2015 年普通高等学校招生统一考试【湖北】

理科数学

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. i 为虚数单位，i^{607} 的共轭复数为（　　）

A. i　　B. $-i$　　C. 1　　D. -1

【答案】A

【解析】$i^{607}=i^{4\times151}\cdot i^{3}=-i$，所以 i^{607} 的共轭复数为 i，选 A．

【考点定位】共轭复数.

【名师点睛】复数中，i 是虚数单位，$i^2=-1$；$i^{4n+1}=i$，$i^{4n+2}=-1$，$i^{4n+3}=-i$，$i^{4n}=1(n\in\mathbf{Z})$.

2. 我国古代数学名著《九章算术》有“米谷粒分”题：粮仓开仓收粮，有人送来米 1534 石，验得米内夹谷，抽样取米一把，数得 254 内夹谷 28 粒，则这批米内夹谷约为（　　）

A. 134 石　　B. 169 石　　C. 338 石　　D. 1365 石

【答案】B

【解析】依题意，这批米内夹谷约为 $\dfrac{28}{254}\times1534=169$ 石，选 B.

【考点定位】用样本估计总体.

【名师点睛】《九章算术》是中国古代第一部数学专著，是算经十书中最重要的一种. 该书内容十分丰富，系统总结了战国、秦、汉时期的数学成就. 本题“米谷粒分”是我们统计中的用样本估计总体问题.

3. 已知 $(1+x)^n$ 的展开式中第 4 项与第 8 项的二项式系数相等，则奇数项的二项式系数和为（　　）

A. 2^{12}　　B. 2^{11}　　C. 2^{10}　　D. 2^{9}

【答案】D

【解析】因为 $(1+x)^n$ 的展开式中第 4 项与第 8 项的二项式系数相等，所以 $C_n^3=C_n^7$，解得 $n=10$，所以二项式 $(1+x)^{10}$ 中奇数项的二项式系数和为 $\dfrac{1}{2}\times2^{10}=2^9$.

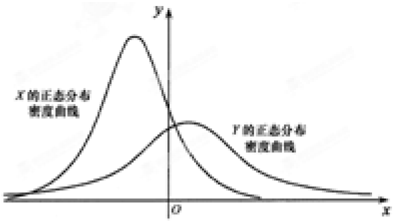
【考点定位】二项式系数，二项式系数和.

【名师点睛】二项式定理中应注意区别二项式系数与展开式系数，各二项式系数和：$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$，奇数项的二项式系数和与偶数项的二项式系数和相等 $C_n^0+C_n^2++C_n^4+\cdots=C_n^1+C_n^3++C_n^5+\cdots=2^{n-1}$.

4. 设 $X\sim N(\mu_1,\ \sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\ \sigma_2^2)$，这两个正态分布密度曲线如图所示．下列结论中正确的是（　　）

A．$P(Y\ge\mu_2)\ge P(Y\ge\mu_1)$　　　　B．$P(X\le\sigma_2)\le P(X\le\sigma_1)$

C．对任意正数 t，$P(X\le t)\ge P(Y\le t)$　　　　D．对任意正数 t，$P(X\ge t)\ge P(Y\ge t)$



【答案】C

【解析】由正态密度曲线的性质可知，$X-N(\mu_1,\ \sigma_1^2)$、$Y-N(\mu_2,\ \sigma_2^2)$ 的密度曲线分别关于 $x=\mu_1$、$x=\mu_2$ 对称，因此结合所给图象可得 $\mu_1<\mu_2$ 且 $X-N(\mu_1,\ \sigma_1^2)$ 的密度曲线较 $Y-N(\mu_2,\ \sigma_2^2)$ 的密度曲线“瘦高”，所以 $0<\sigma_1<\sigma_2$，所以对任意正数 t，$P(X\le t)\ge P(Y\le t)$．

【考点定位】正态分布密度曲线.

【名师点睛】正态曲线的性质

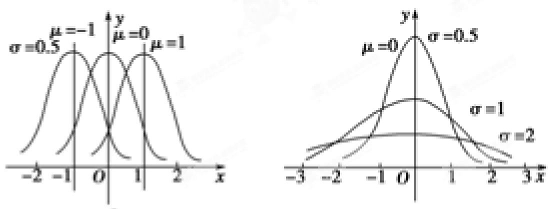
①曲线在 x 轴的上方，与 x 轴不相交.

②曲线是单峰的，它关于直线 $x=\mu$ 对称.

③曲线在 $x=\mu$ 处达到峰值 $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

④曲线与 x 轴之间的面积为 1.

⑤当 σ 一定时，曲线随着 μ 的变化而沿 x 轴平移，如图甲所示



甲　　　　乙

⑥μ 一定时，曲线的形状由 σ 确定．σ 越大，曲线越“矮胖”，总体分布越分散；σ 越小．曲线越“瘦高”．总体分布越集中．如图乙所示.

5．设 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}$，$n\ge3$．若 p：$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 成等比数列；

q：$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{n-1}^2)(a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2)=(a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{n-1}a_n)^2$，则（　　）

A．p 是 q 的充分条件，但不是 q 的必要条件

B．p 是 q 的必要条件，但不是 q 的充分条件

C．p 是 q 的充分必要条件

曹亚辉高中物理 www.zhidianwuli.com 支点物理

D．p既不是q的充分条件，也不是q的必要条件

【答案】A

【解析】对命题p：$a_1,a_2,\cdots,a_n$成等比数列，则公比$q=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}(n\geq 3)$且$a_n\neq 0$；学科网

对命题q，①当$a_n=0$时，$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{n-1}^2)(a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2)=(a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{n-1}a_n)^2$成立；

②当$a_n\neq 0$时，根据柯西不等式，等式$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{n-1}^2)(a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2)=(a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{n-1}a_n)^2$成立，

则$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{a_2}{a_3}=\cdots=\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$，所以$a_1,a_2,\cdots,a_n$成等比数列，所以$p$是$q$的充分条件，但不是$q$的必要条件.

【考点定位】等比数列的判定，柯西不等式，充分条件与必要条件.

【名师点睛】判断p是q的什么条件，需要从两方面分析：一是由条件p能否推得条件q，二是由条件q能否推得条件p.对于带有否定性的命题或比较难判断的命题，除借助集合思想把抽象、复杂问题形象化、直观化外，还可利用原命题和逆否命题、逆命题和否命题的等价性，转化为判断它的等价命题.

