2007年天津高考理科数学真题及答案

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，共150分，考试用时120分钟．第Ⅰ卷1至2页，第Ⅱ卷3至10页．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

祝各位考生考试顺利！

第Ⅰ卷

注意事项：

1．答第Ⅰ卷前，考生务必将自己的姓名、准考号、科目涂写在答题卡上，并在规定位置粘贴考试用条形码．

2．每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号．答在试卷上的无效．

3．本卷共10小题，每小题5分，共50分．

参考公式：

·如果事件 A，B 互斥，那么

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

·如果事件 A，B 相互独立，那么

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$$

球的表面积公式

$$S=4\pi R^2$$

其中 R 表示球的半径

一、选择题：在每小题列出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．i是虚数单位，$\dfrac{2\mathrm{i}^3}{1-\mathrm{i}}=$（　　）

A．$1+\mathrm{i}$　　B．$-1+\mathrm{i}$　　C．$1-\mathrm{i}$　　D．$-1-\mathrm{i}$

2．设变量 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y\geqslant -1,\\ x+y\geqslant 1,\\ 3x-y<3.\end{cases}$ 则目标函数 $z=4x+y$ 的最大值为（　　）

A．4　　B．11　　C．12　　D．14

3．“$\theta=\dfrac{2\pi}{3}$”是“$\tan\theta=2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)$”的（　　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

4．设双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{3}$，且它的一条准线与抛物线 $y^2=4x$ 的准线重合，则此双曲线的方程为（　　）

A．$\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{24}=1$　　B．$\dfrac{x^2}{48}-\dfrac{y^2}{96}=1$

C． $\frac{x^2}{3}-\frac{2y^2}{3}=1$　　　D． $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1$

5．函数 $y=\log_2(\sqrt{x+4}+2)(x>0)$ 的反函数是（　　）

A． $y=4^x-2^{x+1}(x>2)$　　　B． $y=4^x-2^{x+1}(x>1)$

C． $y=4^x-2^{x+2}(x>2)$　　　D． $y=4^x-2^{x+2}(x>1)$

6．设 $a,\ b$ 为两条直线，$\alpha,\ \beta$ 为两个平面，下列四个命题中，正确的命题是（　　）

A．若 $a,\ b$ 与 α 所成的角相等，则 $a\parallel b$

B．若 $a\parallel\alpha,\ b\parallel\beta$，$\alpha\parallel\beta$，则 $a\parallel b$

C．若 $a\subset\alpha,\ b\subset\beta,\ a\parallel b$，则 $\alpha\parallel\beta$

D．若 $a\perp\alpha,\ b\perp\beta$，$\alpha\perp\beta$，则 $a\perp b$

7．在 $\mathbf{R}$ 上定义的函数 $f(x)$ 是偶函数，且 $f(x)=f(2-x)$，若 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上是减函数，则 $f(x)$（　　）

A．在区间 $[-2,-1]$ 上是增函数，在区间 $[3,4]$ 上是增函数

B．在区间 $[-2,-1]$ 上是增函数，在区间 $[3,4]$ 上是减函数

C．在区间 $[-2,-1]$ 上是减函数，在区间 $[3,4]$ 上是增函数

D．在区间 $[-2,-1]$ 上是减函数，在区间 $[3,4]$ 上是减函数

8. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 d 不为 0，$a_1=9d$. 若 a_k 是 a_1 与 a_{2k} 的等比中项，则 $k=$（　　）

A．2　　B．4　　C．6　　D．8

9．设 $a,\ b,\ c$ 均为正数，且 $2^a=\log_{\frac{1}{2}}a$，$\left(\frac{1}{2}\right)^b=\log_{\frac{1}{2}}b$，$\left(\frac{1}{2}\right)^c=\log_2 c$．则（　　）

