

2008年普通高等学校招生全国统一考试（湖南卷）

文科数学能力测试

一. 选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 $U = \{2,3,4,5,6,7\}$, $M = \{3,4,5,7\}$, $N = \{2,4,5,6\}$, 则()

- A. $M \cap N = \{4,6\}$ B. $M \cup N = U$
 C. $(C_U N) \cup M = U$ D. $(C_U M) \cap N = N$

2. “ $|x-1| < 2$ ” 是 “ $x < 3$ ” 的()

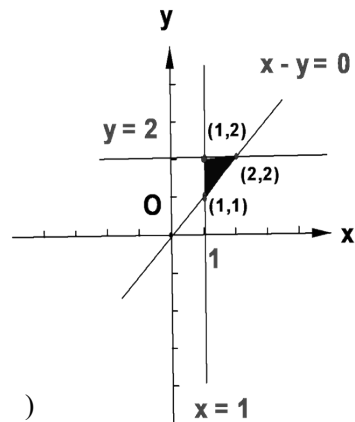
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

3. 已知变量 x, y 满足 $\begin{cases} x \geq 1, \\ y \leq 2, \\ x - y \leq 0, \end{cases}$ 则 $x + y$ 的最小值是()

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

4. 函数 $f(x) = x^2 (x \leq 0)$ 的反函数是()

- A. $f^{-1}(x) = \sqrt{x} (x \geq 0)$ B. $f^{-1}(x) = -\sqrt{x} (x \geq 0)$
 C. $f^{-1}(x) = -\sqrt{-x} (x \leq 0)$ D. $f^{-1}(x) = -x^2 (x \leq 0)$



5. 已知直线 m, n 和平面 α, β 满足 $m \perp n, m \perp \alpha, \alpha \perp \beta$, 则()

- A. $n \perp \beta$ B. $n // \beta$, 或 $n \subset \beta$ C. $n \perp \alpha$ D. $n // \alpha$, 或 $n \subset \alpha$

6. 下面不等式成立的是()

- A. $\log_3 2 < \log_2 3 < \log_2 5$ B. $\log_3 2 < \log_2 5 < \log_2 3$
 C. $\log_2 3 < \log_3 2 < \log_2 5$ D. $\log_2 3 < \log_2 5 < \log_3 2$

7. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=3, AC=2, BC=\sqrt{10}$, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = ()$

- A. $-\frac{3}{2}$ B. $-\frac{2}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{2}$

8. 某市拟从4个重点项目和6个一般项目中各选2个项目作为本年度启动的项目,

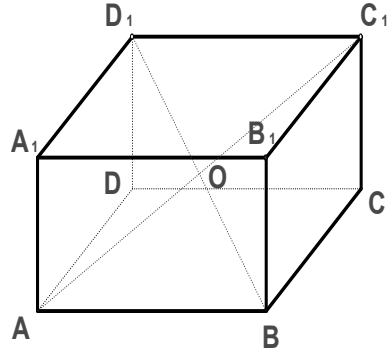
则重点项目A和一般项目B至少有一个被选中的不同选法种数是()

- A. 15 B. 45 C. 60 D. 75

9. 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的8个顶点在同一个球面上, 且 $AB=2$, $AD=\sqrt{3}$,

$AA_1=1$, 则顶点A、B间的球面距离是()

- A. $\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$ B. $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$ C. $\sqrt{2}\pi$ D. $2\sqrt{2}\pi$



10. 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右支上存在一点, 它到右焦点及左准线的距离

相等, 则双曲线离心率的取值范围是()

- A. $(1, \sqrt{2}]$ B. $[\sqrt{2}, +\infty)$ C. $(1, \sqrt{2} + 1]$ D. $[\sqrt{2} + 1, +\infty)$

二. 填空题: 本大题共5小题, 每小题5分, 共25分, 把答案填在横线上。

11. 已知向量 $\vec{a} = (1, \sqrt{3})$, $\vec{b} = (-2, 0)$, 则 $|\vec{a} + \vec{b}| =$ _____.

