

2006 年辽宁高考文科数学真题及答案

第 I 卷 (选择题 共 60 分)

参考公式:

如果事件 A 、 B 互斥, 那么

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

如果事件 A 、 B 相互独立, 那么

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率 P , 那

么 n 次独立重复试验中恰好发生 k 次的概率

$$P_n(k) = C_n^k P^k (1-P)^{n-k}$$

球的表面积公式

$$S = 4\pi R^2$$

球的体积公式

$$V_{\text{球}} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

其中 R 表示球的半径

一. 选择题: 本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分, 在每小题给出的四个选项中, 选择一个符合题目要求的选项.

(1) 函数 $y = \sin(\frac{1}{2}x + 3)$ 的最小正周期是

- (A) $\frac{\pi}{2}$ (B) π (C) 2π (D) 4π

(2) 设集合 $A = \{1, 2\}$, 则满足 $A \cup B = \{1, 2, 3\}$ 的集合 B 的个数是

- (A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 8

(3) 设 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的任意函数, 则下列叙述正确的是

- (A) $f(x) f(-x)$ 是奇函数 (B) $f(x) | f(-x) |$ 是奇函数

- (C) $f(x) - f(-x)$ 是偶函数 (D) $f(x) + f(-x)$ 是偶函数

(4) $C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5$ 的值为

- (A) 61 (B) 62 (C) 63 (D) 64

(5) 方程 $2x^2 - 5x + 2 = 0$ 的两个根可分别作为

- (A) 一椭圆和一双曲线的离心率 (B) 两抛物线的离心率
(C) 一椭圆和一抛物线的离心率 (D) 两椭圆的离心率

(6) 给出下列四个命题:

- ①垂直于同一直线的两条直线互相平行.
②垂直于同一平面的两个平面互相平行.
③若直线 l_1, l_2 与同一平面所成的角相等, 则 l_1, l_2 互相平行.
④若直线 l_1, l_2 是异面直线, 则与 l_1, l_2 都相交的两条直线是异面直线.

其中假命题的个数是

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

(7) 双曲线 $x^2 - y^2 = 4$ 的两条渐近线与直线 $x = 3$ 围成一个三角形区域，表示该区域的不等式组是

(A) $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + y \geq 0 \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + y \leq 0 \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} x - y \leq 0 \\ x + y \leq 0 \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x - y \leq 0 \\ x + y \geq 3 \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$

(8) 设 \oplus 是 \mathbf{R} 上的一个运算， A 是 \mathbf{R} 的非空子集。若对任意 $a, b \in A$, 有 $a \oplus b \in A$, 则称 A 对运

算 \oplus 封闭。下列数集对加法、减法、乘法和除法（除数不等于零）四则运算都封闭的是

- (A) 自然数集 (B) 整数集 (C) 有理数集 (D) 无理数集

(9) $\triangle ABC$ 的三内角 A, B, C , 所对边的长分别为 a, b, c , 设向量 $p(a + c, b)$ 、 $q(b - a, c - a)$.

若 $p \parallel q$, 则角 C 的大小为

- (A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{2\pi}{3}$

(10) 已知等腰 $\triangle ABC$ 的腰为底的 2 倍，顶角的正切值是

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $\frac{\sqrt{15}}{8}$ (D) $\frac{\sqrt{15}}{7}$

(11) 与方程 $y = e^{2x} - 2e^x + (x \geq 0)$ 的曲线关于直线 $y = x$ 对称的曲线的方程为

- (A) $y = \ln(1 + \sqrt{x})$ (B) $y = \ln(1 - \sqrt{x})$
(C) $y = -\ln(1 + \sqrt{x})$ (D) $y = -\ln(1 - \sqrt{x})$

(12) 曲线 $\frac{x^2}{10 - m} + \frac{y^2}{6 - m} = 1 (m < 6)$ 与曲线 $\frac{x^2}{5 - n} + \frac{y^2}{9 - n} = 1 (5 < n < 9)$ 的

- (A) 离心率相等 (B) 焦距相等 (C) 焦点相同 (D) 准线相同

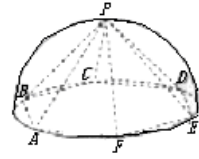
第 II 卷（非选择题 共 90 分）

二. 填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分.

(13) 方程 $\log_2(x - 1) = 2 - \log_2(x - 1)$ 的解为_____.