A． $a<b<c$　　B． $c<b<a$　　C． $c<a<b$　　D． $b<a<c$

10．设两个向量 $\boldsymbol{a}=(\lambda+2,\ \lambda^2-\cos^2\alpha)$ 和 $\boldsymbol{b}=\left(m,\frac{m}{2}+\sin\alpha\right)$，其中 $\lambda,\ m,\ \alpha$ 为实数．若 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{b}$，中央电视台 $\frac{\lambda}{m}$ 的取值范围是（　　）

A．　　B．$[4,8]$　　C．　　D．

第Ⅱ卷

注意事项：

1．答案前将密封线内的项目填写清楚．

2．用钢笔或圆珠笔直接答在试卷上．

3．本卷共 12 小题，共 100 分．

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分，把答案填在题中横线上．

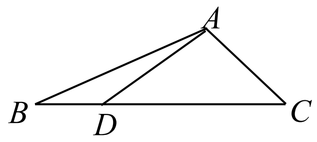
11．若$\left(x^2+\dfrac{1}{ax}\right)^6$的二项展开式中$x^2$的系数为$\dfrac{5}{2}$，则$a=$________（用数字作答）.

12．一个长方体的各顶点均在同一球的球面上，且一个顶点上的三条棱的长分别为 1，2，3，则此球的表面积为__________.

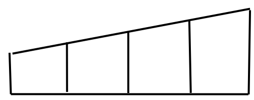
13．设等差数列$\{a_n\}$的公差d是 2，前n项的和为S_n，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n^2-n^2}{S_n}=$____________.

14．已知两圆$x^2+y^2=10$和$(x-1)^2+(y-3)^2=20$相交于A，B两点，则直线AB的方程是__________.

15．如图，在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=120°$，$AB=2$，$AC=1$，D是边BC上一点，$DC=2BD$，则$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=$__________.



16．如图，用 6 种不同的颜色给图中的 4 个格子涂色，每个格子涂一种颜色，要求最多使用 3 种颜色且相邻的两个格子颜色不同，则不同的涂色方法共有__________种（用数字作答）.



三、解答题：本大题共 6 小题，共 76 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

17．（本小题满分 12 分）

已知函数$f(x)=2\cos x(\sin x-\cos x)+1$，$x\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）求函数$f(x)$的最小正周期；

（Ⅱ）求函数$f(x)$在区间$\left[\dfrac{\pi}{8},\dfrac{3\pi}{4}\right]$上的最小值和最大值.

18．（本小题满分 12 分）

已知甲盒内有大小相同的 1 个红球和 3 个黑球，乙盒内有大小相同的 2 个红球和 4 个黑球．现从甲、乙两个盒内各任取 2 个球.

（Ⅰ）求取出的 4 个球均为黑球的概率；

（Ⅱ）求取出的 4 个球中恰有 1 个红球的概率；

（Ⅲ）设ξ为取出的 4 个球中红球的个数，求ξ的分布列和数学期望.

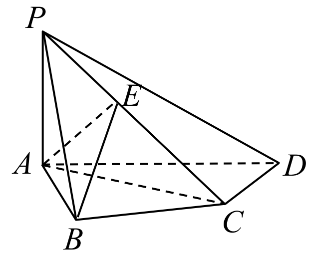
19.（本小题满分 12 分）

如图，在四棱锥$P-ABCD$中，$PA\perp$底面$ABCD$，$AB\perp AD$，$AC\perp CD$，$\angle ABC=60°$，$PA=AB=BC$，E是PC的中点.

（Ⅰ）证明$CD\perp AE$；

（Ⅱ）证明$PD\perp$平面ABE；

（Ⅲ）求二面角$A-PD-C$的大小.



20.（本小题满分 12 分）

已知函数$f(x)=\dfrac{2ax-a^2+1}{x^2+1}(x\in\mathbf{R})$，其中$a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）当$a=1$时，求曲线$y=f(x)$在点$(2,f(2))$处的切线方程;

（Ⅱ）当$a\neq 0$时，求函数$f(x)$的单调区间与极值.

