

2011 年江西高考理科数学真题及答案

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分。第 I 卷 1 至 2 页。第 II 卷 3

至 4 页, 满分 150 分, 考试时间 120 分钟.

考试结束后,

考试注意:

1. 答题前, 考生在答题卡上务必将自己的准考证号、姓名填写在答题卡上. 考试要认真核对

答题卡上粘贴的条形码的“准考证号、姓名、考试科目”与考试本人的准考证号、姓名是否一致.

2. 第 I 卷每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号, . 第 II 卷用 0.5 毫米的黑色墨水签字笔在答题卡上书写作答. 若在试题卷上作答, 答案无效.

3. 考试结束后, 监考员将试题卷、答题卡一并交回。

参考公式:

样本数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ 的线性相关系数

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad \text{其中}$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}$$

锥体的体积公式

$$V = \frac{1}{3}Sh$$

其中 S 为底面积, h 为高

第 I 卷

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

- (1) 若 $z = \frac{1+2i}{i}$ ，则复数 $\bar{z} =$ ()
- A. $-2-i$ B. $-2+i$ C. $2-i$ D. $2+i$
- (2) 若集合 $A = \{x | -1 \leq 2x+1 \leq 3\}$, $B = \{x | \frac{x-2}{x} \leq 0\}$, 则 $A \cap B =$ ()
- A. $\{x | -1 \leq x < 0\}$ B. $\{x | 0 < x \leq 1\}$ C. $\{x | 0 \leq x \leq 2\}$ D. $\{x | 0 \leq x \leq 1\}$
- (3) 若 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)}}$, 则 $f(x)$ 的定义域为 ()
- A. $(-\frac{1}{2}, 0)$ B. $(-\frac{1}{2}, 0]$ C. $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ D. $(0, +\infty)$
- (4) 若 $f(x) = x^2 - 2x - 4\ln x$, 则 $f'(x) > 0$ 的解集为 ()
- A. $(0, +\infty)$ B. $(-1, 0) \cup (2, +\infty)$
- C. $(2, +\infty)$ D. $(-1, 0)$
- (5) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足: $S_n + S_m = S_{n+m}$, 且 $a_1 = 1$, 那么 $a_{10} =$ ()
- A. 1 B. 9 C. 10 D. 55
- (6) 变量 X 与 Y 相对应的一组数据为(10, 1), (11.3, 2), (11.8, 3), (12.5, 4), (13, 5); 变量 U 与 V 相对应的一组数据为(10, 5), (11.3, 4), (11.8, 3), (12.5, 2), (13, 1). r_1 表示变量 Y 与 X 之间的线性相关系数, r_2 表示变量 V 与 U 之间的线性相关系数, 则 ()
- A. $r_2 < r_1 < 0$ B. $0 < r_2 < r_1$ C. $r_2 < 0 < r_1$ D. $r_2 = r_1$
- (7) 观察下列各式: $5^5 = 3125, 5^6 = 15625, 5^7 = 78125, \dots$, 则 5^{2011} 的末四位数字为 ()
- A. 3125 B. 5625 C. 0625 D. 8125

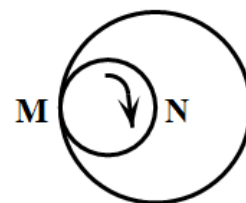
(8) 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是三个相互平行的平面, 平面 α_1, α_2 之间的距离为 d_1 , 平面 α_2, α_3 之间的距离为 d_2 . 直线 l 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 分别交于 P_1, P_2, P_3 . 那么“ $P_1P_2 = P_2P_3$ ”是“ $d_1 = d_2$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充分必要条件
- D. 既不充分也不必要条件

(9) 若曲线 $C_1: x^2 + y^2 - 2x = 0$ 与曲线 $C_2: y(y - mx - m) = 0$ 有四个不同的交点, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$
- B. $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0) \cup (0, \frac{\sqrt{3}}{3})$
- C. $[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$
- D. $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$

10. 如右图, 一个直径为 1 的小圆沿着直径为 2 的大圆内壁的逆时针方向滚动, M 和 N 是小圆的一条固定直径的两个端点. 那么, 当小圆这样滚过大圆内壁的一周, 点 M, N 在大圆内所绘出的图形大致是 ()



- A.
- B.
- C.
- D.

