)\cup(\dfrac{5\pi}{4},\ \dfrac{3\pi}{2})$

5.（5分）已知集合 $M=\{x|x=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4},\ k\in Z\}$，$N=\{x|x=\dfrac{k\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2},\ k\in Z\}$，则(　　)

A．$M=N$　　B．$M\supset N$　　C．$M\subset N$　　D．$M\cap N=\varnothing$

6.（5分）一个圆锥和一个半球有公共底面，如果圆锥的体积与半球的体积恰好相等，则圆锥轴截面顶角的余弦值是(　　)

A．$\dfrac{3}{4}$　　B．$\dfrac{4}{3}$　　C．$-\dfrac{3}{5}$　　D．$\dfrac{3}{5}$

7.（5分）函数 $f(x)=x|x+a|+b$ 是奇函数的充要条件是(　　)

A．$ab=0$　　B．$a+b=0$　　C．$a=b$　　D．$a^2+b^2=0$

8.（5分）已知 $0<x<y<a<1$，则有(　　)

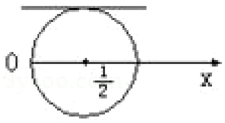
A．$\log_a(xy)<0$　　B．$0<\log_a(xy)<1$　　C．$1<\log_a(xy)<2$　　D．$\log_a(xy)>2$

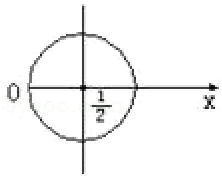
9.（5分）函数 $y=1-\dfrac{1}{x-1}$(　　)

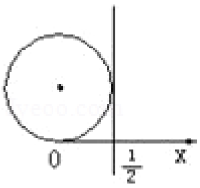
A．在 $(-1,+\infty)$ 内单调递增　　B．在 $(-1,+\infty)$ 内单调递减

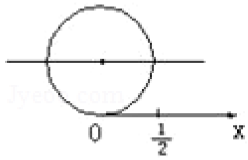
C．在 $(1,+\infty)$ 内单调递增　　　　　　　　D．在 $(1,+\infty)$ 内单调递减

10．（5 分）极坐标方程 $\rho=\cos\theta$ 与 $\rho\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ 的图形是(　　)

A. 

B. 

C. 

D. 

11．（5 分）从正方体的 6 个面中选取 3 个面，其中有 2 个面不相邻的选法共有(　　)

A．8 种　　　　B．12 种　　　　C．16 种　　　　D．20 种

12．（5 分）据 2002 年 3 月 5 日九届人大五次会议《政府工作报告》："2001 年国内生产总值达到 95933 亿元，比上年增长 7.3% "，如果"十•五"期间 (2001 年 $-$2005 年）每年的国内生产总值都按此年增长率增长，那么到"十•五"末我国国内年生产总值约为(　　)

A．115000 亿元　　　B．120000 亿元　　　C．127000 亿元　　　D．135000 亿元

二、填空题（共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

13．（4 分）椭圆 $5x^2+ky^2=5$ 的一个焦点是 $(0,2)$，那么 $k=$____.

14．（4 分）在 $(x^2+1)(x-2)^7$ 的展开式中 x^3 的系数是_____.

15．（4 分）已知 $\sin a=\cos 2a\quad(a\in(\dfrac{\pi}{2}，\pi))$，则 $tga=$_____.

16．（4 分）已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$，那么 $f(1)+f(2)+f(\dfrac{1}{2})+f(3)+f(\dfrac{1}{3})+f(4)+f(\dfrac{1}{4})=$____.

三、解答题（共 6 小题，满分 74 分）

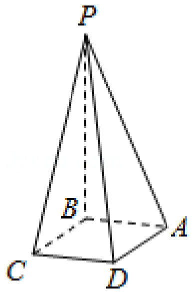
17．（12 分）已知复数 $z=1+i$，求实数 a，b 使 $az+2b\overline{z}=(a+2z)^2$.