21.（本小题满分 14 分）

在数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_{n+1}=\lambda a_n+\lambda^{n+1}+(2-\lambda)2^n(n\in\mathbf{N}^*)$，其中$\lambda>0$.

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式;

（Ⅱ）求数列$\{a_n\}$的前n项和S_n；

（Ⅲ）证明存在$k\in\mathbf{N}^*$，使得$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$对任意$n\in\mathbf{N}^*$均成立.

22.（本小题满分 14 分）

设椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，$A$是椭圆上的一点，

$AF_2 \perp F_1F_2$，原点O到直线AF_1的距离为$\frac{1}{3}|OF_1|$.

（Ⅰ）证明$a=\sqrt{2}b$；

（Ⅱ）设Q_1，Q_2为椭圆上的两个动点，$OQ_1 \perp OQ_2$，过原点O作直线Q_1Q_2的垂线OD，垂足为D，求点D的轨迹方程.

参考解答

一、选择题：本题考查基本知识和基本运算．每小题5分，满分50分．

1．C　　2．B　　3．A　　4．D　　5．C

6．D　　7．B　　8．B　　9．A　　10．A

二、填空题：本题考查基本知识和基本运算．每小题4分，满分24分．

11．2　　12．14π　　13．3

14．$x+3y=0$　　15．$-\frac{8}{3}$　　16．390

三、解答题

17．本小题考查三角函数中的诱导公式、特殊角三角函数值、两角差公式、倍角公式、函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的性质等基础知识，考查基本运算能力．满分12分．

（Ⅰ）解：$f(x)=2\cos x(\sin x-\cos x)+1=\sin 2x-\cos 2x=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$.

因此，函数$f(x)$的最小正周期为π.

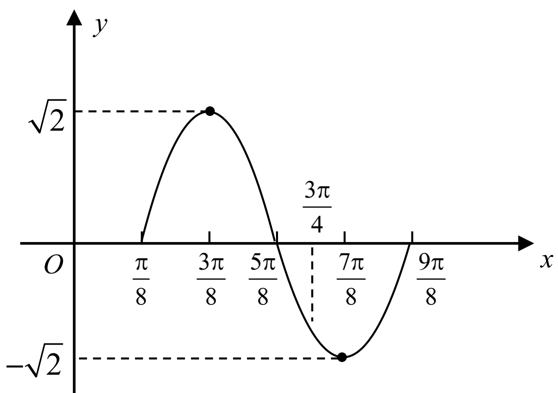
（Ⅱ）解法一：因为$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$在区间$\left[\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8}\right]$上为增函数，在区间$\left[\frac{3\pi}{8},\frac{3\pi}{4}\right]$

上为减函数，又 $f\left(\frac{\pi}{8}\right)=0$， $f\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\sqrt{2}$，

$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}=-1$，

故函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{4}\right]$ 上的最大值为 $\sqrt{2}$，最小值为 -1.

解法二：作函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 在长度为一个周期的区间 $\left[\frac{\pi}{8},\frac{9\pi}{4}\right]$ 上的图象如下：



由图象得函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{4}\right]$

上的最大值为 $\sqrt{2}$，最小值为 $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-1$.

18．本小题主要考查互斥事件、相互独立事件、离散型随机变量的分布列和数学期望等基础知识，考查运用概率知识解决实际问题的能力．满分 12 分．

（Ⅰ）解：设“从甲盒内取出的 2 个球均为黑球”为事件 A，“从乙盒内取出的 2 个球均为黑球”为事件 B．由于事件 A，B 相互独立，且 $P(A)=\frac{C_3^2}{C_4^2}=\frac{1}{2}$， $P(B)=\frac{C_4^2}{C_6^2}=\frac{2}{5}$.

故取出的 4 个球均为黑球的概率为 $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$.