6. 已知符号函数$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$ $f(x)$是$\mathbf{R}$上的增函数，$g(x)=f(x)-f(ax)\ (a>1)$，则（　　）

A．$\operatorname{sgn}[g(x)]=\operatorname{sgn}x$　　　　B．$\operatorname{sgn}[g(x)]=-\operatorname{sgn}x$

C．$\operatorname{sgn}[g(x)]=\operatorname{sgn}[f(x)]$　　　　D．$\operatorname{sgn}[g(x)]=-\operatorname{sgn}[f(x)]$

【答案】B

【解析】因为$f(x)$是$\mathbf{R}$上的增函数，令$f(x)=x$，所以$g(x)=(1-a)x$，因为$a>1$，所以$g(x)$是$\mathbf{R}$上的减函数，由符号函数$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$知，$\operatorname{sgn}[g(x)]=\begin{cases}-1, x>0\\ 0, x=0\\ 1, x<0\end{cases}=-\operatorname{sgn}x$.

【名师点睛】构造法数求解高中数学问题常用方法，在选择题、填空题及解答题中都用到，特别是求解在选择题、填空题构造恰当的函数，根据已知能快捷的得到答案.

7．在区间$[0,\ 1]$上随机取两个数x,y，记p_1为事件“$x+y\geq\dfrac{1}{2}$”的概率，p_2为事件“$|x-y|\leq\dfrac{1}{2}$”的概率，p_3为事件“$xy\leq\dfrac{1}{2}$”的概率，则（　　）

A．$p_1<p_2<p_3$　　　　B．$p_2<p_3<p_1$

C．$p_3<p_1<p_2$　　　　D．$p_3<p_2<p_1$

【答案】B

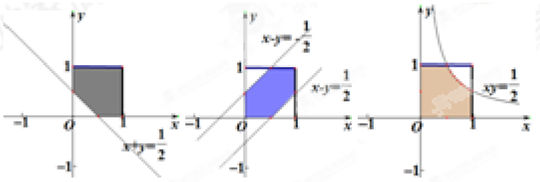
【解析】因为 $x,y\in[0,1]$，对事件“$x+y\geq\frac{1}{2}$”，如图（1）阴影部分 S_1，

对事件“$|x-y|\leq\frac{1}{2}$”，如图（2）阴影部分 S_2，

对为事件“$xy\leq\frac{1}{2}$”，如图（3）阴影部分 S_3，学科网

由图知，阴影部分的面积从下到大依次是 $S_2<S_3<S_1$，正方形的面积为 $1\times1=1$，

根据几何概型公式可得 $p_2<p_3<p_1$．



（1）　　　　（2）　　　　（3）

【考点定位】几何概型.

【名师点睛】对于几何概型的概率公式中的“测度”要有正确的认识，它只与大小有关，而与形状和位置无关，在解题时，要掌握“测度”为长度、面积、体积、角度等常见的几何概型的求解方法.

8．将离心率为 e_1 的双曲线 C_1 的实半轴长 a 和虚半轴长 b $(a\neq b)$ 同时增加 m $(m>0)$ 个单位长度，得到离心率为 e_2 的双曲线 C_2，则（　　）

A．对任意的 a,b，$e_1>e_2$

B．当 $a>b$ 时，$e_1>e_2$；当 $a<b$ 时，$e_1<e_2$

C．对任意的 a,b，$e_1<e_2$

D．当 $a>b$ 时，$e_1<e_2$；当 $a<b$ 时，$e_1>e_2$

【答案】D

【解析】依题意，$e_1=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2}$，$e_2=\frac{\sqrt{(a+m)^2+(b+m)^2}}{a+m}=\sqrt{1+(\frac{b+m}{a+m})^2}$，

因为 $\frac{b}{a}-\frac{b+m}{a+m}=\frac{ab+bm-ab-am}{a(a+m)}=\frac{m(b-a)}{a(a+m)}$，由于 $m>0$，$a>0$，$b>0$，

所以当 $a>b$ 时，$0<\frac{b}{a}<1$，$0<\frac{b+m}{a+m}<1$，$\frac{b}{a}<\frac{b+m}{a+m}$，$(\frac{b}{a})^2<(\frac{b+m}{a+m})^2$，所以 $e_1<e_2$；

当 $a<b$ 时，$\frac{b}{a}>1$，$\frac{b+m}{a+m}>1$，而 $\frac{b}{a}>\frac{b+m}{a+m}$，所以 $(\frac{b}{a})^2>(\frac{b+m}{a+m})^2$，所以 $e_1>e_2$.

所以当 $a>b$ 时，$e_1<e_2$；当 $a<b$ 时，$e_1>e_2$.

【考点定位】双曲线的性质，离心率.

【名师点睛】分类讨论思想是一种重要的数学思想方法．分类讨论的时应做到：分类不重不漏；标准要统一，层次要分明；能不分类的要尽量避免或尽量推迟，决不无原则地讨论.

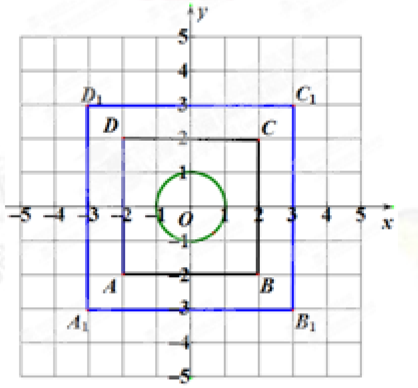
9．已知集合 $A=\{(x,y)\big|x^2+y^2\leq1,\ x,y\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{(x,y)\big||x|\leq2,|y|\leq2,\ x,y\in\mathbf{Z}\}$，定义集合

$A\oplus B=\{(x_1+x_2,y_1+y_2)|(x_1,y_1)\in A,\ (x_2,y_2)\in B\}$，则 $A\oplus B$ 中元素的个数为（　　）

A. 77　　　　B. 49　　　　C. 45　　　　D. 30

【答案】C

【解析】因为集合 $A=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1, x,y\in \mathbf{Z}\}$，所以集合 A 中有 9 个元素（即 9 个点），即图中圆中的整点，集合 $B=\{(x,y)||x|\le 2, |y|\le 2, x,y\in \mathbf{Z}\}$ 中有 25 个元素（即 25 个点）：即图中正方形 $ABCD$ 中的整点，集合 $A\oplus B=\{(x_1+x_2,y_1+y_2)|(x_1,y_1)\in A,\ (x_2,y_2)\in B\}$ 的元素可看作正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 中的整点（除去四个顶点），即 $7\times 7-4=45$ 个.



【考点定位】1. 集合的相关知识，2. 新定义题型.

【名师点睛】新定义题型的特点是：通过给出一个新概念，或约定一种新运算，或给出几个新模型来创设全新的问题情景，要求考生在阅读理解的基础上，依据题目提供的信息，联系所学的知识和方法，实现信息的迁移，达到灵活解题的目的.