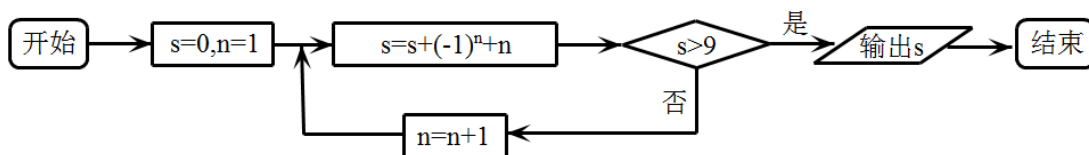
第 II 卷

二. 填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

11. 已知 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$, $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = -2$, 则 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角为_____.

12. 小波通过做游戏的方式来确定周末活动, 他随机地往单位圆内投掷一点, 若此点到圆心的距离大于 $\frac{1}{2}$, 则周末去看电影; 若此点到圆心的距离小于 $\frac{1}{4}$, 则去打篮球; 否则, 在家看书. 则小波周末不在家看书的概率为_____.

13. 下图是某算法程序框图, 则程序运行后输出的结果是_____.



14. 若椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的焦点在 x 轴上, 过点 $(1, \frac{1}{2})$ 作圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的切线, 切点分别为 A, B , 直线 AB 恰好经过椭圆的右焦点和上顶点, 则椭圆方程是_____.

三. 选做题: 请考生在下列两题中任选一题作答. 若两题都做, 则按做的第一题评阅计分. 本题共 5 分.

15 (1). (坐标系与参数方程选做题) 若曲线的极坐标方程为 $\rho = 2 \sin \theta + 4 \cos \theta$, 以极点为原点, 极轴为 x 轴正半轴建立直角坐标系, 则改曲线的直角坐标方程为_____.

(2). (不等式选择题) 对于实数 x, y , 若 $|x-1| \leq 1$, $|y-2| \leq 1$, 则 $|x-2y+1|$ 的最大值为_____.

四. 本大题共 6 小题, 共 75 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

16. (本小题满分 12 分)

某饮料公司招聘一名员工, 现对其进行一项测试, 以便确定工资级别. 公司准备了两种不同的饮料共 8 杯, 其颜色完全相同, 并且其中 4 杯为 A 饮料, 另外 4 杯为 B 饮料, 公司要求此

员工一一品尝后，从 8 杯饮料中选出 4 杯 A 饮料. 若 4 杯都选对，则月工资定为 3500 元；若 4 杯选对 3 杯，则月工资定为 2800 元；否则月工资定为 2100 元. 令 X 表示此人选对 A 饮料的杯数. 假设次人对 A 和 B 两种饮料没有鉴别能力.

- (1) 求 X 的分布列；
- (2) 求此员工月工资的期望.

17. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c ，已知 $\sin C + \cos C = 1 - \sin \frac{C}{2}$.

- (1) 求 $\sin C$ 的值；
- (2) 若 $a^2 + b^2 = 4(a + b) - 8$ ，求边 c 的值.

18. (本小题满分 12 分)

已知两个等比数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ ，满足 $a_1 = a (a > 0)$, $b_1 - a_1 = 1$, $b_2 - a_2 = 2$, $b_3 - a_3 = 3$.

- (1) 若 $a = 1$ ，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；
- (2) 若数列 $\{a_n\}$ 唯一，求 a 的值.

19. (本小题满分 12 分)

$$\text{设 } f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2ax.$$

(1) 若 $f(x)$ 在 $(\frac{2}{3}, +\infty)$ 上存在单调递增区间, 求 a 的取值范围;

(2) 当 $0 < a < 2$ 时, $f(x)$ 在 $[1, 4]$ 上的最小值为 $-\frac{16}{3}$, 求 $f(x)$ 在该区间上的最大值.

20. (本小题满分 13 分)

$P(x_0, y_0) (x_0 \neq \pm a)$ 是双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 上一点, M, N 分别是双曲线 E

的左、右定点, 直线 PM, PN 的斜率之积为 $\frac{1}{5}$.

(1) 求双曲线的离心率;

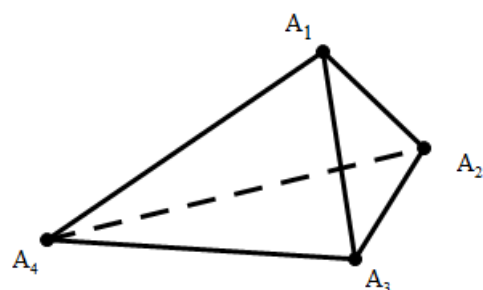
(2) 过双曲线 E 的右焦点且斜率为 1 的直线交双曲线于 A, B 两点, O 为坐标原点, C 为

双曲线上的一点, 满足 $\overrightarrow{OC} = \lambda \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, 求 λ 的值.