18．（12 分）设 $\{a_n\}$ 为等差数列，$\{b_n\}$ 为等比数列，$a_1=b_1=1$，$a_2+a_4=b_3$，$b_2b_4=a_3$，分别求出 $\{a_n\}$ 及 $\{b_n\}$ 的前 10 项的和 S_{10} 及 T_{10}.

19．（12 分）四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是边长为 a 的正方形，$PB\perp$ 平面 $ABCD$.

（1）若面 PAD 与面 $ABCD$ 所成的二面角为 $60°$，求这个四棱锥的体积；

（2）证明无论四棱锥的高怎样变化．面与面所成的二面角恒大于90°．



20．（12 分）设A、B是双曲线$x^{2}-\dfrac{y^{2}}{2}=1$上的两点，点$N(1,2)$是线段AB的中点．

(I)求直线AB的方程

(II)如果线段AB的垂直平分线与双曲线相交于C、D两点，那么A、B、C、D四点是否共圆？为什么？

21．（12 分）（1）给出两块相同的正三角形纸片（如图 1，图 2)，要求用其中一块剪拼成一个三棱锥模型，另一块剪拼成一个正三棱柱模型，使它们的全面积都与原三角形的面积相等，请设计一种剪拼方法，分别用虚线标示在图 1、图 2 中，并作简要说明；

（2）试比较你剪拼的正三棱锥与正三棱柱的体积的大小；

（3）如果给出的是一块任意三角形的纸片（如图 3)，要求剪拼成一个直三棱柱，使它的全面积与给出的三角形的面积相等．请设计一种剪拼方法，用虚线标示在图 3 中，并作简要说明．

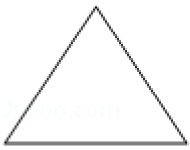


图1

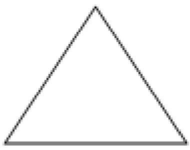


图2

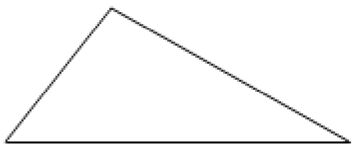


图3

22．（14 分）已知$a>0$，函数$f(x)=ax-bx^{2}$．

（1）当$b>0$时，若对任意$x\in R$都有$f(x)\leqslant 1$，证明$a\leqslant 2\sqrt{b}$；

（2）当$b>1$时，证明：对任意$x\in[0，1]$，$|f(x)|\leqslant 1$的充要条件是$b-1\leqslant a\leqslant 2\sqrt{b}$；

（3）当$0<b\leqslant 1$时，讨论：对任意$x\in[0，1]$，$|f(x)|\leqslant 1$的充要条件．

参考答案

一、选择题（共 12 小题，每小题 5 分，满分 60 分）

1．（5 分）函数 $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}$ 的最小正周期是(　　)

A．$\dfrac{\pi}{2}$　　B．π　　C．2π　　D．4π

【解答】解：函数 $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}=\tan 2x$，所以函数的最小正周期为：$T=\dfrac{\pi}{2}$

故选：A．

2．（5 分）圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 的圆心到直线 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ 的距离是(　　)

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C．1　　D．$\sqrt{3}$

【解答】解：由 $(x-1)^2+y^2=1$ 得：圆心 $(1,0)$，

所以根据点到直线的距离公式得：

$$d=\frac{|\frac{\sqrt{3}}{3}|}{\sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{3})^2+(-1)^2}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{2\sqrt{3}}{3}}=\frac{1}{2}.$$

故选：A．

3．（5 分）不等式 $(1+x)(1-|x|)>0$ 的解集是(　　)

A．$\{x|0\leqslant x<1\}$　　B．$\{x|x<0$ 且 $x\neq -1\}$　　C．$\{x|-1<x<1\}$　　D．$\{x|x<1$ 且 $x\neq -1\}$