（Ⅱ）解：设“从甲盒内取出的 2 个球均为黑球；从乙盒内取出的 2 个球中，1 个是红球，1 个是黑球”为事件 C，“从甲盒内取出的 2 个球中，1 个是红球，1 个是黑球；从乙盒内取出的 2 个球均为黑球”为事件 D．由于事件 C，D 互斥，

且 $P(C)=\frac{C_3^2}{C_4^2}\cdot\frac{C_2^1\cdot C_4^1}{C_6^2}=\frac{4}{15}$， $P(D)=\frac{C_3^1}{C_4^2}\cdot\frac{C_4^2}{C_6^2}=\frac{1}{5}$.

故取出的 4 个球中恰有 1 个红球的概率为 $P(C+D)=P(C)+P(D)=\frac{4}{15}+\frac{1}{5}=\frac{7}{15}$.

（Ⅲ）解：ξ可能的取值为$0,1,2,3$．由（Ⅰ），（Ⅱ）得$P(\xi=0)=\dfrac{1}{5}$，$P(\xi=1)=\dfrac{7}{15}$，

$P(\xi=3)=\dfrac{C_3^1}{C_4^2}\cdot\dfrac{1}{C_6^2}=\dfrac{1}{30}$．从而$P(\xi=2)=1-P(\xi=0)-P(\xi=1)-P(\xi=3)=\dfrac{3}{10}$．

ξ的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{7}{15}$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{1}{30}$

ξ的数学期望$E\xi=0\times\dfrac{1}{5}+1\times\dfrac{7}{15}+2\times\dfrac{3}{10}+3\times\dfrac{1}{30}=\dfrac{7}{6}$．

19．本小题考查直线与直线垂直、直线与平面垂直、二面角等基础知识，考查空间想象能力、运算能力和推理论证能力．满分 12 分．

（Ⅰ）证明：在四棱锥$P-ABCD$中，因$PA\perp$底面$ABCD$，$CD\subset$平面$ABCD$，故$PA\perp CD$．

$\because AC\perp CD,\ PA\cap AC=A$，$\therefore CD\perp$平面$PAC$．

而$AE\subset$平面PAC，$\therefore CD\perp AE$．

（Ⅱ）证明：由$PA=AB=BC$，$\angle ABC=60^\circ$，可得$AC=PA$．

$\because E$是PC的中点，$\therefore AE\perp PC$．

由（Ⅰ）知，$AE\perp CD$，且$PC\cap CD=C$，所以$AE\perp$平面PCD．

而$PD\subset$平面PCD，$\therefore AE\perp PD$．

$\because PA\perp$底面$ABCD$，PD在底面$ABCD$内的射影是AD，$AB\perp AD$，$\therefore AB\perp PD$．

又$\because AB\cap AE=A$，综上得$PD\perp$平面ABE．

（Ⅲ）解法一：过点A作$AM\perp PD$，垂足为M，连结EM．则（Ⅱ）知，$AE\perp$平面PCD，AM在平面PCD内的射影是EM，则$EM\perp PD$．

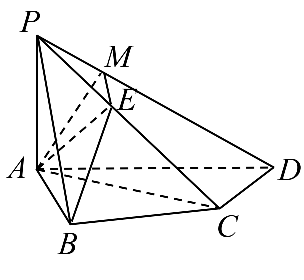
因此$\angle AME$是二面角$A-PD-C$的平面角．

由已知，得$\angle CAD=30^\circ$．设$AC=a$，

可得$PA=a,\ AD=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a,\ PD=\dfrac{\sqrt{21}}{3}a,\ AE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$．

在$\mathbf{Rt}\triangle ADP$中，$\because AM\perp PD$，$\therefore AM\cdot PD=PA\cdot AD$，

则$AM=\dfrac{PA\cdot AD}{PD}=\dfrac{a\cdot\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a}{\dfrac{\sqrt{21}}{3}a}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}a$．



在$\mathbf{Rt}\triangle AEM$中，$\sin AME=\dfrac{AE}{AM}=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$．

所以二面角$A-PD-C$的大小是$\arcsin\dfrac{\sqrt{14}}{4}$．

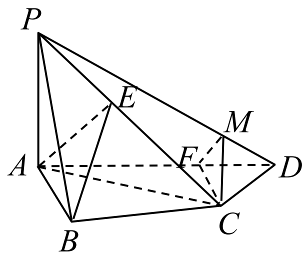
解法二：由题设 $PA \perp$ 底面 $ABCD$，$PA \subset$ 平面 PAD，则平面 $PAD \perp$ 平面 ACD，交线为 AD.