(14) 设 $g(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0, \\ \ln x, & x > 0, \end{cases}$ 则 $g(g(\frac{1}{2})) =$ _____.

(15) 如图, 半径为 2 的半球内有一内接正六棱锥 P—ABCDEF, 则此正六棱锥的侧面积是_____.



(16) 5 名乒乓球队员中, 有 2 名老队员和 3 名新队员, 现从中选出 3 名队员排成 1, 2, 3 号参加团体比赛, 则入选的 3 名队员中至少有 1 名老队员, 且 1、2 号中至少有 1 名新队员的排法有

_____种. (以数作答)

三. 解答题: 本大题共 6 小题, 共 74 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17) (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x, x \in R$. 求:

(I) 求函数 $f(x)$ 的最大值及取得最大值的自变量 x 的集合;

(II) 函数 $f(x)$ 的单调增区间.

(18) (本小题满分 12 分)

甲、乙两班各派 2 名同学参加年级数学竞赛, 参赛同学成绩及格的概率都为 0.6, 且参赛同学的成绩相互之间没有影响. 求:

(I) 甲、乙两班参赛同学中各有 1 名同学成绩及格的概率;

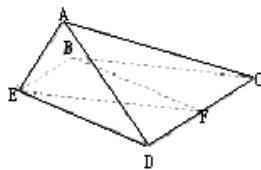
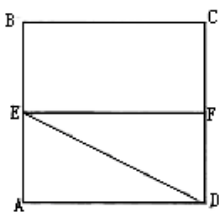
(II) 甲、乙两班参赛同学中至少有 1 名同学成绩及格的概率.

(19) (本小题满分 12 分)

已知正方形 ABCD, E、F 分别是边 AB、CD 的中点, 将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折起, 如图所示, 记二面角 A—DE—C 的大小为 $\theta (0 < \theta < \pi)$.

(I) 证明 $BF \parallel$ 平面 ADE;

(II) 若 $\triangle ACD$ 为正三角形, 试判断点 A 在平面 BCDE 内的射影 G 是否在直线 EF 上, 证明你的结论, 并求角 θ 的余弦值.



(20) (本小题满分 12 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = pn^2 - 2n + q (p, q \in R, n \in N_+)$.

(I) 求 q 的值;

(II) 若 a_1 与 a_5 的等差中项为 18, b_n 满足 $a_n = 2\log_2 b_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

(21) (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}ax^3 + (a+d)x^2 + (a+2d)x + d$, $g(x) = ax^2 + 2(a+2d)x + a + 4d$, 其中 $a > 0, d > 0$, 设 x_0 为 $f(x)$ 的极小值点, x_0 为 $g(x)$ 的极值点, $g(x_2) = g(x_1) = 0$, 并且 $x_2 < x_1$.

将 $(x_0, f(x_0)), (x_1, g(x_1)), (x_2, 0), (x_3, 0)$ 依次记为 A, B, C, D .

(I) 求 x_0 的值;

(II) 若四边形 ABCD 为梯形, 且面积为 1, 求 a, d 的值.

(22) (本小题满分 14 分)

已知点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) (x_1 x_2 \neq 0)$ 是抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 上的两个动点, O 是坐标原点, 向量 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 满足 $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|$. 设圆 C 的方程为 $x^2 + y^2 - (x_1 + x_2)x - (y_1 + y_2)y = 0$.

(I) 证明线段 AB 是圆 C 的直径;

(II) 当圆 C 的圆心到直线 $x - 2y = 0$ 的距离的最小值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 时, 求 p 的值.

2006 年辽宁高考文科数学真题参考答案

一. 选择题: 本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分.

(1) D (2) C (3) C (4) B (5) A (6) D
(7) A (8) C (9) B (10) D (11) A (12) B

二. 填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分.