【解答】解：求不等式 $(1+x)(1-|x|)>0$ 的解集

则分两种情况讨论：

情况 $1:\begin{cases}1+x>0\\1-|x|>0\end{cases}$ 即：$\begin{cases}x>-1\\-1<X<1\end{cases}$

则：$-1<x<1$．

情况 $2:\begin{cases}1+x<0\\1-|x|<0\end{cases}$ 即：$\begin{cases}X<-1\\X\langle -1\text{或}X\rangle 1\end{cases}$

则：$x<-1$

两种情况取并集得 $\{x|x<1$ 且 $x\neq -1\}$．

故选：D．

4．（5 分）在 $(0,2\pi)$ 内，使 $\sin x>\cos x$ 成立的 x 的取值范围是 $($　　$)$

A．$(\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{2})\bigcup(\pi$，$\frac{5\pi}{4})$　　B．$(\frac{\pi}{4}$，$\pi)$

C．$(\frac{\pi}{4}$，$\frac{5\pi}{4})$　　D．$(\frac{\pi}{4}$，$\pi)\bigcup(\frac{5\pi}{4}$，$\frac{3\pi}{2})$

【解答】解：$\because\sin x>\cos x$，

$\therefore\sin(x-\frac{\pi}{4})>0$，

$\therefore 2k\pi<x-\frac{\pi}{4}<2k\pi+\pi\ \ (k\in Z)$，

$\because$ 在 $(0,2\pi)$ 内，

$\therefore x\in(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4})$，

故选：C．

5．（5 分）已知集合 $M=\{x\,|\,x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$，$k\in Z\}$，$N=\{x\,|\,x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z\}$，则 $($　　$)$

A．$M=N$　　B．$M\supset N$　　C．$M\subset N$　　D．$M\bigcap N=\varnothing$

【解答】解：对于 M 的元素，有 $x=\frac{2k+1}{4}\pi$，其分子为 π 的奇数倍；

对于 N 的元素，有 $x=\frac{k+2}{4}\pi$，其分子为 π 的整数倍；

分析易得，$M\subset N$；

故选：C．

6．（5 分）一个圆锥和一个半球有公共底面，如果圆锥的体积与半球的体积恰好相等，则圆锥轴截面顶角的余弦值是 $($　　$)$

A．$\frac{3}{4}$　　B．$\frac{4}{3}$　　C．$-\frac{3}{5}$　　D．$\frac{3}{5}$

【解答】解：设圆锥的半径为 R，高为 H，母线与轴所成角为 θ，则圆锥的高 $H=R\bullet ctg\theta$

圆锥的体积 $V_1=\frac{1}{3}\pi R^2\bullet H=\frac{1}{3}\pi R^3ctg\theta$

半球的体积 $V_2=\frac{2}{3}\pi R^3$

$\because V_1=V_2$ 即：$\frac{1}{3}\pi R^3ctg\theta=\frac{2}{3}\pi R^3$

$\therefore ctg\theta=2$

$\therefore \cos 2\theta = \dfrac{3}{5}$

故选：D.

7.（5 分）函数 $f(x)=x|x+a|+b$ 是奇函数的充要条件是(　　)

A．$ab=0$　　B．$a+b=0$　　C．$a=b$　　D．$a^{2}+b^{2}=0$

【解答】解：根据奇函数的定义可知

$f(-x)=-x|a-x|+b=-f(x)=-x|x+a|-b$ 对任意 x 恒成立

$\therefore a=0$，$b=0$，故选 D

8.（5 分）已知 $0<x<y<a<1$，则有(　　)

A．$\log_{a}(xy)<0$　　B．$0<\log_{a}(xy)<1$　　C．$1<\log_{a}(xy)<2$　　D．$\log_{a}(xy)>2$

【解答】解：$\because 0<x<y<a<1 \therefore \log_{a}x>\log_{a}a=1$，$\log_{a}y>\log_{a}a=1$

$\therefore \log_{a}(xy)=\log_{a}x+\log_{a}y>2$

故选：D.