21. (本小题满分 14 分)

(1) 如图, 对于任一给定的四面体 $A_1A_2A_3A_4$, 找出依次排列的四个相互平行的平面 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, 使得 $A_i \in \alpha_i$ ($i=1, 2, 3, 4$), 且其中每相邻两个平面间的距离都相等;

(2) 给定依次排列的四个相互平行的平面 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, 其中每相邻两个平面间的距离为 1, 若一个正四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的四个顶点满足: $A_i \in \alpha_i$ ($i=1, 2, 3, 4$), 求该正四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的体积.



2011 年江西高考理科数学真题及答案

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分。第 I 卷 1 至 2 页。第 II 卷 3

至 4 页, 满分 150 分, 考试时间 120 分钟.

考试结束后,

考试注意:

2. 答题前, 考生在答题卡上务必将自己的准考证号、姓名填写在答题卡上. 考试要认真核对

答题卡上粘贴的条形码的“准考证号、姓名、考试科目”与考试本人的准考证号、

姓名是否一致.

2. 第 I 卷每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号, . 第 II 卷用 0.5 毫米的黑色墨水签字笔在答题卡上书写作答. 若在试题卷上作答, 答案无效.

3. 考试结束后, 监考员将试题卷、答题卡一并交回。

参考公式:

样本数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ 的线性相关系数

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad \text{其中}$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}$$

锥体的体积公式

$$V = \frac{1}{3}Sh$$

其中 S 为底面积, h 为高

第 I 卷

二、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

(10) 若 $z = \frac{1+2i}{i}$, 则复数 $\bar{z} =$ ()

- A. $-2-i$ B. $-2+i$ C. $2-i$ D. $2+i$

$$z = \frac{1+2i}{i} = \frac{i+2i^2}{i^2} = \frac{i-2}{-1} = 2-i, \quad \bar{z} = 2+i.$$

答案：D 解析：

(11) 若集合 $A = \{x | -1 \leq 2x+1 \leq 3\}$, $B = \{x | \frac{x-2}{x} \leq 0\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{x | -1 \leq x < 0\}$ B. $\{x | 0 < x \leq 1\}$ C. $\{x | 0 \leq x \leq 2\}$ D. $\{x | 0 \leq x \leq 1\}$

答案：B 解析： $A = \{x | -1 \leq x \leq 1\}$, $B = \{x | 0 < x \leq 2\}$, $A \cap B = \{x | 0 < x \leq 1\}$

(12) 若 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)}}$, 则 $f(x)$ 的定义域为 ()

- A. $(-\frac{1}{2}, 0)$ B. $(-\frac{1}{2}, 0]$ C. $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ D. $(0, +\infty)$

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x+1) > 0, \therefore 0 < 2x+1 < 1$$

答案：A 解析：

$$\therefore x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

(13) 若 $f(x) = x^2 - 2x - 4 \ln x$, 则 $f'(x) > 0$ 的解集为 ()

- A. $(0, +\infty)$ B. $(-1, 0) \cup (2, +\infty)$
C. $(2, +\infty)$ D. $(-1, 0)$

答案：C 解析： $f'(x) = 2x - 2 - \frac{4}{x} > 0, \frac{x^2 - x - 2}{x} > 0,$
 $\therefore x > 0, \therefore (x-2)(x+1) > 0, \therefore x > 2$

(14) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足： $S_n + S_m = S_{n+m}$, 且 $a_1 = 1$, 那么 $a_{10} =$ ()

- A. 1 B. 9 C. 10 D. 55

$$\because S_2 = a_1 + a_2 = 2S_1, \therefore a_2 = 1$$

答案：A 解析：

$$\because S_3 = S_1 + S_2 = 3, \therefore a_3 = 1$$

$$\because S_4 = S_1 + S_3 = 4, \therefore a_4 = 1$$

$$\cdots a_{10} = 1$$

(15) 变量 X 与 Y 相对应的一组数据为 (10, 1), (11.3, 2), (11.8, 3), (12.5, 4), (13, 5); 变量 U 与 V 相对应的一组数据为 (10, 5), (11.3, 4), (11.8, 3), (12.5, 2), (13, 1). r_1 表示变量

Y 与 X 之间的线性相关系数, r_2 表示变量 V 与 U 之间的线性相关系数, 则 ()

A. $r_2 < r_1 < 0$

B. $0 < r_2 < r_1$

C. $r_2 < 0 < r_1$

D. $r_2 = r_1$

答案：C 解析：
$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$
 第一组变量正相关, 第二组变量负相

关。

(16) 观察下列各式： $5^5 = 3125, 5^6 = 15625, 5^7 = 78125, \dots$, 则 5^{2011} 的末四位数字为 ()