(13) $\sqrt{5}$ (14) $\frac{1}{2}$ (15) $6\sqrt{7}$ (16) 48

三. 解答题

(17) 本小题考查三角公式、三角函数的性质及已知三角函数值求角等基础知识, 考查综

合运用三角函数有关知识的能力. 满分 12 分

$$\begin{aligned} \text{(I) 解法一: } \because f(x) &= \frac{1 - \cos 2x}{2} + \sin 2x + \frac{3(1 + \cos 2x)}{2} \\ &= 2 + \sin 2x + \cos 2x \\ &= 2 + \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned} \quad \dots\dots$$

4 分

$$\therefore \text{当 } 2x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \text{ 即 } x = k\pi + \frac{\pi}{8} (k \in Z) \text{ 时, } f(x) \text{ 取得最大值 } 2 + \sqrt{2}.$$

$$\text{因此, } f(x) \text{ 取得最大值的自变量 } x \text{ 的集合是 } \left\{x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{8}, k \in Z\right\}. \quad \dots\dots$$

8 分

$$\begin{aligned} \text{解法二: } \because f(x) &= (\sin^2 x + \cos^2 x) + 2\sin 2x + 2\cos^2 x \\ &= 1 + \sin 2x + 1 + \cos 2x \\ &= 2 + \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned} \quad \dots\dots 4$$

分

$$\therefore \text{当 } 2x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \text{ 即 } x = k\pi + \frac{\pi}{8} (k \in Z) \text{ 时, } f(x) \text{ 取得最大值 } 2 + \sqrt{2}.$$

$$\text{因此, } f(x) \text{ 取得最大值的自变量 } x \text{ 的集合是 } \left\{x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{8}, k \in Z\right\}. \quad \dots\dots$$

8 分

$$\text{(II) 解: } f(x) = 2 + \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\text{由题意得 } 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in Z), \text{ 即}$$

$$k\pi - \frac{3\pi}{8} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{8} (k \in Z).$$

$$\text{因此, } f(x) \text{ 的单调增区间是 } \left[k\pi - \frac{3\pi}{8} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{8} \right]. \quad \dots\dots 12$$

分

(18) 本小题主要考查相互独立事件的频率乘法公式和互斥事件的概率加法公式等基础知识, 考查学生运用概率知识解决实际问题的能力. 满分 12 分.

$$\text{(I) 解: 甲班参赛同学中恰有 1 名同学成绩及格的概率为 } C_2^1 \times 0.6 \times 0.4 = 0.48.$$

$$\text{乙班参赛同学中恰有 1 名同学成绩及格的概率为 } C_2^1 \times 0.6 \times 0.4 = 0.48.$$

故甲、乙两班参赛同学中各有 1 名同学成绩及格的概率为

$$P = 0.48 \times 0.48 = 0.2304. \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{(II) 解法一: 甲、乙两班 4 名参赛同学成绩都不及格的概率为 } 0.4^4 = 0.0256,$$

故甲、乙两班参赛同学中至少有 1 名同学成绩及格的概率为

$$P = 1 - 0.0256 = 0.9744. \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{解法二: 甲、乙两班 4 名参赛同学成绩都不及格的概率为 } C_4^1 \times 0.6 \times 0.4 = 0.1536.$$

甲、乙两班参赛同学中至少有 1 名同学成绩及格的概率为

$$C_4^2 \times 0.6^2 \times 0.4^2 = 0.3456.$$

甲、乙两班参赛同学中恰有 3 名同学成绩及格的概率为 $C_4^2 \times 0.6^2 \times 0.4^2 = 0.3456.$

甲、乙两班 4 名参赛同学成绩都及格的概率为 $0.6^4 = 0.1296,$

故甲、乙两班参赛同学中至少有 1 名同学成绩及格的概率为

$$P = 0.1536 + 0.3456 + 0.3456 + 0.1296 = 0.9744. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

(19) 本小题主要考查空间中的线面关系, 解三角形等基础知识, 考查空间想象能力和思维能力.

满分 12 分.

(I) 证明: E, F 分别是正方形 $ABCD$ 的边 AB, CD 的中点.

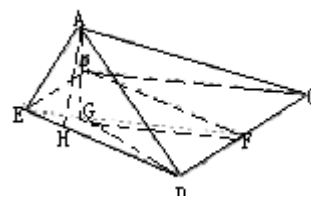
$\therefore ED \parallel FC, \text{ 且 } EB = FC,$

\therefore 四边形 $EBFC$ 是平行四边形,

$\therefore EF \parallel BC.$

$\because BC \subset \text{平面 } AED, \text{ 而 } EF \not\subset \text{平面 } AED.$

$\therefore EF \parallel \text{平面 } AED. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$



(II) 解法一: 点 A 在平面 $BCDE$ 内的射影 G 在直线 EF 上,

过点 A 作 $AG \perp \text{平面 } BCDE,$ 垂足为 $G,$ 连结 $GC, GD.$

$\because \triangle ACD$ 为正三角形.