10. 设 $x\in \mathbf{R}$，$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 若存在实数 t，使得 $[t]=1$，$[t^2]=2$，…，$[t^n]=n$ 同时成立，则正整数 n 的最大值是（　　）

A. 3　　　　B. 4　　　　C. 5　　　　D. 6

【答案】B

【解析】因为 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 由 $[t]=1$ 得 $1\le t<2$，

由 $[t^2]=2$ 得 $2\le t^2<3$，

由 $[t^4]=3$ 得 $4\le t^4<5$，所以 $2\le t^2<\sqrt{5}$，

所以 $2\le t^2<\sqrt{5}$，

由 $[t^3]=3$ 得 $3\le t^3<4$，

所以 $6\le t^5<4\sqrt{5}$，

由$[t^5]=5$得$5\le t^5<6$，与$6\le t^5<4\sqrt{5}$矛盾，

故正整数n的最大值是 4.

【考点定位】函数的值域，不等式的性质.

【名师点睛】这类问题一般有两种：$[x]$表示不超过x的最大整数；$\{x\}$表示不小于x的最大整数. 应注意区别.

二、填空题：本大题共 6 小题，考生需作答 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．请将答案填在答题卡对应题号的位置上．答错位置，书写不清，模棱两可均不得分．

（一）必考题（11—14 题）

11. 已知向量$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AB}$，$|\overrightarrow{OA}|=3$，则$\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}=$______.

【答案】9

【解析】因为$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AB}$，$|\overrightarrow{OA}|=3$，

所以$\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\bullet(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})=|\overrightarrow{OA}|^2+\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}|^2=3^2=9$.学科网

【考点定位】 平面向量的加法法则，向量垂直，向量的模与数量积.

【名师点睛】平面向量是新教材新增内容，而且由于向量的双重“身份”是研究一些数学问题的工具.这类问题难度不大，以考查基础知识为主.

12. 函数$f(x)=4\cos^2\dfrac{x}{2}\cos(\dfrac{\pi}{2}-x)-2\sin x-|\ln(x+1)|$的零点个数为__________.

【答案】2

【解析】因为$f(x)=4\cos^2\dfrac{x}{2}\cos(\dfrac{\pi}{2}-x)-2\sin x-|\ln(x+1)|$

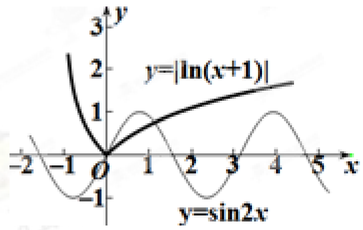
$$=2(1+\cos x)\sin x-2\sin x-|\ln(x+1)|$$

$$=\sin 2x-|\ln(x+1)|$$

所以函数$f(x)$的零点个数为函数$y=\sin 2x$与$y=|\ln(x+1)|$图象的交点的个数，

函数$y=\sin 2x$与$y=|\ln(x+1)|$图象如图，由图知，两函数图象有 2 个交点，

所以函数$f(x)$有 2 个零点.

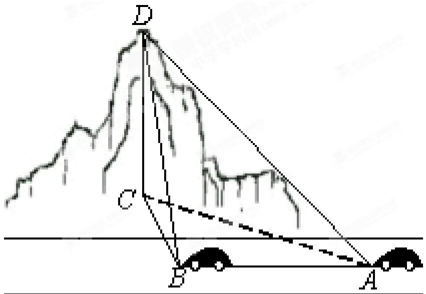


【考点定位】二倍角的正弦、余弦公式，诱导公式，函数的零点.

【名师点睛】数形结合思想方法是高考考查的重点. 已知函数的零点个数，一般利用数形结合转化为两个图象的交点个数，这时图形一定要准确。这种数形结合的方法能够帮助我们直观解题. 由“数”想图，借“图”解题.

13．如图，一辆汽车在一条水平的公路上向正西行驶，到 A 处时测得公路北侧一山顶 D 在西偏北 30° 的方向上，行驶 600m 后到达 B 处，测得此山顶在西偏北 75° 的方向上，仰角为 30°，则此山的高度 $CD=$

________ m.



【答案】$100\sqrt{6}$

【解析】依题意，$\angle BAC=30^\circ$，$\angle ABC=105^\circ$，在 ΔABC 中，由 $\angle ABC+\angle BAC+\angle ACB=180^\circ$，所以 $\angle ACB=45^\circ$，因为 $AB=600$，由正弦定理可得 $\dfrac{600}{\sin 45^\circ}=\dfrac{BC}{\sin 30^\circ}$，即 $BC=300\sqrt{2}$ m，在 $Rt\Delta BCD$ 中，因为 $\angle CBD=30^\circ$，$BC=300\sqrt{2}$，所以 $\tan 30^\circ=\dfrac{CD}{BC}=\dfrac{CD}{300\sqrt{2}}$，所以 $CD=100\sqrt{6}$ m.

【考点定位】三角形三内角和定理，三角函数的定义，有关测量中的的几个术语，正弦定理.

【名师点睛】本题是空间四面体问题，不能把四边形 $ABCD$ 看成平面上的四边形.

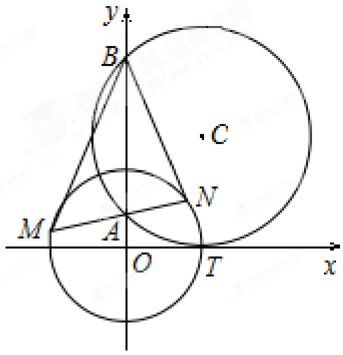
14．如图，圆 C 与 x 轴相切于点 $T(1,0)$，与 y 轴正半轴交于两点 A,B（B 在 A 的上方），且 $|AB|=2$.

（Ⅰ）圆 C 的标准方程为__________；

（Ⅱ）过点 A 任作一条直线与圆 $O:x^2+y^2=1$ 相交于 M,N 两点，下列三个结论：

① $\dfrac{|NA|}{|NB|}=\dfrac{|MA|}{|MB|}$； ② $\dfrac{|NB|}{|NA|}-\dfrac{|MA|}{|MB|}=2$； ③ $\dfrac{|NB|}{|NA|}+\dfrac{|MA|}{|MB|}=2\sqrt{2}$.

其中正确结论的序号是__________. （写出所有正确结论的序号）



【答案】（I）$(x-1)^2+(y-\sqrt{2})^2=2$；（II）①②③

【解析】（Ⅰ）依题意，设 $C(1,r)$（r 为圆的半径），因为 $|AB|=2$，所以 $r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，所以圆心 $C(1,\sqrt{2})$，故圆的标准方程为 $(x-1)^2+(y-\sqrt{2})^2=2$.