9.（5 分）函数 $y=1-\dfrac{1}{x-1}$(　　)

A．在 $(-1,+\infty)$ 内单调递增　　B．在 $(-1,+\infty)$ 内单调递减

C．在 $(1,+\infty)$ 内单调递增　　D．在 $(1,+\infty)$ 内单调递减

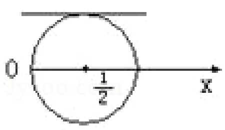
【解答】解：$y=-\dfrac{1}{x-1}$ 是 $y=-\dfrac{1}{x}$ 向右平移 1 个单位而得到，

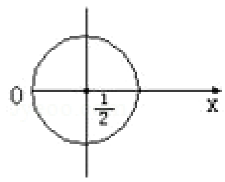
故 $y=1-\dfrac{1}{x-1}$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数，

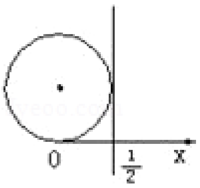
在 $(-\infty,1)$ 上为增函数.

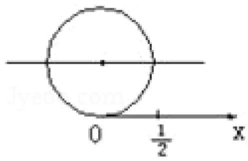
故选：C.

10.（5 分）极坐标方程 $\rho=\cos\theta$ 与 $\rho\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ 的图形是(　　)

A．

B．

C. 

D. 

【解答】解：$\rho=\cos\theta$ 两边同乘以 ρ 得 $\rho^2=\rho\cos\theta$

利用 $\rho^2=x^2+y^2$，$\rho\cos\theta=x$，$\rho\sin\theta=y$，进行化简得

$x^2+y^2=x$ 与 $x=\dfrac{1}{2}$

$\rho=\cos\theta$ 表示 $(\dfrac{1}{2}$，$0)$ 为圆心，$\dfrac{1}{2}$ 为半径的圆，

$\rho\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ 表示直线 $x=\dfrac{1}{2}$

故选：B．

11．（5 分）从正方体的 6 个面中选取 3 个面，其中有 2 个面不相邻的选法共有(　　)

A．8 种　　B．12 种　　C．16 种　　D．20 种

【解答】解：使用间接法，首先分析从 6 个面中选取 3 个面，共 C_6^3 种不同的取法，

而其中有 2 个面相邻，即 8 个角上 3 个相邻平面，选法有 8 种，

则选法共有 $C_6^3-8=12$ 种；

故选：B．

12．（5 分）据 2002 年 3 月 5 日九届人大五次会议《政府工作报告》：“2001 年国内生产总值达到 95933 亿元，比上年增长 7.3%”，如果“十•五”期间 (2001 年 $-$2005 年）每年的国内生产总值都按此年增长率增长，那么到“十•五”末我国国内年生产总值约为(　　)

A．115000 亿元　　B．120000 亿元　　C．127000 亿元　　D．135000 亿元

【解答】解：根据题意，有 $95933(1+7.3\%)^4\approx 127164.8$，

故选：C．

二、填空题（共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

13．（4 分）椭圆 $5x^2+ky^2=5$ 的一个焦点是 $(0,2)$，那么 $k=$__1__．

【解答】解：把椭圆方程化为标准方程得：$x^2+\dfrac{y^2}{\frac{5}{k}}=1$，

因为焦点坐标为$(0,2)$，所以长半轴在y轴上，

则$c=\sqrt{\frac{5}{k}-1}=2$，解得$k=1$.

故答案为：1.

14.（4 分）在$(x^2+1)(x-2)^7$的展开式中x^3的系数是<u>　1008　</u>.