过点 C 作 $CF \perp AD$，垂足为 F，故 $CF \perp$ 平面 PAD. 过点 F 作 $FM \perp PD$，垂足为 M，连结 CM，故 $CM \perp PD$. 因此 $\angle CMP$ 是二面角 $A-PD-C$ 的平面角.

由已知，可得 $\angle CAD = 30^\circ$，设 $AC = a$，

可得 $PA = a,\ AD = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}a,\ PD = \dfrac{\sqrt{21}}{3}a,\ CF = \dfrac{1}{2}a,\ FD = \dfrac{\sqrt{3}}{6}a$.

$\because \triangle FMD \backsim \triangle PAD$，$\therefore \dfrac{FM}{PA} = \dfrac{FD}{PD}$.



于是，$FM = \dfrac{FD \cdot PA}{PD} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{6}a \cdot a}{\dfrac{\sqrt{21}}{3}a} = \dfrac{\sqrt{7}}{14}a$.

在 $\mathbf{Rt}\triangle CMF$ 中，$\tan CMF = \dfrac{CF}{FM} = \dfrac{\dfrac{1}{2}a}{\dfrac{\sqrt{7}}{14}a} = \sqrt{7}$.

所以二面角 $A-PD-C$ 的大小是 $\arctan\sqrt{7}$.

20．本小题考查导数的几何意义，两个函数的和、差、积、商的导数，利用导数研究函数的单调性和极值等基础知识，考查运算能力及分类讨论的思想方法．满分 12 分．

（Ⅰ）解：当 $a=1$ 时，$f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$，$f(2) = \dfrac{4}{5}$，

又 $f'(x) = \dfrac{2(x^2+1) - 2x\ 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$，$f'(2) = -\dfrac{6}{25}$.

所以，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,\ f(2))$ 处的切线方程为 $y - \dfrac{4}{5} = -\dfrac{6}{25}(x-2)$，

即 $6x+2y-32=0$.

（Ⅱ）解：$f'(x) = \dfrac{2a(x^2+1) - 2x(2ax - a^2+1)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-2(x-a)(ax+1)}{(x^2+1)^2}$.

由于 $a \neq 0$，以下分两种情况讨论.

（1）当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得到 $x_1 = -\dfrac{1}{a}$，$x_2 = a$. 当 x 变化时，$f'(x),\ f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$\left(-\infty, -\dfrac{1}{a}\right)$	$\dfrac{1}{a}$	$\left(-\dfrac{1}{a},\ a\right)$	a	$(a, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$f(x)$	$+$	极小值	↗	极大值	↘

所以 $f(x)$ 在区间 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{a}\right)$，$(a,+\infty)$ 内为减函数，在区间 $\left(-\dfrac{1}{a},\ a\right)$ 内为增函数.

函数 $f(x)$ 在 $x_1=-\dfrac{1}{a}$ 处取得极小值 $f\left(-\dfrac{1}{a}\right)$，且 $f\left(-\dfrac{1}{a}\right)=-a^2$，

函数 $f(x)$ 在 $x_2=\dfrac{1}{a}$ 处取得极大值 $f(a)$，且 $f(a)=1$.