（Ⅱ）联立方程组 $\begin{cases} x=0 \\ (x-1)^2+(y-\sqrt{2})^2=2 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x=0 \\ y=\sqrt{2}-1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=0 \\ y=\sqrt{2}+1 \end{cases}$，因为 B 在 A 的上方，

所以 $A(0,\sqrt{2}-1)$，$B(0,\sqrt{2}+1)$，

令直线 MN 的方程为 $x=0$，此时 M $M(0,-1)$，$N(0,1)$，

所以 $|MA|=\sqrt{2}$，$|MB|=2+\sqrt{2}$，$|NA|=2-\sqrt{2}$，$|NB|=\sqrt{2}$

因为 $\frac{|NA|}{|NB|}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{|MA|}{|MB|}=\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$，所以 $\frac{|NA|}{|NB|}=\frac{|MA|}{|MB|}$.

所以 $\frac{|NB|}{|NA|}-\frac{|MA|}{|MB|}=\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2}=\sqrt{2}+1-(\sqrt{2}-1)=2$，

$\frac{|NB|}{|NA|}+\frac{|MA|}{|MB|}=\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2}=\sqrt{2}-1+\sqrt{2}+1=2\sqrt{2}$，

正确结论的序号是①②③.

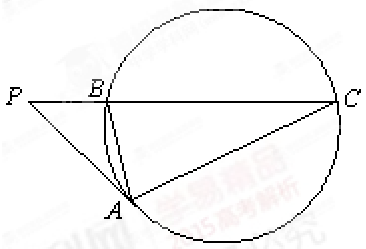
【考点定位】圆的标准方程，直线与圆的位置关系.

【名师点睛】用特例代替题设所给的一般性条件，得出特殊结论，然后对各个选项进行检验，从而做出正确的判断，这种方法叫做特殊法. 若结果为定值，则可采用此法. 特殊法是“小题小做”的重要策略. 常用的特例有特殊数值、特殊数列、特殊函数、特殊图形、特殊角、特殊位置等.

（二）选考题（请考生在第 15、16 两题中任选一题作答，请先在答题卡指定位置将你所选的题目序号后的方框用 2B 铅笔涂黑．如果全选，则按第 15 题作答结果计分．）

15．（选修 4-1：几何证明选讲）

如图，PA 是圆的切线，A 为切点，PBC 是圆的割线，且 $BC=3PB$，则 $\frac{AB}{AC}=$________.



第 15 题图

【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】因为 PA 是圆的切线，A 为切点，PBC 是圆的割线，

由切割线定理知，$PA^2=PB\cdot PC=PB(PB+BC)$，因为 $BC=3PB$，

所以 $PA^2=4PB^2$，即 $PA=2PB$，学科网

由 $\Delta PAB\backsim\Delta PCA$，所以 $\frac{AB}{AC}=\frac{PB}{PA}=\frac{1}{2}$.

【考点定位】圆的切线、割线，切割线定理，三角形相似.

【名师点睛】判定两个三角形相似要注意结合图形的性质特点灵活选择判定定理．在一个题目中，相似三角形的判定定理和性质定理可能多次用到.

16．（选修 4-4：坐标系与参数方程）

在直角坐标系 xoy 中，以 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系．已知直线 l 的极坐标方程为 $\rho(\sin\theta-3\cos\theta)=0$，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=t-\frac{1}{t}, \\ y=t+\frac{1}{t} \end{cases}$ （t 为参数），l 与 C 相交于 A，B 两点，则 $|AB|=$________.

【答案】$2\sqrt{5}$

【解析】因为 $\rho(\sin\theta-3\cos\theta)=0$，所以 $\rho\sin\theta-3\rho\cos\theta$，所以 $y-3x=0$，即 $y=3x$；

由 $\begin{cases} x=t-\frac{1}{t}, \\ y=t+\frac{1}{t} \end{cases}$ 消去 t 得 $y^2-x^2=4$．联立方程组 $\begin{cases} y=3x \\ y^2-x^2=4 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y=\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y=-\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}$，

即 $A(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2})$，$B(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{3\sqrt{2}}{2})$，

由两点间的距离公式得 $|AB|=\sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2})^2}=2\sqrt{5}$．

【考点定位】极坐标方程、参数方程与普通方程的转化，两点间的距离.

【名师点睛】化参数方程为普通方程时，未注意到普通方程与参数方程的等价性而出错.

三、解答题：本大题共 5 小题，共 65 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（本小题满分 11 分）

某同学用“五点法”画函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 在某一个周期内的图象时，列表并填入了部分数据，如下表：

$\omega x+\varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$	
$A\sin(\omega x+\varphi)$	0	5		-5	0

（Ⅰ）请将上表数据补充完整，填写在答题卡上相应位置，并直接写出函数 $f(x)$ 的解析式；

（Ⅱ）将 $y=f(x)$ 图象上所有点向左平行移动 θ $(\theta>0)$ 个单位长度，得到 $y=g(x)$ 的图象．若 $y=g(x)$ 图象的一个对称中心为 $(\frac{5\pi}{12},0)$，求 θ 的最小值.

【答案】（Ⅰ）$f(x)=5\sin(2x-\frac{\pi}{6})$；（Ⅱ）$\frac{\pi}{6}$.

【解析】（Ⅰ）根据表中已知数据，解得 $A=5,\omega=2,\varphi=-\frac{\pi}{6}$．数据补全如下表：

$\omega x+\varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{13}{12}\pi$
$A\sin(\omega x+\varphi)$	0	5	0	-5	0

且函数表达式为 $f(x)=5\sin(2x-\frac{\pi}{6})$．

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $f(x)=5\sin(2x-\frac{\pi}{6})$，得 $g(x)=5\sin(2x+2\theta-\frac{\pi}{6})$.

因为 $y=\sin x$ 的对称中心为 $(k\pi,0)$，$k\in\mathbf{Z}$.

令 $2x+2\theta-\frac{\pi}{6}=k\pi$，解得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}-\theta$，$k\in Z$.

由于函数 $y=g(x)$ 的图象关于点 $(\frac{5\pi}{12},0)$ 成中心对称，令 $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}-\theta=\frac{5\pi}{12}$，

解得 $\theta=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$. 由 $\theta>0$ 可知，当 $k=1$ 时，θ 取得最小值 $\frac{\pi}{6}$.

【考点定位】“五点法”画函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 在某一个周期内的图象，三角函数的平移变换，三角函数的性质.