A. 3125

B. 5625

C. 0625

D. 8125

答案：D 解析：

$$\because f(x) = 5^x, f(4) = 625, f(5) = 3125, f(6) = 15625, f(7) = 78125, f(8) = 390625$$

$$2011 - 4 = 2008 - 1, \therefore f(2011) = \text{***}8125$$

(17) 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是三个相互平行的平面, 平面 α_1, α_2 之间的距离为 d_1 , 平面 α_2, α_3 之间的距离为 d_2 . 直线 l 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 分别交于 P_1, P_2, P_3 . 那么“ $P_1P_2 = P_2P_3$ ”是“ $d_1 = d_2$ ”的

()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

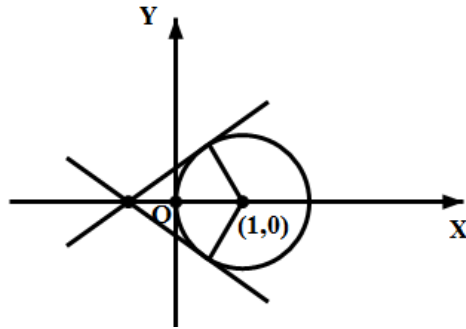
D. 既不充分也不必要条件

答案：C

解析：平面 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 平行，由图可以得知：

如果平面距离相等，根据两个三角形全等可知 $P_1P_2 = P_2P_3$

如果 $P_1P_2 = P_2P_3$ ，同样是根据两个三角形全等可知 $d_1 = d_2$



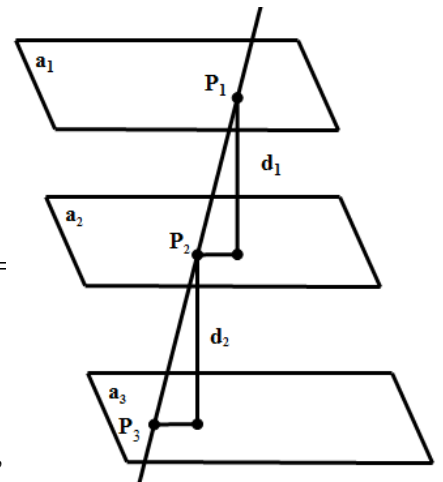
(18) 若曲线 $C_1: x^2 + y^2 - 2x = 0$ 与曲线 $C_2: y(y - mx - m) = 0$ 实数 m 的取值范围是 ()

A. $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$

B. $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0) \cup (0, \frac{\sqrt{3}}{3})$

C. $[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$

D. $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$



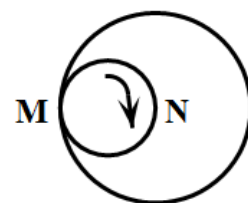
答案：B 曲线 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 表示以 $(1,0)$ 为圆心，以 1 为半径的圆，曲线

$y(y - mx - m) = 0$ 表示 $y = 0$ ，或 $y - mx - m = 0$ 过定点 $(-1,0)$ ， $y = 0$ 与圆有两个交点，故

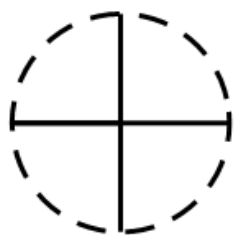
$y - mx - m = 0$ 也应该与圆有两个交点，由图可以知道，临界情况即是与圆相切的时候，经

计算可得，两种相切分别对应 $m = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 和 $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，由图可知， m 的取值范围是

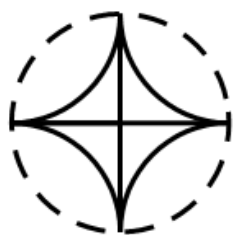
$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$



11. 如右图，一个直径为 1 的小圆沿着直径为 2 的大圆内壁的逆时针方向滚动，M 和 N 是小圆的一条固定直径的两个端点. 那么，当小圆这样滚过大圆内壁的一周，点 M, N 在大圆内所绘出的图形大致是 ()



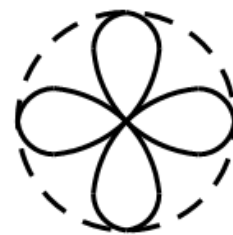
A



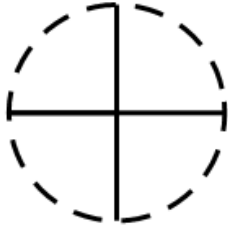
B



C



D



答案：A

解析：根据小圆与大圆半径 1:2 的关系，找上下左右四个点，根据这四个点的位置，小圆转半圈，刚好是大圆的四分之一，因此 M 点的轨迹是个大圆，而 N 点的轨迹是四条线，刚好是 M 产生的大圆的半径。

第 II 卷

二. 填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$ ， $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = -2$ ，则 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角为_____.