$\therefore AC = AD,$

$\therefore GC = GD,$

$\therefore G$ 在 CD 的垂直平分线上,

又 $\because EF$ 是 CD 的垂直平分线,

\therefore 点 A 在平面 $BCDE$ 内的射影 G 在直线 EF 上. $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

过 G 作 $GH \perp ED,$ 垂足为 $H,$ 连结 $AH,$ 则 $AH \perp DE.$

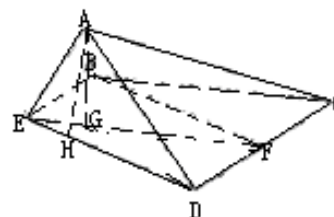
$\therefore \angle AHG$ 是二面角 $A-DE-C$ 的平面角, 即 $\angle AHG = \theta.$

设除正方形 $ABCD$ 的边长为 $2a,$ 连结 $AF.$

在折后图的 $\triangle AEF$ 中, $AF = \sqrt{3} a, EF = 2AE = 2 a,$

$\therefore \triangle AEF$ 为直角三角形, $AG \cdot EF = AE \cdot AF,$

$$\therefore AG = \frac{\sqrt{3}}{2} a.$$



在 $\text{Rt} \triangle ADE$ 中, $AH \cdot DE = AD \cdot AE,$

$$\therefore AH = \frac{2a}{\sqrt{5}}, \therefore GH = \frac{a}{2\sqrt{5}} \therefore \cos \theta = \frac{GH}{AH} = \frac{1}{4}. \dots\dots\dots 12$$

分

解法二: 点 A 在平面 $BCDE$ 内的射影 G 在直线 EF 上.

连结 $AF,$ 在平面 AEF 内过点 A 作 $AG' \perp EF,$ 垂足为 G'

$\because \triangle ACD$ 为正三角形, F 为 CD 的中点,

$\therefore AD \perp CD.$

又 $\because EF \perp CD,$

$\therefore CD \perp \text{平面 } AEF,$

$\therefore A G' \subset \text{平面 } AEF,$

$\therefore CD \perp A'G'$,
 又 $\because A'G' \perp EF$, 且 $CD \cap EF = F$, $CD \subset$ 平面 $BCDE$, $EF \subset$ 平面 $BCDE$,
 $\therefore AC \perp$ 平面 $BCDE$,
 $\therefore G$ 为 A 在平面 $BCDE$ 内的射影 G ,
 \therefore 点 A 在平面 $BCDE$ 内的射影 G 在直线 EF 上,
 过 G 作 $CH \perp ED$, 垂足为 H , 连结 AH , 则 $AH \perp DE$ 8 分
 $\therefore \angle AHG$ 是二面角 $A-DE-C$ 的平面角, 即 $\angle AHG = \theta$.
 设原正方形 $ABCD$ 的边长为 $2a$.

在折后图的 $\triangle AEF$ 中, $AF = \sqrt{3}a$, $EF = 2AE = 2a$,

$\therefore \triangle AEF$ 为直角三角形, $AG \cdot EF = AE \cdot AF$

$$\therefore AC = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中, $AH \cdot DE = AD \cdot AE$,

$$\therefore AE = \frac{2a}{\sqrt{5}}, \therefore GH = \frac{a}{2\sqrt{5}} \quad \therefore \cos \theta = \frac{GH}{AH} = \frac{1}{4}. \quad \text{.....12}$$

分

解法三: 点 A 在平面 $BCDE$ 内的射影 G 在直线 EF 上.

连结 AF , 在平面 AEF 内过点 A 作 $AG \perp EF$, 垂足为 G'

$\because \triangle ACD$ 为正三角形, F 为 CD 的中点,

$\therefore AF \perp CD$.

又 $\because EF \perp CD$,

$\therefore CD \perp$ 平面 AEF ,

$\because CD \subset$ 平面 $BCDE$,

\therefore 平面 $AEF \perp$ 平面 $BCDE$.

又 \because 平面 $AEF \cap$ 平面 $BCDE = EF$, $A'G' \perp EF$.

$\therefore A'G' \perp$ 平面 $BCDE$, 即 G' 为 A 在平面 $BCDE$ 内的射影 G ,

\therefore 点 A 在平面 $BCDE$ 内的射影 G 在直线 EF 上.8 分

过 G 作 $GH \perp DE$, 垂足为 H , 连结 AH , 则 $AH \perp DE$,

$\therefore \angle AHG$ 是二面角 $A-DE-C$ 的平面角, 即 $\angle AHG = \theta$.