【名师点睛】“五点法”描图：

(1) $y=\sin x$ 的图象在[0,2π]上的五个关键点的坐标为：(0,0)，$(\frac{\pi}{2},1)$，(π，0)，$(\frac{3\pi}{2},-1)$，(2π，0).

(2) $y=\cos x$ 的图象在[0,2π]上的五个关键点的坐标为：(0,1)，$(\frac{\pi}{2},0)$，(π，－1)，$(\frac{3\pi}{2},0)$，(2π，1).

18．（本小题满分 12 分）

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，前 n 项和为 S_n，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q. 已知 $b_1=a_1$，$b_2=2$，$q=d$，$S_{10}=100$.

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）当 $d>1$ 时，记 $c_n=\frac{a_n}{b_n}$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

【答案】（Ⅰ）$\begin{cases}a_n=2n-1,\\ b_n=2^{n-1}.\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_n=\frac{1}{9}(2n+79),\\ b_n=9\cdot(\frac{2}{9})^{n-1}.\end{cases}$；（Ⅱ）$6-\frac{2n+3}{2^{n-1}}$.

【解析】（Ⅰ）由题意有，$\begin{cases}10a_1+45d=100,\\ a_1d=2,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2a_1+9d=20,\\ a_1d=2,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a_1=1,\\ d=2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_1=9,\\ d=\frac{2}{9}.\end{cases}$ 故 $\begin{cases}a_n=2n-1,\\ b_n=2^{n-1}.\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_n=\frac{1}{9}(2n+79),\\ b_n=9\cdot(\frac{2}{9})^{n-1}.\end{cases}$

（Ⅱ）由 $d>1$，知 $a_n=2n-1$，$b_n=2^{n-1}$，故 $c_n=\frac{2n-1}{2^{n-1}}$，

于是 $T_n=1+\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}+\frac{7}{2^3}+\frac{9}{2^4}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n-1}}$，　①

$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{2^4}+\frac{9}{2^5}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$.　②

①-②可得 $\frac{1}{2}T_n=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}=3-\frac{2n+3}{2^n}$，

故 $T_n=6-\frac{2n+3}{2^{n-1}}$.

【考点定位】等差数列、等比数列通项公式，错位相减法求数列的前 n 项和.

【名师点睛】错位相减法适合于一个由等差数列 $\{a_n\}$ 及一个等比数列 $\{b_n\}$ 对应项之积组成的数列．考生在解决这类问题时，都知道利用错位相减法求解，也都能写出此题的解题过程，但由于步骤繁琐、计算量大导致了漏项或添项以及符号出错等．两边乘公比后，对应项的幂指数会发生变化，应将相同幂指数的项对齐，这样有一个式子前面空出一项，另外一个式子后面就会多了一项，两项相减，除第一项和最后一项外，剩下的 $n-1$ 项是一个等比数列.

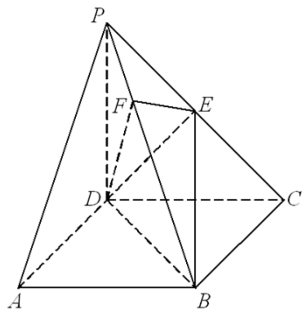
19．（本小题满分 12 分）

《九章算术》中，将底面为长方形且有一条侧棱与底面垂直的四棱锥称之为阳马，将四个面都为直角三角形的四面体称之为鳖臑.

如图，在阳马 $P-ABCD$ 中，侧棱 $PD\perp$ 底面 $ABCD$，且 $PD=CD$，过棱 PC 的中点 E，作 $EF\perp PB$ 交 PB 于点 F，连接 DE, DF, BD, BE.

（Ⅰ）证明：$PB\perp$ 平面DEF．试判断四面体 $DBEF$ 是否为鳖臑，若是，写出其每个面的直角（只需写出结论）；若不是，说明理由；

（Ⅱ）若面 DEF 与面 $ABCD$ 所成二面角的大小为 $\frac{\pi}{3}$，求 $\frac{DC}{BC}$ 的值.



【答案】（Ⅰ）详见解析；（Ⅱ）$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【解析】（解法 1）（Ⅰ）因为 $PD\perp$底面 $ABCD$，所以 $PD\perp BC$，

由底面 $ABCD$ 为长方形，有 $BC\perp CD$，而 $PD\cap CD=D$，

所以 $BC\perp$平面PCD．而 $DE\subset$平面PCD，所以 $BC\perp DE$．

又因为 $PD=CD$，点 E 是 PC 的中点，所以 $DE\perp PC$．

而 $PC\cap BC=C$，所以 $DE\perp$平面 PBC．而 $PB\subset$平面PBC，所以 $PB\perp DE$．

又 $PB\perp EF$，$DE\cap EF=E$，所以 $PB\perp$平面 DEF．

由 $DE\perp$平面 PBC，$PB\perp$平面 DEF，可知四面体 $BDEF$ 的四个面都是直角三角形，

即四面体 $BDEF$ 是一个鳖臑，其四个面的直角分别为 $\angle DEB$，$\angle DEF$，$\angle EFB$，$\angle DFB$．

（Ⅱ）如图 1，在面 PBC 内，延长 BC 与 FE 交于点 G，则 DG 是平面 DEF 与平面 $ABCD$

的交线．由（Ⅰ）知，$PB\perp$平面DEF，所以 $PB\perp DG$．学科网

又因为 $PD\perp$底面 $ABCD$，所以 $PD\perp DG$．而 $PD\cap PB=P$，所以 $DG\perp$平面PBD．

故 $\angle BDF$ 是面 DEF 与面 $ABCD$ 所成二面角的平面角，

设 $PD=DC=1$，$BC=\lambda$，有 $BD=\sqrt{1+\lambda^2}$，

在 Rt$\triangle PDB$ 中，由 $DF\perp PB$，得 $\angle DPF=\angle FDB=\frac{\pi}{3}$，

则 $\tan\frac{\pi}{3}=\tan\angle DPF=\frac{BD}{PD}=\sqrt{1+\lambda^2}=\sqrt{3}$，解得 $\lambda=\sqrt{2}$．

所以 $\frac{DC}{BC}=\frac{1}{\lambda}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故当面 DEF 与面 $ABCD$ 所成二面角的大小为 $\frac{\pi}{3}$ 时，$\frac{DC}{BC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$．

（解法 2）

（Ⅰ）如图 2，以 D 为原点，射线 DA,DC,DP 分别为 x,y,z 轴的正半轴，建立空间直角坐标系．

设 $PD=DC=1$，$BC=\lambda$，则 $D(0,0,0)$, $P(0,0,1)$, $B(\lambda,1,0)$, $C(0,1,0)$，$\overrightarrow{PB}=(\lambda,1,-1)$，点 E 是 PC 的中点，