【解答】解：$(x^2+1)(x-2)^7$的展开式中x^3的系数等于$(x-2)^7$展开式的x的系数加上$(x-2)^7$展开式的x^3的系数

$(x-2)^7$展开式的通项为$T_{r+1}=C_7^r x^{7-r}(-2)^r$

令$7-r=1$，得$r=6$故$(x-2)^7$展开式的x的系数为$C_7^6(-2)^6=448$

令$7-r=3$得$r=4$故$(x-2)^7$展开式的x^3的系数为$C_7^4(-2)^4=560$

故展开式中x^3的系数是$448+560=1008$

故答案为：1008.

15.（4 分）已知$\sin a=\cos 2a$　$(a\in(\frac{\pi}{2}，\pi))$，则$tga=$__$-\frac{\sqrt{3}}{3}$__.

【解答】解：$\because \sin a=\cos 2a$　$(a\in(\frac{\pi}{2}，\pi))$，

$\therefore \sin a=1-2\sin^2\alpha$，$\therefore \sin\alpha=\frac{1}{2}$，或$\sin\alpha=-1$（舍去），

$\therefore \cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，

故答案为：$-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

16.（4 分）已知函数$f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$，那么$f(1)+f(2)+f(\frac{1}{2})+f(3)+f(\frac{1}{3})+f(4)+f(\frac{1}{4})=$ $\frac{7}{2}$__.

【解答】解：$\because f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$，

$\therefore f(\frac{1}{x})=\frac{1}{1+x^2}$

$\therefore f(x)+f(\frac{1}{x})=1$

$\therefore f$（2）$+f(\frac{1}{2})=1$，f（3）$+f(\frac{1}{3})=1$，f（4）$+f(\frac{1}{4})=1$，f（1）$=\frac{1}{2}$

$\therefore f(1)+f(2)+f(\frac{1}{2})+f(3)+f(\frac{1}{3})+f(4)+f(\frac{1}{4})=\frac{7}{2}$

故答案为：$\frac{7}{2}$

三、解答题（共 6 小题，满分 74 分）

17．（12 分）已知复数 $z=1+i$ ，求实数 a ， b 使 $az+2b\overline{z}=(a+2z)^2$.

【解答】解：$\because z=1+i$ ，

$\therefore az+2b\overline{z}=(a+2b)+(a-2b)i(a+2z)^2$

$=(a+2)^2-4+4(a+2)i$

$=(a^2+4a)+4(a+2)i$

因为 a ， b 都是实数，

所以由 $az+2b\overline{z}=(a+2z)^2$

得 $\begin{cases} a+2b=a^2+4a \\ a-2b=4(a+2) \end{cases}$

两式相加，整理得

$a^2+6a+8=0$

解得 $a_1=-2$ ， $a_2=-4$

对应得 $b_1=-1$ ， $b_2=2$

$\therefore$ 所求实数为 $a=-2$ ， $b=-1$ 或 $a=-4$ ， $b=2$

18．（12 分）设 $\{a_n\}$ 为等差数列， $\{b_n\}$ 为等比数列， $a_1=b_1=1$ ， $a_2+a_4=b_3$ ， $b_2b_4=a_3$ ，分别求出 $\{a_n\}$ 及 $\{b_n\}$ 的前 10 项的和 S_{10} 及 T_{10} .

【解答】解：$\because \{a_n\}$ 为等差数列， $\{b_n\}$ 为等比数列，

$\therefore a_2+a_4=2a_3$ ， $b_2b_4=b_3^2$

已知 $a_2+a_4=b_3$ ， $b_2b_4=a_3$ ，

$\therefore b_3=2a_3$ ， $a_3=b_3^2$

得 $b_3=2b_3^2$

$\because b_3\neq 0 \therefore b_3=\frac{1}{2}, a_3=\frac{1}{4}$

由 $a_1=1$，$a_3=\frac{1}{4}$ 知 $\{a_n\}$ 的公差为 $d=-\frac{3}{8}$，

$\therefore S_{10}=10a_1+\frac{10\times 9}{2}d=-\frac{55}{8}$，

由 $b_1=1$，$b_3=\frac{1}{2}$ 知 $\{b_n\}$ 的公比为 $q=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $q=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

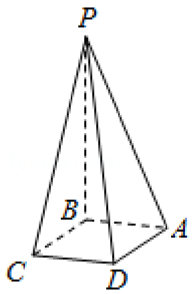
当 $q=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$T_{10}=\frac{b_1(1-q^{10})}{1-q}=\frac{31}{32}(2+\sqrt{2})$，

当 $q=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$T_{10}=\frac{b_1(1-q^{10})}{1-q}=\frac{31}{32}(2-\sqrt{2})$.