$\therefore \triangle AEF$ 为直角三角形, $AG \cdot EF = AE \cdot AF$

$$\therefore AC = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中, $AH \cdot DE = AD \cdot AE$,

$$\therefore AH = \frac{2a}{\sqrt{5}}, \therefore GH = \frac{a}{2\sqrt{5}} \quad \therefore \cos \theta = \frac{GH}{AH} = \frac{1}{4}. \quad \text{.....12}$$

分

(20) 本小题考查数列的概念, 等差数列, 等比数列, 对数与指数互相转化等基础知识, 考查综合运用数学知识解决问题的能力. 满分 12 分

(I) 解法一: 当 $n = 1$ 时, $a_1 = S_1 = p - 2 + q$,

$$\begin{aligned} \text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n &= S_n - S_{n-1} = pn^2 - 2n + q - p(n-1)^2 + 2(n-1) - q \\ &= 2pn - p - 2. \end{aligned}$$

$\therefore \{a_n\}$ 是等差数列, $\therefore p - 2 + q = 2p - p - 2, \therefore q = 0$4分

解法二: 当 $n = 1$ 时, $a_1 = S_1 = p - 2 + q$,

$$\begin{aligned} \text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n &= S_n - S_{n-1} = pn^2 - 2n + q - p(n-1)^2 + 2(n-1) - q \\ &= 2pn - p - 2. \end{aligned}$$

当 $n \geq 3$ 时, $a_n - a_{n-1} = 2pn - p - 2 - [2p(n-1) - p - 2] = 2p$.

$$a_2 = p - 2 + q + 2p = 3p - 2 + q.$$

$$\text{又 } a_2 = 2p \cdot 2 - p - 2 = 3p - 2,$$

所以 $3p - 2 + q = 3p - 2$, 得

$\therefore q = 0$4分

(II) 解: $\therefore a_1 = \frac{a_1 + a_5}{2}, \therefore a_3 = 18$. 又 $a_3 = 6p - p - 2$,

$$\therefore 6p - p - 2 = 18, \therefore p = 4. \therefore a_n = 8n - 6. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

又 $a_n = 2 \log_2 b_n$ 得 $b_n = 2^{b_n - 3}$.

$$\therefore b_1 = 2, \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2^{4(n+1)-1}}{2^{4n-1}} = 2^4 = 16, \text{ 即 } \{b_n\} \text{ 是等比数列.}$$

所以数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n = \frac{2(1-16^n)}{1-16} = \frac{2}{15}(16^n - 1)$12分

(21) 本小题考查函数的导数, 函数, 函数极值的判定, 闭区间上二次函数的最值, 等差数列等基础知识的综合运用, 考查用数形结合的数学思想分析问题, 解决问题的能力. 满分 12 分.

(I) 解: $f'(x) = ax^2 + 2(a+d)x + a + 2d = (x+1)(ax + a + 2d)$.

$$\text{令 } f'_n(x) = 0, \text{ 由 } a \neq 0 \text{ 得 } x = -1 \text{ 或 } x = -1 - \frac{2d}{a}. \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\therefore a > 0, d > 0. \quad -1 - \frac{2d}{a} < -1.$$

当 $-1 - \frac{2d}{a} < x < -1$ 时, $f'(x) < 0$,

当 $x > -1$ 时, $f'(x) > 0$,

所以 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处取极小值, 即 $x_0 = -1$6分

(II) 解: $g(x) = ax^2 + (2a + 4d)x + a + 4d$.

$\because a > 0, x \in R,$

$\therefore g(x)$ 在 $x = -\frac{2a+4d}{2a} = -1 - \frac{2d}{a}$ 处取得极小值,即 $x_1 = -1 - \frac{2d}{a}$.

由 $g(x) = 0$,即 $(ax + a + 4d)(x + 1) = 0$,

$\because a > 0, d > 0, x_2 > x_1,$

$\therefore x_2 = -1 - \frac{4d}{a}, x_1 = -1,$

$\therefore f(x_0) = f(-1) = -\frac{1}{3}a + (a + d) - (a + 2d) + d = \frac{1}{3}a,$

$g(x_0) = g(-1 - \frac{2d}{a}) = a(-1 - \frac{2d}{a})^2 + (a + 4d)(-1 - \frac{2d}{a}) + a + 4d = -\frac{4d^2}{a},$

$\therefore A(-1, -\frac{1}{3}a), B(-1 - \frac{2d}{a}, -\frac{4d^2}{a}), C(-1, -\frac{2d}{a}), D(-1, 0).$9分

由四边形 $ABCD$ 是梯形及 BC 与 AD 不平行, 得 $AB \parallel CD$.