12. 从某地区15000位老人中随机抽取500人, 其生活能否自理的情况如下表所示:

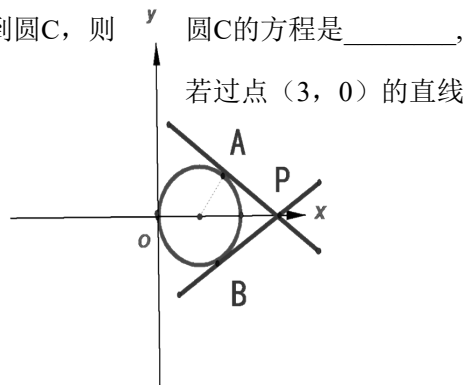
人数 \ 性别		男	女
		生活能否自理	
能		178	278
不能		23	21

则该地区生活不能自理的老人中男性比女性约多 _____ 人。

13. 记 $(2x + \frac{1}{x})^n$ 的展开式中第m项的系数为 b_m , 若 $b_3 = 2b_4$, 则 $n =$ _____.

14. 将圆 $x^2 + y^2 = 1$ 沿x轴正向平移1个单位后得到圆C, 则 圆C的方程是 _____,

若过点 (3, 0) 的直线 l 和圆C相切, 则直线 l 的斜率为 _____.



15. 设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, (如 $[2] = 2, \left[\frac{5}{4}\right] = 1$)。对于给定的 $n \in N^+$,

$$\text{定义 } C_n^x = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-[x]+1)}{x(x-1)\cdots(x-[x]+1)}, x \in [1, +\infty), \text{ 则 } C_8^{\frac{3}{2}} = \underline{\hspace{2cm}};$$

当 $x \in [2, 3)$ 时, 函数 C_8^x 的值域是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

三. 解答题: 本大题共6小题, 共75分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

16. (本小题满分12分)

甲乙丙三人参加一家公司的招聘面试, 面试合格者可正式签约。甲表示只要面试合格就签约, 乙、丙则约定: 两人面试都合格就一同签约, 否则两人都不签约。设每人面试合格的概率都是 $\frac{1}{2}$, 且面试是否合格互不影响。求:

- (I) 至少一人面试合格的概率;
- (II) 没有人签约的概率。

17. (本小题满分12分)

$$\text{已知函数 } f(x) = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} + \sin x.$$

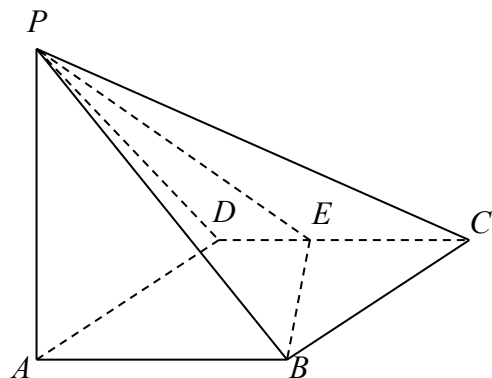
- (I) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;
- (II) 当 $x_0 \in (0, \frac{\pi}{4})$ 且 $f(x_0) = \frac{4\sqrt{2}}{5}$ 时, 求 $f(x_0 + \frac{\pi}{6})$ 的值。

18. (本小题满分12分)

如图所示, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为1的菱形, $\angle BCD = 60^\circ$, E是

CD的中点, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $PA = \sqrt{3}$ 。

- (I) 证明: 平面 $PBE \perp$ 平面 PAB ;
- (II) 求二面角 $A-BE-P$ 的大小。



19 (本小题满分13分)

已知椭圆的中心在原点，一个焦点是 $F(2,0)$ ，且两条准线间的距离为 $\lambda(\lambda > 4)$ 。

(I) 求椭圆的方程；

(II) 若存在过点 $A(1, 0)$ 的直线 l ，使点 F 关于直线 l 的对称点在椭圆上，求 λ 的取值范围。

20. (本小题满分13分)

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 0, a_2 = 2, a_{n+2} = (1 + \cos^2 \frac{n\pi}{2})a_n + 4 \sin^2 \frac{n\pi}{2}, n = 1, 2, 3, \dots$,

(I) 求 a_3, a_4 ，并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(II) 设 $S_k = a_1 + a_3 + \dots + a_{2k-1}, T_k = a_2 + a_4 + \dots + a_{2k}, W_k = \frac{2S_k}{2 + T_k} (k \in N^+)$,

求使 $W_k > 1$ 的所有 k 的值，并说明理由。

21. (本小题满分13分)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 - \frac{9}{2}x^2 + cx$ 有三个极值点。

(I) 证明： $-27 < c < 5$ ；

(II) 若存在实数 c ，使函数 $f(x)$ 在区间 $[a, a+2]$ 上单调递减，求 a 的取值范围。