19.（12 分）四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是边长为 a 的正方形，$PB\perp$ 平面 $ABCD$.

（1）若面 PAD 与面 $ABCD$ 所成的二面角为 $60°$，求这个四棱锥的体积；

（2）证明无论四棱锥的高怎样变化．面与面所成的二面角恒大于 $90°$.



【解答】解（1）$\because PB\perp$ 平面 $ABCD$，$\therefore BA$ 是 PA 在面 $ABCD$ 上的射影，$\therefore PA\perp DA$

$\therefore \angle PAB$ 是面 PAD 与面 $ABCD$ 所成二面角的平面角，$\angle PAB=60°$

而 PB 是四棱锥 $P-ABCD$ 的高，$PA=AB\bullet\tan 60°=\sqrt{3}a$

$\therefore V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}\bullet\sqrt{3}a\bullet a^2=\frac{\sqrt{3}}{3}a^3$

证明:（2）不论棱锥的高怎样变化，棱锥侧面 PAD 与 PCD 恒为全等三角形.

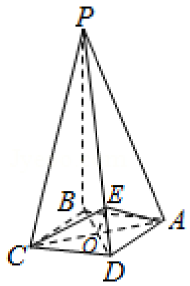
作 $AE\perp DP$，垂足为 E，连接 EC，则 $\Delta ADE\cong\Delta CDE$.

$\therefore AE=EC$，$\angle CED=90°$，故 $\angle CEA$ 是面 PAD 与面 PCD 所成的二面角的平面角.

设 AC 与 DB 相交于点 O，连接 EO，则 $EO\perp AC$. $\frac{\sqrt{2}}{2}a=OA<AE<AD=a$

在 ΔAEC 中，$\cos\angle AEC=\frac{AE^2+EC^2-(2\bullet OA)^2}{2AE\bullet EC}=\frac{(AE+\sqrt{2}OA)(AE-\sqrt{2}OA)}{AE^2}<0$

所以，面 PAD 与面 PCD 所成的二面角恒大于 $90°$



20．（12 分）设 A 、 B 是双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$ 上的两点，点 $N(1,2)$ 是线段 AB 的中点．

(I) 求直线 AB 的方程

(II) 如果线段 AB 的垂直平分线与双曲线相交于 C 、 D 两点，那么 A 、 B 、 C 、 D 四点是否共圆？为什么？

【解答】解：(I) 依题意，记 $A(x_1,\ y_1)$， $B(x_2,\ y_2)$，

可设直线 AB 的方程为 $y=k(x-1)+2$，

代入 $x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$，整理得 $(2-k^2)x^2-2k(2-k)x-(2-k)^2-2=0$ ①