所以 $E(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，$\overrightarrow{DE}=(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，

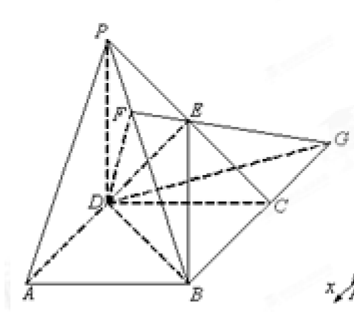
于是 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{DE}=0$，即 $PB\perp DE$．

又已知 $EF\perp PB$，而 $DE\cap EF=E$，所以 $PB\perp$平面DEF．

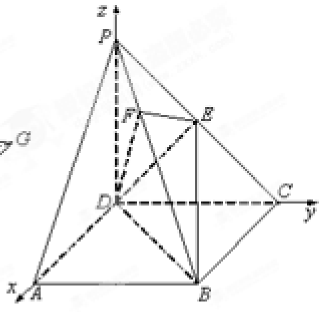
因 $\overrightarrow{PC}=(0,1,-1)$，$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{PC}=0$，则 $DE\perp PC$，所以 $DE\perp$平面PBC．

由 $DE\perp$平面 PBC，$PB\perp$平面 DEF，可知四面体 $BDEF$ 的四个面都是直角三角形，

即四面体 $BDEF$ 是一个鳖臑，其四个面的直角分别为 $\angle DEB$，$\angle DEF$，$\angle EFB$，$\angle DFB$．



第 19 题解答图 1



第 19 题解答图 2

（Ⅱ）由 $PD\perp$平面$ABCD$，所以 $\overrightarrow{DP}=(0,0,1)$是平面 $ABCD$ 的一个法向量；

由（Ⅰ）知，$PB\perp$平面DEF，所以 $\overrightarrow{BP}=(-\lambda,-1,1)$是平面 DEF 的一个法向量.

若面 DEF 与面 $ABCD$ 所成二面角的大小为 $\frac{\pi}{3}$，

则 $\cos\frac{\pi}{3}=\left|\frac{\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{DP}}{|\overrightarrow{BP}|\cdot|\overrightarrow{DP}|}\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+2}}\right|=\frac{1}{2}$，

解得 $\lambda=\sqrt{2}$. 所以 $\frac{DC}{BC}=\frac{1}{\lambda}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故当面 DEF 与面 $ABCD$ 所成二面角的大小为 $\frac{\pi}{3}$时，$\frac{DC}{BC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【考点定位】四棱锥的性质，线、面垂直的性质与判定，二面角.

【名师点睛】立体几何是高考的重点和热点内容，而求空间角是重中之重，利用空间向量求空间角的方法固定，思路简洁，但在利用平面的法向量求二面角大小时，两个向量夹角与二面角相等还是互补是这种解法的难点，也是学生的易错易误点．解题时正确判断法向量的方向，同指向二面角内或外则向量夹角与二面角互补，一个指向内另一个指向外则相等.

20．（本小题满分 12 分）

某厂用鲜牛奶在某台设备上生产 A,B 两种奶制品．生产 1 吨 A 产品需鲜牛奶 2 吨，使用设备 1 小时，获利 1000 元；生产 1 吨 B 产品需鲜牛奶 1.5 吨，使用设备 1.5 小时，获利 1200 元．要求每天 B 产品的产量不超过 A 产品产量的 2 倍，设备每天生产 A,B 两种产品时间之和不超过 12 小时．假定每天可获取的鲜牛奶数量 W（单位：吨）是一个随机变量，其分布列为

W	12	15	18
P	0.3	0.5	0.2

该厂每天根据获取的鲜牛奶数量安排生产，使其获利最大，因此每天的最大获利 Z（单位：元）是一个随机变量.

（Ⅰ）求 Z 的分布列和均值；

（Ⅱ） 若每天可获取的鲜牛奶数量相互独立，求 3 天中至少有 1 天的最大获利超过 10000 元的概率.

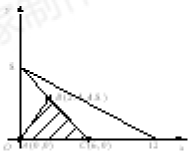
.【答案】（Ⅰ） Z 的分布列为：

Z	8160	10200	10800
P	0.3	0.5	0.2

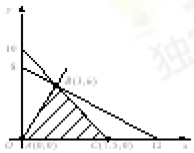
$E(Z)=9708$；（Ⅱ）0.973.

【解析】（Ⅰ）设每天 A,B 两种产品的生产数量分别为 x,y，相应的获利为 z，

则有 $\begin{cases}2x+1.5y\le W,\\ x+1.5y\le 12,\\ 2x-y\ge 0,\\ x\ge 0,\ \ y\ge 0.\end{cases}$ （1）



第 20 题解答



第 20 题解答

第 20 题解答

目标函数为 $z=1000x+1200y$.

当 $W=12$时，（1）表示的平面区域如图 1，三个顶点分别为 $A(0,\ 0),\ B(2.4,\ 4.8),\ C(6,\ 0)$.

将 $z=1000x+1200y$ 变形为 $y=-\frac{5}{6}x+\frac{z}{1200}$，学科网

当 $x=2.4,\ y=4.8$时，直线 l： $y=-\frac{5}{6}x+\frac{z}{1200}$ 在 y 轴上的截距最大，

最大获利 $Z=z_{max}=2.4\times1000+4.8\times1200=8160$.

当 $W=15$时，（1）表示的平面区域如图 2，三个顶点分别为 $A(0,\ 0),\ B(3,\ 6),\ C(7.5,\ 0)$.

将 $z=1000x+1200y$ 变形为 $y=-\frac{5}{6}x+\frac{z}{1200}$，

当 $x=3,\ y=6$时，直线 l： $y=-\frac{5}{6}x+\frac{z}{1200}$ 在 y 轴上的截距最大，

最大获利 $Z=z_{max}=3\times1000+6\times1200=10200$.