答案： 60° ($\frac{\pi}{3}$) 解析：根据已知条件 $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = -2$ ，去括号得：

$$|\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} - 2|\vec{b}|^2 = 4 + 2 \times 2 \times \cos \theta - 2 \times 4 = -2, \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2}, \theta = 60^\circ$$

(PS：这道题其实 2010 年湖南文科卷的第 6 题翻版过来的，在我们寒假班的时候也讲过一道类似的，在文科讲义 72 页的第 2 题。此题纯属送分题！)

14. 小波通过做游戏的方式来确定周末活动，他随机地往单位圆内投掷一点，若此点到圆心的距离大于 $\frac{1}{2}$ ，则周末去看电影；若此点到圆心的距离小于 $\frac{1}{4}$ ，则去打篮球；

否则，在家看书. 则小波周末不在家看书的概率为_____.

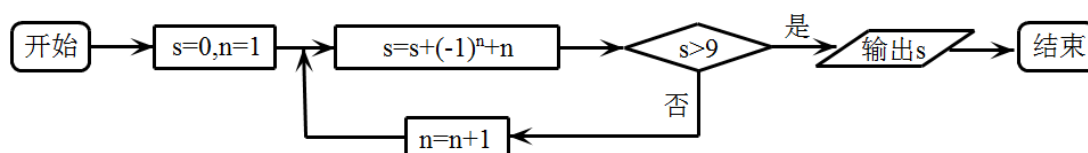
答案： $\frac{13}{16}$ 解析：方法一：不在家看书的概率=

$$\frac{\text{看电影} + \text{打篮球}}{\text{所有情况}} = \frac{\pi \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \pi - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \pi}{\pi} = \frac{13}{16}$$

$$\text{方法二：不在家看书的概率} = 1 - \frac{\pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \pi \times \left(\frac{1}{4}\right)^2}{\pi} = \frac{13}{16}$$

(PS: 通过生活实例与数学联系起来, 是高考青睐的方向, 但在我们春季班讲义二第一页的第五题已经做过类似题型, 那么作为理科生, 并且是上过新东方春季班课程的理科生, 是不是应该作对, 不解释。)

13. 下图是某算法程序框图, 则程序运行后输出的结果是_____.



10. 解析: $s=0, n=1$; 带入到解析式当中, $s=0+(-1)+1=0, n=2$;

$$s=0+1+2=3, \quad n=3;$$

$$S=3+(-1)+3=5, \quad n=4;$$

$$S=5+1+4=10, \text{ 此时 } s>9, \text{ 输出。}$$

(PS: 此题实质是 2010 江苏理科卷第 7 题得翻版, 同时在我们寒假题海班, 理科讲义的第 200 页的第 6 题也讲过相似的。所以童鞋们再次遇到, 应该也是灰常熟悉的。并且框图本来就是你们的拿手菜, 所以最对也不觉奇怪。)

15. 若椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的焦点在 x 轴上, 过点 $(1, \frac{1}{2})$ 作圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的切线, 切点分别为

A, B, 直线 AB 恰好经过椭圆的右焦点和上顶点, 则椭圆方程是_____.

答案: $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ 解析: 设过点 $(1, \frac{1}{2})$ 的直线方程为: 当斜率存在时,

$$y = k(x-1) + \frac{1}{2},$$

根据直线与圆相切, 圆心 $(0, 0)$ 到直线的距离等于半径 1 可以得到 $k = -\frac{3}{4}$, 直线与圆方程

的联立可以得到切点的坐标 $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$, 当斜率不存在时, 直线方程为: $x=1$, 根据两点 A:

(1,0), B: $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ 可以得到直线: $2x+y-2=0$, 则与 y 轴的交点即为上顶点坐标 (2,0)

$\Rightarrow b=2$, 与 x 轴的交点即为焦点 $\Rightarrow c=1$, 根据公式 $a^2 = b^2 + c^2 = 5, \Rightarrow a = \sqrt{5}$, 即椭圆

方程为: $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$

(PS:此题可能算是填空题, 比较纠结的一道, 因为要理清思路, 计算有些繁琐。但是, 是不是就做不出来呢, 不是的, 在我们寒假题海班的时候讲过一道与此相似的题型, 也就在理科教材第 147 页第 23 题。所以最纠结的一道高考题也不过如此, 你们还怕什么?)

三. 选做题: 请考生在下列两题中任选一题作答. 若两题都做, 则按做的第一题评阅计分. 本题共 5 分.

