

绝密★启用前

2016年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）

数学试卷（理工农医类）

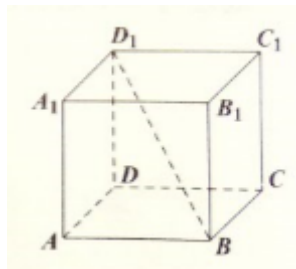
（满分150分，考试时间120分钟）

考生注意

1. 本场考试时间120分钟，试卷共4页，满分150分，答题纸共2页。
2. 作答前，在答题纸正面填写姓名、准考证号，反面填写姓名，将核对后的条形码贴在答题纸指定位置。
3. 所有作答务必填涂或书写在答题纸上与试卷题号对应的区域，不得错位。在试卷上作答一律不得分。
4. 用2B铅笔作答选择题，用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答非选择题。

一、填空题（本大题共有14题，满分56分）考生应在答题纸相应编号的空格内直接填写结果，每个空格填对得4分，否则一律得零分。

1. 设 $x \in R$, 则不等式 $|x-3| < 1$ 的解集为_____.
2. 设 $z = \frac{3+2i}{i}$, 其中 i 为虚数单位, 则 $\operatorname{Im} z =$ _____.
3. 已知平行直线 $l_1: 2x+y-1=0, l_2: 2x+y+1=0$, 则 l_1 与 l_2 的距离是_____.
4. 某次体检, 6位同学的身高(单位: 米)分别为1.72, 1.78, 1.75, 1.80, 1.69, 1.77, 则这组数据的中位数是_____ (米).
5. 已知点 $(3,9)$ 在函数 $f(x) = 1+a^x$ 的图像上, 则 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x) =$ _____.
6. 如图, 在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 的边长为3, BD_1 与底面所成的角的大小为 $\arctan \frac{2}{3}$, 则该正四棱柱的高等于_____.



7. 方程 $3\sin x = 1 + \cos 2x$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的解为_____.

8. 在 $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x}\right)^n$ 的二项展开式中, 所有项的二项式系数之和为256, 则常数项等于_____.

9. 已知 $\triangle ABC$ 的三边长分别为3,5,7, 则该三角形的外接圆半径等于_____.

10. 设 $a > 0, b > 0$. 若关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + by = 1 \end{cases}$, 无解, 则 $a + b$ 的取值范围是_____.

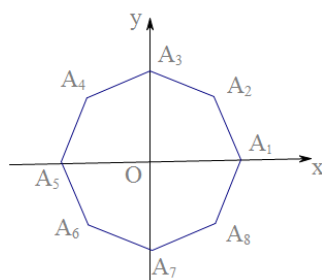
11. 无穷数列 $\{a_n\}$ 由 k 个不同的数组成, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \in \{2, 3\}$, 则 k 的最大值为_____.

12. 在平面直角坐标系中, 已知 $A(1, 0)$, $B(0, -$

$1)$, P 是曲线 $y = \sqrt{1-x^2}$ 上一个动点, 则 $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BA}$ 的取值范围是_____.

13. 设 $a, b \in \mathbb{R}, c \in [0, 2\pi)$. 若对任意实数 x 都有 $2\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = a\sin(bx + c)$, 则满足条件的有序实数组 (a, b, c) 的组数为_____.

14. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, O 为正八边形 $A_1A_2 \cdots A_8$ 的中心, $A_1(1, 0)$. 任取不同的两点 A_i, A_j , 点 P 满足 $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OA_j} = \vec{0}$, 则点 P 落在第一象限的概率是_____.

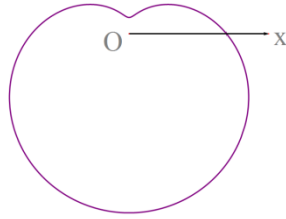


二、**选择题** (本大题共有4题, 满分20分) 每题有且只有一个正确答案, 考生应在答题纸的相应编号上, 将代表答案的小方格涂黑, 选对得五分, 否则一律得零分.

15. 设 $a \in \mathbb{R}$, 则“ $a > 1$ ”是“ $a^2 > 1$ ”的 ().

- (A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件
(C) 充要条件 (D) 既非充分也非必要条件

16. 下列极坐标方程中, 对应的曲线为如图的是 ().



- (A) $\rho = 6 + 5\cos\theta$ (B) $\rho = 6 + 5\sin\theta$
 (C) $\rho = 6 - 5\cos\theta$ (D) $\rho = 6 - 5\sin\theta$

17. 已知无穷等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，前 n 项和为 S_n ，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. 下列条件中，使得

$2S_n < S (n \in \mathbb{N}^*)$ 恒成立的是 ().

- (A) $a_1 > 0, 0.6 < q < 0.7$ (B) $a_1 < 0, -0.7 < q < -0.6$
 (C) $a_1 > 0, 0.7 < q < 0.8$ (D) $a_1 < 0, -0.8 < q < -0.7$

18. 设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $h(x)$ 是定义域为 \mathbb{R} 的三个函数，对于命题：①若 $f(x) + g(x)$ 、 $f(x) + h(x)$ 、 $g(x) + h(x)$ 均是增函数，则 $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $h(x)$ 中至少有一个增函数；②若 $f(x) + g(x)$ 、 $f(x) + h(x)$ 、 $g(x) + h(x)$ 均是以 T 为周期的函数，则 $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $h(x)$ 均是以 T 为周期的函数，下列判断正确的是 ().