当$W=18$时，（1）表示的平面区域如图 3，

四个顶点分别为$A(0,\ 0),\ B(3,\ 6),\ C(6,\ 4),\ D(9,\ 0)$．

将$z=1000x+1200y$变形为$y=-\frac{5}{6}x+\frac{z}{1200}$，

当$x=6, y=4$时，直线l：$y=-\frac{5}{6}x+\frac{z}{1200}$在$y$轴上的截距最大，

最大获利$Z=z_{max}=6\times1000+4\times1200=10800$．

故最大获利Z的分布列为

Z	8160	10200	10800
P	0.3	0.5	0.2

因此，$E(Z)=8160\times0.3+10200\times0.5+10800\times0.2=9708.$

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，一天最大获利超过 10000 元的概率$p_1=P(Z>10000)=0.5+0.2=0.7$，

由二项分布，3 天中至少有 1 天最大获利超过 10000 元的概率为$p=1-(1-p_1)^3=1-0.3^3=0.973.$

【考点定位】线性规划的实际运用，随机变量的独立性，分布列与均值，二项分布.

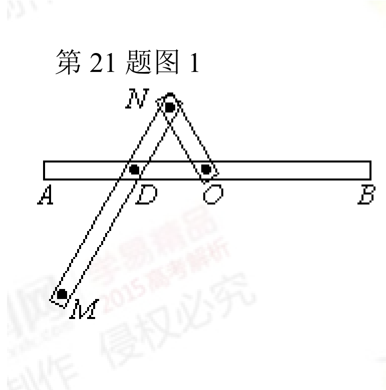
【名师点睛】二项分布是高中概率中最重要的概率分布模型，是近年高考非常重要的一个考点.独立重复试验是相互独立事件的特例(概率公式也是如此)，就像对立事件是互斥事件的特例一样，只要有“恰好”字样的用独立重复试验的概率公式计算更简单，就像有“至少”或“至多”字样的题用对立事件的概率公式计算更简单一样.

21．（本小题满分 14 分）

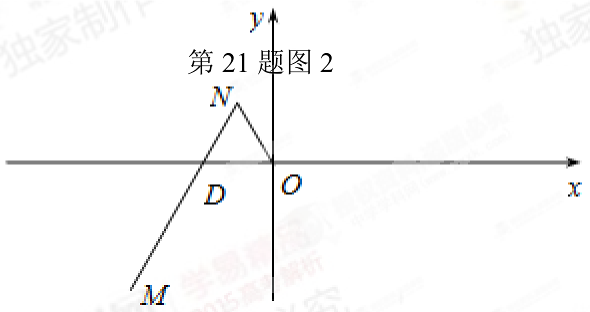
一种作图工具如图 1 所示．O是滑槽AB的中点，短杆ON可绕O转动，长杆MN通过N处铰链与ON连接，MN上的栓子D可沿滑槽AB滑动，且$DN=ON=1$，$MN=3$．当栓子D在滑槽AB内作往复运动时，带动N绕O转动一周（D不动时，N也不动），M处的笔尖画出的曲线记为C．以O为原点，AB所在的直线为x轴建立如图 2 所示的平面直角坐标系．

（Ⅰ）求曲线C的方程；

（Ⅱ）设动直线l与两定直线$l_1:x-2y=0$和$l_2:x+2y=0$分别交于P, Q两点．若直线l总与曲线C有且只有一个公共点，试探究：ΔOQP的面积是否存在最小值？若存在，求出该最小值；若不存在，说明理由．



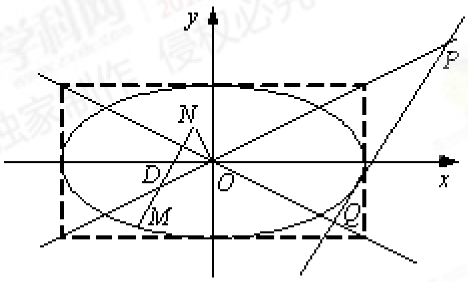
第 21 题图 1



第 21 题图 2

【答案】（Ⅰ）$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$；（Ⅱ）存在最小值 8.

【解析】（Ⅰ）设点 $D(t,0)$ $(|t|\le 2)$，$N(x_0,y_0)$, $M(x,y)$，依题意，



第 21 题解答图

$\overline{MD}=2\overline{DN}$，且 $|\overline{DN}|=|\overline{ON}|=1$，

所以 $(t-x,\,-y)=2(x_0-t,\,y_0)$，且 $\begin{cases}(x_0-t)^2+y_0^2=1,\\ x_0^2+y_0^2=1.\end{cases}$

即 $\begin{cases}t-x=2x_0-2t,\\ y=-2y_0.\end{cases}$ 且 $t(t-2x_0)=0$.

由于当点 D 不动时，点 N 也不动，所以 t 不恒等于 0，

于是 $t=2x_0$，故 $x_0=\dfrac{x}{4},y_0=-\dfrac{y}{2}$，代入 $x_0^2+y_0^2=1$，可得 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$，

即所求的曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

（Ⅱ）（1）当直线 l 的斜率不存在时，直线 l 为 $x=4$ 或 $x=-4$，都有 $S_{\Delta OPQ}=\dfrac{1}{2}\times4\times4=8$.

（2）当直线 l 的斜率存在时，设直线 $l:y=kx+m$ $(k\ne\pm\dfrac{1}{2})$，学科网

由$\begin{cases} y=kx+m, \\ x^2+4y^2=16, \end{cases}$ 消去 y，可得 $(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-16=0$.

因为直线 l 总与椭圆 C 有且只有一个公共点，

所以 $\Delta=64k^2m^2-4(1+4k^2)(4m^2-16)=0$，即 $m^2=16k^2+4$. ①

又由$\begin{cases} y=kx+m, \\ x-2y=0, \end{cases}$ 可得 $P(\frac{2m}{1-2k},\frac{m}{1-2k})$；同理可得 $Q(\frac{-2m}{1+2k},\frac{m}{1+2k})$.

由原点 O 到直线 PQ 的距离为 $d=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$ 和 $|PQ|=\sqrt{1+k^2}\,|x_P-x_Q|$，可得

$$S_{\Delta OPQ}=\frac{1}{2}|PQ|\cdot d=\frac{1}{2}|m||x_P-x_Q|=\frac{1}{2}\cdot|m|\left|\frac{2m}{1-2k}+\frac{2m}{1+2k}\right|=\left|\frac{2m^2}{1-4k^2}\right|. \quad ②$$

将①代入②得，$S_{\Delta OPQ}=\left|\frac{2m^2}{1-4k^2}\right|=8\frac{|4k^2+1|}{|4k^2-1|}$.

当 $k^2>\frac{1}{4}$ 时，$S_{\Delta OPQ}=8(\frac{4k^2+1}{4k^2-1})=8(1+\frac{2}{4k^2-1})>8$；

当 $0\le k^2<\frac{1}{4}$ 时，$S_{\Delta OPQ}=8(\frac{4k^2+1}{1-4k^2})=8(-1+\frac{2}{1-4k^2})$.