$\therefore -\frac{a}{3} = -\frac{4d^2}{a},$ 即 $a^2 = 12d^2$.

由四边形 $ABCD$ 的面积为 1, 得 $\frac{1}{2}(|AB| + |CD|) \cdot |AD| = 1,$

即 $\frac{1}{2}(\frac{4d}{a} + \frac{2d}{a}) \cdot \frac{a}{3} = 1,$ 得 $d = 1,$

从而 $a^2 = 12,$ 得 $a = 2\sqrt{3}.$ 12分

(22) 本小题主要考查平面向量的基本运算, 圆与抛物线的方程, 点到直线的距离等基础知识, 以及综合运用解析几何知识解决问题的能力, 满分 14 分.

(I) 证法一: $\because |\vec{OA} + \vec{OB}| = |\vec{OA} - \vec{OB}|,$

$\therefore (\vec{OA} + \vec{OB})^2 = (\vec{OA} - \vec{OB})^2,$ 即

$\vec{OA}^2 + 2\vec{OA} \cdot \vec{OB} + \vec{OB}^2 = \vec{OA}^2 - 2\vec{OA} \cdot \vec{OB} + \vec{OB}^2,$ 整理得

$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0.$

$\therefore x_1x_2 + y_1y_2 = 0.$

①

.....3分

设点 $M(x, y)$ 是以线段 AB 为直径的圆上的任意一点, 则

$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0.$

即 $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0.$

展开上式并将①代入得 $x^2 + y^2 - (x_1 + x_2)x - (y_1 - y_2)y = 0.$

故线段 AB 是圆 C 的直径.

证法二: $\because |\vec{OA} + \vec{OB}| = |\vec{OA} - \vec{OB}|,$

$$\begin{aligned} \therefore (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})^2 &= (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})^2, \text{即} \\ \overrightarrow{OA}^2 + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}^2 &= \overrightarrow{OA}^2 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}^2, \text{整理得} \\ \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= 0. \end{aligned}$$

$$\therefore x_1x_2 + y_1y_2 = 0. \quad \text{①} \quad \text{……3分}$$

若直线 (x, y) 在以线 AB 为直径的圆上, 则

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} \cdot \frac{y - y_2}{x - x_2} = -1 (x \neq x_1, x \neq x_2)$$

$$\text{去分母得 } (x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0,$$

点 $(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2)$ 满足上方程, 展开并将①代入得

$$x^2 + y^2 = (x_1 + x_2)x - (y_1 + y_2)y = 0,$$

所以线 AB 是圆 C 的直径. ……6分

证法三: $\because |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|,$

$$\begin{aligned} \therefore (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})^2 &= (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})^2, \text{即} \\ \overrightarrow{OA}^2 + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}^2 &= \overrightarrow{OA}^2 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}^2, \text{整理得} \\ \therefore x_1x_2 + y_1y_2 &= 0. \quad \text{①} \quad \text{……3分} \end{aligned}$$

以 AB 为直径的圆的方程是

$$\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2],$$

$$\text{展开, 并将①代入得 } x^2 + y^2 = (x_1 + x_2)x - (y_1 + y_2)y = 0.$$

所以线段 AB 是圆 C 的直径……………6分

(II) 解法一: 设圆 C 的圆心为 $C(x, y)$, 则

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \\ y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore y_1^2 &= 2px_1, y_2^2 = 2px_2 (p > 0), \\ \therefore x_1x_2 &= \frac{y_1^2 y_2^2}{4p^2}, \\ \text{又 } \therefore x_1x_2 + y_1y_2 &= 0, \\ \therefore x_1x_2 &= -y_1y_2, \end{aligned}$$

$$\therefore -y_1 y_2 = \frac{y_1^2 y_2^2}{4p^2} \quad \because x_1 x_2 \neq 0, \quad \therefore y_1 y_2 = -4p^2.$$

$$\begin{aligned} \therefore y &= \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{4p}(y_1^2 \neq y_2^2) \\ &= \frac{1}{4p}(y_1^2 + y_2^2 + 2y_1 y_2) - \frac{y_1 y_2}{2p} = \frac{1}{p}(y^2 + 2p^2), \end{aligned}$$