x_1， x_2 则是方程①的两个不同的根，

所以 $2-k^2\neq 0$，且 $x_1+x_2=\dfrac{2k(2-k)}{2-k^2}$，

由 $N(1,2)$ 是 AB 的中点得 $\dfrac{1}{2}(x_1+x_2)=1$，

$\therefore k(2-k)=2-k^2$，

解得 $k=1$，

所以直线 AB 的方程为 $y=x+1$

(II) 将 $k=1$ 代入方程①得 $x^2-2x-3=0$

解出 $x_1=-1$， $x_2=3$

由 $y=x+1$ 得 $y_1=0$， $y_2=4$．

即 A 、 B 的坐标分别为 $(-1,0)$ 和 $(3,4)$．

由 CD 垂直平分 AB，

得直线 CD 的方程为 $y=-(x-1)+2$，

即 $y=3-x$．

代入双曲线方程，整理得 $x^2+6x-11=0$．②

记 $C(x_3，\ y_3)$，$D(x_4，\ y_4)$，以及 CD 的中点为 $M(x_0，\ y_0)$，

则 x_3，x_4 是方程②的两个根．所以 $x_3+x_4=-6$，$x_3x_4=-11$．

从而 $x_0=\dfrac{1}{2}(x_3+x_4)=-3$，$y_0=3-x_0=6$；

$|CD|=\sqrt{(x_3-x_4)^2+(y_3-y_4)^2}=\sqrt{2(x_3-x_4)^2}$

$=\sqrt{2[(x_3+x_4)^2-4x_3x_4]}=4\sqrt{10}$

$\therefore|MC|=|MD|=\dfrac{1}{2}|CD|=2\sqrt{10}$

又 $|MA|=|MB|=\sqrt{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2}=\sqrt{4+36}=2\sqrt{10}$

即 A、B、C、D 四点到点 M 的距离相等，所以 A、B、C、D 四点共圆．

21．（12 分）（1）给出两块相同的正三角形纸片（如图 1，图 2)，要求用其中一块剪拼成一个三棱锥模型，另一块剪拼成一个正三棱柱模型，使它们的全面积都与原三角形的面积相等，请设计一种剪拼方法，分别用虚线标示在图 1、图 2 中，并作简要说明；

（2）试比较你剪拼的正三棱锥与正三棱柱的体积的大小；

（3）如果给出的是一块任意三角形的纸片（如图 3)，要求剪拼成一个直三棱柱，使它的全面积与给出的三角形的面积相等．请设计一种剪拼方法，用虚线标示在图 3 中，并作简要说明．

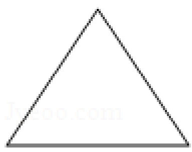


图1

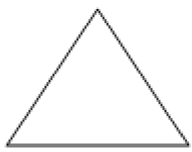


图2

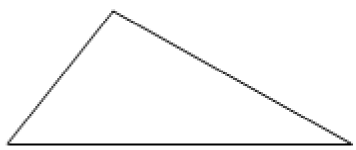


图3

【解答】解：（1）如图 1，沿正三角形三边中点连线折起，可拼得一个正三棱锥．

如图 2，正三角形三个角上剪出三个相同的四边形，其较长的一组邻边边长为三角形边长的 $\dfrac{1}{4}$，有一组对角为直角，余下部分按虚线折起，可成一个缺上底的正三棱柱，而剪出的三个相同的四边形恰好拼成这个正三棱锥的上底．

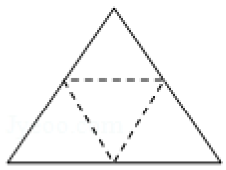


图1

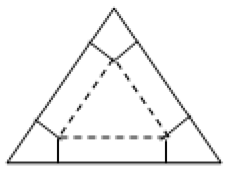


图2

（2）依上面剪拼方法，有$V_{柱}>V_{锥}$．

推理如下：

设给出正三角形纸片的边长为2，

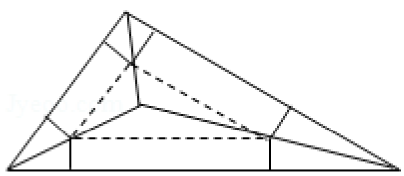
那么，正三棱锥与正三棱柱的底面都是边长为1的正三角形，其面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}$．

现在计算它们的高：$h_{锥}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

$h_{柱}=\frac{1}{2}tan30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{6}$．$V_{柱}-V_{锥}=\left(h_{柱}-\frac{1}{3}h_{锥}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=\left(\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{\sqrt{6}}{9}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{3-2\sqrt{2}}{24}>0$