15 (1). (坐标系与参数方程选做题) 若曲线的极坐标方程为 $\rho = 2 \sin \theta + 4 \cos \theta$, 以极点为原点, 极轴为 x 轴正半轴建立直角坐标系, 则改曲线的直角坐标方程为_____.

答案: $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$. 解析: 做坐标系与参数方程的题, 大家只需记住两点: 1、

$x = \rho \cdot \cos \theta, y = \rho \cdot \sin \theta$, 2、 $\rho^2 = x^2 + y^2$ 即可。根据已知 $\rho = 2 \sin \theta + 4 \cos \theta =$

$$2 \cdot \frac{y}{\rho} + 4 \frac{x}{\rho}, \text{化简可得: } \rho^2 = 2y + 4x = x^2 + y^2,$$

所以解析式为: $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$

15 (2). (不等式选择题) 对于实数 x, y, 若 $|x-1| \leq 1, |y-2| \leq 1$, 则 $|x-2y+1|$ 的最大值为_____.

(2) 此题, 看似很难, 但其实不难, 首先解出 x 的范围, $0 \leq x \leq 2$, 再解出 y 的范围,

$1 \leq y \leq 3$, 最后综合解出 $x-2y+1$ 的范围 $[-5, 1]$, 那么绝对值最大, 就去 5

(PS: 此题作为最后一题, 有失最后一题的分量, 大家从解题步骤就可看出。所以高考注重

的还是基础+基础!)

五. 本大题共 6 小题, 共 75 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

20. (本小题满分 12 分)

某饮料公司招聘一名员工, 现对其进行一项测试, 以便确定工资级别. 公司准备了两种不同的饮料共 8 杯, 其颜色完全相同, 并且其中 4 杯为 A 饮料, 另外 4 杯为 B 饮料, 公司要求此员工一一品尝后, 从 8 杯饮料中选出 4 杯 A 饮料. 若 4 杯都选对, 则月工资定为 3500 元; 若 4 杯选对 3 杯, 则月工资定为 2800 元; 否则月工资定为 2100 元. 令 X 表示此人选对 A 饮料的杯数. 假设次人对 A 和 B 两种饮料没有鉴别能力.

(3) 求 X 的分布列;

(4) 求此员工月工资的期望.

解答: (1) 选对 A 饮料的杯数分别为 $X = 0, X = 1, X = 2, X = 3, X = 4,$

其概率分布分别为: $P(0) = \frac{C_4^0 C_4^4}{C_8^4} = \frac{1}{70}, P(1) = \frac{C_4^1 C_4^3}{C_8^4} = \frac{16}{70}, P(2) = \frac{C_4^2 C_4^2}{C_8^4} = \frac{36}{70},$

$P(3) = \frac{C_4^3 C_4^1}{C_8^4} = \frac{16}{70}, P(4) = \frac{C_4^4 C_4^0}{C_8^4} = \frac{1}{70}.$

(2) $E(\zeta) = \frac{1}{70} \times 3500 + \frac{16}{70} \times 2800 + \left(\frac{36}{70} + \frac{16}{70} + \frac{1}{70} \right) \times 2100 = 2280.$

21. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 已知 $\sin C + \cos C = 1 - \sin \frac{C}{2}.$

(3) 求 $\sin C$ 的值;

(4) 若 $a^2 + b^2 = 4(a + b) - 8$, 求边 c 的值.

解：(1) 已知 $\sin C + \cos C = 1 - \sin \frac{C}{2}$

$$\therefore 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} - \sin^2 \frac{C}{2} = \cos^2 \frac{C}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} - \sin \frac{C}{2}$$

整理即有： $2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} - 2 \sin^2 \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} = 0 \Rightarrow \sin \frac{C}{2} \left(2 \cos \frac{C}{2} - 2 \sin \frac{C}{2} + 1 \right) = 0$

又 C 为 $\triangle ABC$ 中的角， $\therefore \sin \frac{C}{2} \neq 0$

$$\therefore \sin \frac{C}{2} - \cos \frac{C}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\sin \frac{C}{2} - \cos \frac{C}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow -2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin C = \frac{3}{4}$$

$$(2) \because a^2 + b^2 = 4(a + b) - 8$$

$$\therefore a^2 + b^2 - 4a - 4b + 4 + 4 = 0 \Rightarrow (a - 2)^2 + (b - 2)^2 = 0 \Rightarrow a = 2, b = 2$$

$$\text{又} \because \cos C = \sqrt{1 - \sin^2 C} = \frac{\sqrt{7}}{4}, \therefore c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C} = \sqrt{7} - 1$$

22. (本小题满分 12 分)

已知两个等比数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, 满足 $a_1 = a (a > 0), b_1 - a_1 = 1, b_2 - a_2 = 2, b_3 - a_3 = 3$.