因 $0\le k^2<\frac{1}{4}$，则 $0<1-4k^2\le 1$，$\frac{2}{1-4k^2}\ge 2$，所以 $S_{\Delta OPQ}=8(-1+\frac{2}{1-4k^2})\ge 8$，

当且仅当 $k=0$ 时取等号.

所以当 $k=0$ 时，$S_{\Delta OPQ}$ 的最小值为 8.

综合（1）（2）可知，当直线 l 与椭圆 C 在四个顶点处相切时，ΔOPQ 的面积取得最小值 8.

考点：椭圆的标准方程、几何性质,直线与圆、椭圆的位置关系，最值.

【名师点睛】本题以滑槽，长短杆为背景，乍一看与我们往年考的很不一样，但是只要学生仔细读题均能找到椭圆的 a , b , c . 那么第一问就迎刃而解了，第二问仍然为圆锥曲线的综合问题。
直线与圆锥曲线位置关系的判断、有关圆锥曲线弦的问题等能很好地渗透对函数方程思想和数形结合思想的考查，一直是高考考查的重点，特别是焦点弦和中点弦等问题，涉及中点公式、根与系数的关系以及设而不求、整体代入的技巧和方法，也是考查数学思想方法的热点题型．解题过程中要注意讨论直线斜率的存在情况，计算要准确.

22．（本小题满分 14 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，$b_n=n(1+\frac{1}{n})^n a_n\ (n\in\mathbf{N}_+)$，$e$ 为自然对数的底数.

（Ⅰ）求函数 $f(x)=1+x-e^x$ 的单调区间，并比较 $(1+\frac{1}{n})^n$ 与 e 的大小；

（Ⅱ）计算 $\frac{b_1}{a_1}$，$\frac{b_1b_2}{a_1a_2}$，$\frac{b_1b_2b_3}{a_1a_2a_3}$，由此推测计算 $\frac{b_1b_2\cdots b_n}{a_1a_2\cdots a_n}$ 的公式，并给出证明；

（III）令 $c_n=(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$，数列 $\{a_n\}$，$\{c_n\}$ 的前 n 项和分别记为 S_n，T_n，证明：$T_n<eS_n$．

【答案】（Ⅰ）$f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,0)$，单调递减区间为 $(0,+\infty)$．$(1+\frac{1}{n})^n<\mathrm{e}$；（Ⅱ）详见解析；

（III）详见解析.

【解析】（Ⅰ）$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，$f'(x)=1-e^x$．

当 $f'(x)>0$，即 $x<0$ 时，$f(x)$ 单调递增；

当 $f'(x)<0$，即 $x>0$ 时，$f(x)$ 单调递减.

故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,0)$，单调递减区间为 $(0,+\infty)$．

当 $x>0$ 时，$f(x)<f(0)=0$，即 $1+x<e^x$．

令 $x=\frac{1}{n}$，得 $1+\frac{1}{n}<e^{\frac{1}{n}}$，即 $(1+\frac{1}{n})^n<e$．　　①

（Ⅱ）$\frac{b_1}{a_1}=1\cdot(1+\frac{1}{1})^1=1+1=2$；$\frac{b_1b_2}{a_1a_2}=\frac{b_1}{a_1}\cdot\frac{b_2}{a_2}=2\cdot2(1+\frac{1}{2})^2=(2+1)^2=3^2$；

$\frac{b_1b_2b_3}{a_1a_2a_3}=\frac{b_1b_2}{a_1a_2}\cdot\frac{b_3}{a_3}=3^2\cdot3(1+\frac{1}{3})^3=(3+1)^3=4^3$．

由此推测：$\frac{b_1b_2\cdots b_n}{a_1a_2\cdots a_n}=(n+1)^n$.　　②

下面用数学归纳法证明②.

（1）当 $n=1$ 时，左边 $=$ 右边 $=2$，②成立.

（2）假设当 $n=k$ 时，②成立，即 $\frac{b_1b_2\cdots b_k}{a_1a_2\cdots a_k}=(k+1)^k$．

当 $n=k+1$ 时，$b_{k+1}=(k+1)(1+\frac{1}{k+1})^{k+1}a_{k+1}$，

由归纳假设可得 $\frac{b_1b_2\cdots b_kb_{k+1}}{a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}}=\frac{b_1b_2\cdots b_k}{a_1a_2\cdots a_k}\cdot\frac{b_{k+1}}{a_{k+1}}=(k+1)^k(k+1)(1+\frac{1}{k+1})^{k+1}=(k+2)^{k+1}$．

所以当 $n=k+1$ 时，②也成立.

根据（1）（2），可知②对一切正整数 n 都成立.

（III）由 c_n 的定义，②，算术-几何平均不等式，b_n 的定义及①得

$$T_n=c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n=(a_1)^{\frac{1}{1}}+(a_1a_2)^{\frac{1}{2}}+(a_1a_2a_3)^{\frac{1}{3}}+\cdots+(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$$

$=\frac{(b_1)^{\frac{1}{1}}}{2}+\frac{(b_1b_2)^{\frac{1}{2}}}{3}+\frac{(b_1b_2b_3)^{\frac{1}{3}}}{4}+\cdots+\frac{(b_1b_2\cdots b_n)^{\frac{1}{n}}}{n+1}$ 学科网

$\le\frac{b_1}{1\times2}+\frac{b_1+b_2}{2\times3}+\frac{b_1+b_2+b_3}{3\times4}+\cdots+\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n(n+1)}$

$=b_1[\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}]+b_2[\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}]+\cdots+b_n\cdot\frac{1}{n(n+1)}$

$=b_1(1-\frac{1}{n+1})+b_2(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1})+\cdots+b_n(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$

$<\frac{b_1}{1}+\frac{b_2}{2}+\cdots+\frac{b_n}{n}=(1+\frac{1}{1})^1a_1+(1+\frac{1}{2})^2a_2+\cdots+(1+\frac{1}{n})^na_n$

$<ea_1+ea_2+\cdots+ea_n=eS_n$.

即$T_n<eS_n$.

【考点定位】导数的应，数列的概念，数学归纳法，基本不等式，不等式的证明.

【名师点睛】使用裂项法求和时，要注意正负项相消时消去了哪些项，保留了哪些项，切不可漏写未被消去的项，未被消去的项有前后对称的特点，实质上造成正负相消是此法的根源与目的.

运用数学归纳法应注意以下三点：(1)$n=n_0$时成立，要弄清楚命题的含义．(2)由假设 $n=k$ 成立证 $n=k+1$ 时，要推导详实，并且一定要运用 $n=k$ 成立的结论．(3)要注意 $n=k$ 到 $n=k+1$ 时增加的项数.