所以圆心的轨迹方程为: $y^2 = px - 2p^2$11分

设圆心 C 到直线 $x - 2y = 0$ 的距离为 d , 则

$$d = \frac{|x - 2y|}{\sqrt{5}} = \frac{|\frac{1}{p}(y^2 + 2p^2 - 2y)|}{\sqrt{5}} = \frac{|(y - p)^2 + p^2|}{\sqrt{5}p}$$

当 $y = p$ 时, d 有最小值 $\frac{p}{\sqrt{5}}$, 由题设得 $\frac{p}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\therefore p = 2$14分

解法二: 设圆 C 的圆心为 $C(x, y)$, 则

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \\ y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \end{cases}$$

$$\because y_1^2 = 2px_1, y_2^2 = 2px_2 (p > 0),$$

$$\therefore x_1 x_2 = \frac{y_1^2 y_2^2}{4p^2},$$

$$\text{又 } \because x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0,$$

$$\therefore x_1 x_2 = -y_1 y_2,$$

$$\because x_1 x_2 \neq 0, \quad \therefore y_1 y_2 = -4p^2. \quad \dots\dots\dots 9 \text{分}$$

$$\begin{aligned} \therefore x &= \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{4p}(y_1^2 \neq y_2^2) \\ &= \frac{1}{4p}(y_1^2 + y_2^2 + 2y_1 y_2) - \frac{y_1 y_2}{2p} = \frac{1}{p}(y^2 + 2p^2), \end{aligned}$$

所以圆心的轨迹方程为: $y^2 = px - 2p^2$11分

设直线 $x - 2y + 2 = 0$ 与 $x - 2y = 0$ 的距离为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 则

$$m = \pm 2.$$

因为 $x - 2y + 2 = 0$ 与 $y^2 = px - 2p^2$ 的公共点.

所以当 $x - 2y + 2 = 0$ 与 $y^2 = px - 2p^2$ 仅有一个公共点时,

该点到 $x - 2y = 0$ 的距离最小, 最小值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

$$\therefore \begin{cases} x - 2y - 2 = 0, & \text{②} \\ y^2 = px - 2p^2. & \text{③} \end{cases}$$

将②代入③得

$$y^2 - 2py + 2p^2 - 2p = 0, \text{有}$$

$$\Delta = 4p^2 - 4(2p^2 - 2p) = 0.$$

$$\therefore p > 0, \quad \therefore p = 2. \quad \dots\dots\dots 14 \text{分}$$

解法三: 设圆 C 的圆心为 $C(x, y)$, 则

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \\ y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \end{cases}$$

若圆心 C 到直线 $x - 2y = 0$ 的距离为 d , 那

$$d = \frac{|\frac{x_1 + x_2}{2} - (y_1 + y_2)|}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore y_1^2 = 2px_1, y_2^2 = 2px_2 (p > 0)$$

$$\therefore x_1x_2 = \frac{y_1^2y_2^2}{4p^2} \quad \text{又} \because x_1x_2 + y_1y_2 \neq 0, \quad x_1x_2 = -y_1y_2,$$

$$\therefore x_1x_2 \neq 0, \therefore y_1y_2 = -4p^2. \dots\dots\dots 9 \text{分}$$

$$\therefore y = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{4p}(y_1^2 \neq y_2^2)$$

$$= \frac{1}{4p}(y_1^2 + y_2^2 + 2y_1y_2) - \frac{y_1y_2}{2p} = \frac{1}{p}(y^2 + 2p^2),$$

$$\begin{aligned}
\therefore d &= \frac{|\frac{1}{4p^2}(y_1^2 + y_2^2) - 4p(y_1 + y_2)|}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{|y_1^2 + y_2^2 + 2y_1y_2 - 4p(y_1 + y_2) + 8p^2|}{4\sqrt{5}p} \\
&= \frac{(y_1 + y_2 - 2p)^2 + 4p^2}{4\sqrt{5}p}.
\end{aligned}$$

当 $y_1 + y_2 = 2p$ 时, d 有最小值 $\frac{p}{\sqrt{5}}$, 由题设得 $\frac{p}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\therefore p = 2$. ……14 分