(3) 若 $a = 1$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(4) 若数列 $\{a_n\}$ 唯一, 求 a 的值.

解：(1) 当 $a = 1$ 时, $b_1 = 1 + a = 2, b_2 = 2 + a_2, b_3 = 3 + a_3$, 又 $\because \{a_n\}, \{b_n\}$ 为等比数列,

不妨设 $\{a_n\}$ 公比为 q_1 , 由等比数列性质知: $b_2^2 = b_1 b_3 \Rightarrow (2 + a_2)^2 = 2(3 + a_3)$, 同时又

有

$$a_2 = a_1 q_1, a_3 = a_1 q_1^2 \Rightarrow (2 + a_1 q_1)^2 = 2(3 + a_1 q_1^2) \Rightarrow (2 + q_1)^2 = 2(3 + q_1^2) \Rightarrow q_1 = 2 \pm \sqrt{2}$$

所以: $a_n = (2 \pm \sqrt{2})^{n-1}, n \geq 1$

(2) $\{a_n\}$ 要唯一, \therefore 当公比 $q_1 \neq 0$ 时, 由 $b_1 = 1 + a = 2, b_2 = 2 + a_2, b_3 = 3 + a_3$ 且

$$b_2^2 = b_1 b_3 \Rightarrow (2 + a q_1)^2 = (1 + a)(3 + a q_1^2) \Rightarrow a q_1^2 - 4a q_1 + 3a - 1 = 0,$$

$\because a > 0, \therefore aq_1^2 - 4aq_1 + 3a - 1 = 0$ 最少有一个根 (有两个根时, 保证仅有一个正根)

$\therefore (4a)^2 - 4a(3a - 1) \geq 0 \Rightarrow 4a(a + 1) \geq 0$, 此时满足条件的 a 有无数多个, 不符合。

\therefore 当公比 $q_1 = 0$ 时, 等比数列 $\{a_n\}$ 首项为 a , 其余各项均为常数 0 , 唯一, 此时由

$(2 + aq_1)^2 = (1 + a)(3 + aq_1^2) \Rightarrow aq_1^2 - 4aq_1 + 3a - 1 = 0$, 可推得 $3a - 1 = 0, a = \frac{1}{3}$ 符合

综上: $a = \frac{1}{3}$ 。

23. (本小题满分 12 分)

设 $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2ax$.

(3) 若 $f(x)$ 在 $(\frac{2}{3}, +\infty)$ 上存在单调递增区间, 求 a 的取值范围;

(4) 当 $0 < a < 2$ 时, $f(x)$ 在 $[1, 4]$ 上的最小值为 $-\frac{16}{3}$, 求 $f(x)$ 在该区间上的最大值.

解: (1) 已知 $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2ax$, $\therefore f'(x) = -x^2 + x + 2a$, 函数 $f(x)$ 在 $(\frac{2}{3}, +\infty)$

上存在单调递增区间, 即导函数在 $(\frac{2}{3}, +\infty)$ 上存在函数值大于零的部分,

$$\therefore f'(\frac{2}{3}) = -(\frac{2}{3})^2 + \frac{2}{3} + 2a > 0 \Rightarrow a > -\frac{1}{9}$$

(2) 已知 $0 < a < 2$, $f(x)$ 在 $[1, 4]$ 上取到最小值 $-\frac{16}{3}$, 而 $f'(x) = -x^2 + x + 2a$ 的图像开口向下, 且对称轴 $x = \frac{1}{2}$, $\therefore f'(1) = -1 + 1 + 2a = 2a > 0, f'(4) = -16 + 4 + 2a = 2a - 12 < 0$,

则必有一点 $x_0 \in [1, 4]$, 使得 $f'(x_0) = 0$, 此时函数 $f(x)$ 在 $[1, x_0]$ 上单调递增, 在 $[x_0, 4]$ 单调递

减, $f(1) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2a = \frac{1}{6} + 2a > 0$,

$$\therefore f(4) = -\frac{1}{3} \times 64 + \frac{1}{2} \times 16 + 8a = -\frac{40}{3} + 8a < 0$$

$$\therefore f(4) = -\frac{40}{3} + 8a = -\frac{16}{3} \Rightarrow a = 1$$

此时, 由 $f'(x_0) = -x_0^2 + x_0 + 2 = 0 \Rightarrow x_0 = 2$ 或 -1 (舍去), 所以函数

$$f(x)_{\max} = f(2) = \frac{10}{3}$$

21. (本小题满分 13 分)

$P(x_0, y_0) (x_0 \neq \pm a)$ 是双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 上一点, M, N 分别是双曲线 E 的左、右定点, 直线 PM, PN 的斜率之积为 $\frac{1}{5}$.