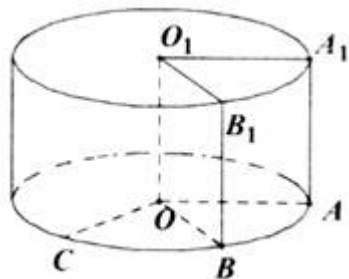
- (A) ①和②均为真命题 (B) ①和②均为假命题
 (C) ①为真命题，②为假命题 (D) ①为假命题，②为真命题

三、解答题 (本大题共有5题，满分74分) 解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域内写出必要的步骤.

19.

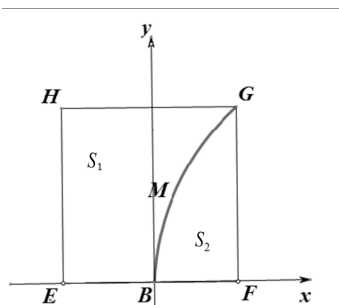
(本题满分12分) 本题共有2个小题，第一小题满分6分，第二小题满分6分. 将边长为1的正方形 AA_1O_1O (及其内部) 绕的 OO_1 旋转一周形成圆柱，如图， \widehat{AC} 长为 $\frac{2}{3}\pi$ ， $\widehat{A_1B_1}$ 长为 $\frac{\pi}{3}$ ，其中 B_1 与 C 在平面 AA_1O_1O 的同侧.

- (1) 求三棱锥 $C - O_1A_1B_1$ 的体积；
 (2) 求异面直线 B_1C 与 AA_1 所成的角的大小.



20. (本题满分14) 本题共有2个小题, 第1小题满分6分, 第2小题满分8分.

有一块正方形菜地 $EFGH$, EH 所在直线是一条小河. 收获的蔬菜可送到 F 点或河边运走. 于是, 菜地分为两个区域 S_1 和 S_2 , 其中 S_1 中的蔬菜运到河边较近, S_2 中的蔬菜运到 F 点较近, 而菜地内 S_1 和 S_2 的分界线 C 上的点到河边与到 F 点的距离相等, 现建立平面直角坐标系, 其中原点 O 为 EF 的中点, 点 F 的坐标为 $(1,0)$, 如图.



(1) 求菜地内的分界线 C 的方程;

(2) 菜农从蔬菜运量估计出 S_1 面积是 S_2 面积的两倍, 由此得到 S_1 面积的“经验值”为 $\frac{8}{3}$. 设

M 是 C 上纵坐标为1的点, 请计算以 EH 为一边、另有一边过点 M 的矩形的面积, 及五边形 $EOMGH$ 的面积, 并判断哪一个更接近于 S_1 面积的经验值.

21. (本题满分14分) 本题共有2个小题, 第1小题满分6分, 第2小题满分8分.

双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 直线 l 过 F_2 且与双曲线交于

A, B 两点.

(1) 若 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{2}$, ΔF_1AB 是等边三角形, 求双曲线的渐近线方程;

(2) 设 $b = \sqrt{3}$, 若 l 的斜率存在, 且 $(\overrightarrow{F_1A} + \overrightarrow{F_1B}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, 求 l 的斜率.

22. (本题满分16分) 本题共有3个小题, 第1小题满分4分, 第2小题满分6分, 第3小题满分6分.

已知 $a \in R$, 函数 $f(x) = \log_2\left(\frac{1}{x} + a\right)$.

(1) 当 $a = 5$ 时, 解不等式 $f(x) > 0$;

(2) 若关于 x 的方程 $f(x) - \log_2[(a-4)x + 2a - 5] = 0$ 的解集中恰好有一个元素, 求 a 的取值范围;

(3) 设 $a > 0$, 若对任意 $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, 函数 $f(x)$ 在区间 $[t, t+1]$ 上的最大值与最小值的差不超过1, 求 a 的取值范围.

23. (本题满分18分) 本题共有3个小题, 第1小题满分4分, 第2小题满分6分, 第3小题满分8分.

若无穷数列 $\{a_n\}$ 满足: 只要 $a_p = a_q (p, q \in \mathbb{N}^*)$, 必有 $a_{p+1} = a_{q+1}$, 则称 $\{a_n\}$ 具有性质 P .

(1) 若 $\{a_n\}$ 具有性质 P , 且 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_4 = 3, a_5 = 2, a_6 + a_7 + a_8 = 21$, 求 a_3 ;

(2) 若无穷数列 $\{b_n\}$ 是等差数列, 无穷数列 $\{c_n\}$ 是公比为正数的等比数列, $b_1 = c_5 = 1$, $b_5 = c_1 = 81$, $a_n = b_n + c_n$, 判断 $\{a_n\}$ 是否具有性质 P , 并说明理由;

(3) 设 $\{b_n\}$ 是无穷数列, 已知 $a_{n+1} = b_n + \sin a_n (n \in \mathbb{N}^*)$. 求证: “对任意 $a_1, \{a_n\}$ 都具有性质 P ”的充要条件为“ $\{b_n\}$ 是常数列”.