所以$V_{柱}>V_{锥}$．

（3）如图，分别连接三角形的内心与各顶点，得三条线段，再以这三条线段的中点为顶点作三角形．以新作的三角形为直棱柱的底面，过新三角形的三个顶点向原三角形三边作垂线，沿六条垂线剪下三个四边形，可心拼成直三棱柱的上底，余下部分按虚线折起，成为一个缺上底的直三棱柱，即可得到直三棱柱．



22．（14分）已知$a>0$，函数$f(x)=ax-bx^2$．

（1）当$b>0$时，若对任意$x\in R$都有$f(x)\leqslant 1$，证明$a\leqslant 2\sqrt{b}$；

（2）当$b>1$时，证明：对任意$x\in[0，1]$，$|f(x)|\leqslant 1$的充要条件是$b-1\leqslant a\leqslant 2\sqrt{b}$；

（3）当$0<b\leqslant 1$时，讨论：对任意$x\in[0，1]$，$|f(x)|\leqslant 1$的充要条件．

【解答】（1）证明：根据题设，对任意$x\in R$，都有$f(x)\leqslant 1$．

又 $f(x)=-b(x-\frac{a}{2b})^2+\frac{a^2}{4b}$． $\therefore f(\frac{a}{2b})=\frac{a^2}{4b}\leqslant 1$，

$\because a>0$， $b>0$，

$\therefore a\leqslant 2\sqrt{b}$．

（2）证明：必要性：对任意 $x\in[0,\ 1]$，$|f(x)|\leqslant 1\Rightarrow f(x)\geqslant -1$．

据此可推出 f （1） $\geqslant -1$，即 $a-b\geqslant -1$，

$\therefore a\geqslant b-1$．

对任意 $x\in[0,\ 1]$，$|f(x)|\leqslant 1\Rightarrow f(x)\leqslant 1$，

因为 $b>1$，可得 $0<\frac{1}{\sqrt{b}}<1$，可推出 $f(\frac{1}{\sqrt{b}})\leqslant 1$，即 $a\bullet\frac{1}{\sqrt{b}}-1\leqslant 1$，

$\therefore a\leqslant 2\sqrt{b}$，

$\therefore b-1\leqslant a\leqslant 2\sqrt{b}$．

充分性：因为 $b>1$， $a\geqslant b-1$，对任意 $x\in[0,\ 1]$，

可以推出 $ax-bx^2\geqslant b(x-x^2)-x\geqslant -x\geqslant -1$，即 $ax-bx^2\geqslant -1$，

因为 $b>1$， $a\leqslant 2\sqrt{b}$ 对任意 $x\in[0,\ 1]$，

可以推出： $2\sqrt{b}-bx^2\leqslant -b(x-\frac{1}{\sqrt{b}})^2+1\leqslant 1$，即 $ax-bx^2\leqslant 1$，

$\therefore -1\leqslant f(x)\leqslant 1$．

综上，当 $b>1$ 时，对任意 $x\in[0,\ 1]$，$|f(x)|\leqslant 1$ 的充要条件是 $b-1\leqslant a\leqslant 2\sqrt{b}$．

（3）解：因为 $a>0$， $0<b\leqslant 1$ 时，对任意 $x\in[0,\ 1]$ 有 $f(x)=ax-bx^2\geqslant -b\geqslant -1$，即 $f(x)\geqslant -1$；

$f(x)\leqslant 1\Rightarrow f$ （1） $\leqslant 1\Rightarrow a-b\leqslant 1$，即 $a\leqslant b+1$，

又 $a\leqslant b+1\Rightarrow f(x)\leqslant (b+1)x-bx^2\leqslant 1$，即 $f(x)\leqslant 1$．

所以，当 $a>0$， $0<b\leqslant 1$ 时，对任意 $x\in[0,\ 1]$，$|f(x)|\leqslant 1$ 的充要条件是 $a\leqslant b+1$．