(3) 求双曲线的离心率;

(4) 过双曲线 E 的右焦点且斜率为 1 的直线交双曲线于 A, B 两点, O 为坐标原点, C 为双曲线上的一点, 满足 $\overrightarrow{OC} = \lambda \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, 求 λ 的值.

解: (1) 已知双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, $P(x_0, y_0)$ 在双曲线上, M, N 分别为双曲线 E 的左右顶点, 所以 $M(-a, 0), N(a, 0)$, 直线 PM, PN 斜率之积为

$$K_{PM} \cdot K_{PN} = \frac{y_0}{x_0 + a} \cdot \frac{y_0}{x_0 - a} = \frac{y_0^2}{x_0^2 - a^2} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{5y_0^2}{a^2} = 1$$

$$\text{而 } \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1, \text{ 比较得 } b^2 = \frac{1}{5}a^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = \frac{6}{5}a^2 \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{30}}{5}$$

(2) 设过右焦点且斜率为 1 的直线 $L: y = x - c$, 交双曲线 E 于 A, B 两点, 则不妨设

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 又 $\overrightarrow{OC} = \lambda \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2)$, 点 C 在双曲线 E 上:

$$(\lambda x_1 + x_2)^2 - 5(\lambda y_1 + y_2)^2 = a^2 \Rightarrow \lambda^2(x_1^2 - 5y_1^2) + 2\lambda x_1 x_2 - 10\lambda y_1 y_2 + (x_2^2 - 5y_2^2) = a^2$$

* (1)

又 联立直线 L 和双曲线 E 方程消去 y 得: $4x^2 - 10cx + 5c^2 + a^2 = 0$

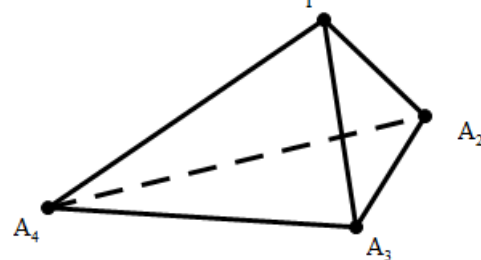
由韦达定理得: $x_1 x_2 = \frac{5c^2 + a^2}{4}$, $y_1 y_2 = x_1 x_2 - c(x_1 + x_2) + c^2 = \frac{5c^2 + a^2}{4} - \frac{5c^2}{2} + c^2$

代入 (1) 式得: $\lambda^2 a^2 + \frac{7}{2} \lambda a^2 - \frac{71}{2} \lambda a^2 + a^2 = a^2 \Rightarrow \lambda = 0$, 或 $\lambda = -4$

22. (本小题满分 14 分)

(1) 如图, 对于任一给定的四面体 $A_1A_2A_3A_4$, 找出依次排列的四个相互平行的平面 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, 使得 $A_i \in \alpha_i$ ($i=1, 2, 3, 4$), 且其中每相邻两个平面间的距离都相等;

(2) 给定依次排列的四个相互平行的平面 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, 其中每相邻两个平面间的距离为 1, 若一个正四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的四个顶点满足: $A_i \in \alpha_i$ ($i=1, 2, 3, 4$), 求该正四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的体积.



解:

(1) 将直线 A_1A_4 三等分, 其中另两个分点依次为 A'_2, A'_3 , 连接 $A_2A'_2, A_3A'_3$, 作平行于 $A_2A'_2, A_3A'_3$ 的平面, 分别过 A_2, A_3 , 即为 α_2, α_3 。同理, 过点 A_1, A_4 作平面 α_1, α_4 即可的出结论。

(2) 现设正方体的棱长为 a , 若 $A_1M = MN = 1$, 则有, $A_1M_1 = \frac{a}{2}$,

$$D_1E_1 = \sqrt{A_1D_1^2 + A_1E_1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a, \text{ 由于 } A_1D_1 \times A_1E_1 = A_1M \times D_1E_1, \text{ 得, } a = \sqrt{5},$$

那么, 正四面体的棱长为 $d = \sqrt{2}a = \sqrt{10}$, 其体积为 $V = \frac{1}{3}a^3 = \frac{5\sqrt{5}}{3}$ (即一个棱长为 a 的

正方体割去四个直角三棱锥后的体积)