（2）当 $a<0$ 时，令 $f'(x)=0$，得到 $x_1=a,\ x_2=-\dfrac{1}{a}$，当 x 变化时，$f'(x),\ f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,\ a)$	a	$\left(a,-\dfrac{1}{a}\right)$	$-\dfrac{1}{a}$	$\left(-\dfrac{1}{a},\ +\infty\right)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,\ a)$，$\left(-\dfrac{1}{a},\ +\infty\right)$ 内为增函数，在区间 $\left(a,-\dfrac{1}{a}\right)$ 内为减函数.

函数 $f(x)$ 在 $x_1=a$ 处取得极大值 $f(a)$，且 $f(a)=1$.

函数 $f(x)$ 在 $x_2=-\dfrac{1}{a}$ 处取得极小值 $f\left(-\dfrac{1}{a}\right)$，且 $f\left(-\dfrac{1}{a}\right)=-a^2$.

21．本小题以数列的递推关系式为载体，主要考查等比数列的前 n 项和公式、数列求和、不等式的证明等基础知识与基本方法，考查归纳、推理、运算及灵活运用数学知识分析问题和解决问题的能力．满分 14 分．

（Ⅰ）解法一：$a_2=2\lambda+\lambda^2+(2-\lambda)2=\lambda^2+2^2$，

$a_3=\lambda(\lambda^2+2^2)+\lambda^3+(2-\lambda)2^2=2\lambda^3+2^3$，

$a_4=\lambda(2\lambda^3+2^3)+\lambda^4+(2-\lambda)2^3=3\lambda^4+2^4$.

由此可猜想出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=(n-1)\lambda^n+2^n$.

以下用数学归纳法证明.

（1）当 $n=1$ 时，$a_1=2$，等式成立.

（2）假设当 $n=k$ 时等式成立，即 $a_k=(k-1)\lambda^k+2^k$，

那么$a_{k+1}=\lambda a_1+\lambda^{k+1}+(2-\lambda)2^k=\lambda(k-1)\lambda^k+\lambda 2^k+\lambda^{k+1}+2^{k+1}-\lambda 2^k$

$=[(k+1)-1]\lambda^{k+1}+2^{k+1}$.

这就是说，当$n=k+1$时等式也成立．根据（1）和（2）可知，等式$a_n=(n-1)\lambda^n+2^n$对任何$n\in\mathbf{N}^*$都成立．

解法二：由$a_{n+1}=\lambda a_n+\lambda^{n+1}+(2-\lambda)2^n(n\in\mathbf{N}^*)$，$\lambda>0$，

可得$\dfrac{a_{n+1}}{\lambda^{n+1}}-\left(\dfrac{2}{\lambda}\right)^{n+1}=\dfrac{a_n}{\lambda^n}-\left(\dfrac{2}{\lambda}\right)^n+1$，

所以$\left\{\dfrac{a_n}{\lambda^n}-\left(\dfrac{2}{\lambda}\right)^n\right\}$为等差数列，其公差为 1，首项为 0，故$\dfrac{a_n}{\lambda_n}-\left(\dfrac{2}{\lambda}\right)^n=n-1$，所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=(n-1)\lambda^n+2^n$．

（Ⅱ）解：设$T_n=\lambda^2+2\lambda^3+3\lambda^4+\cdots+(n-2)\lambda^{n-1}+(n-1)\lambda^n$，　　①

$\lambda T_n=\lambda^3+2\lambda^4+3\lambda^5+\cdots+(n-2)\lambda^n+(n-1)\lambda^{n+1}$　　②

当$\lambda\neq1$时，①式减去②式，

得$(1-\lambda)T_n=\lambda^2+\lambda^3+\cdots+\lambda^n-(n-1)\lambda^{n+1}=\dfrac{\lambda^2-\lambda^{n+1}}{1-\lambda}-(n-1)\lambda^{n+1}$，

$$T_n=\frac{\lambda^2-\lambda^{n+1}}{(1-\lambda)^2}-\frac{(n-1)\lambda^{n+1}}{1-\lambda}=\frac{(n-1)\lambda^{n+2}-n\lambda^{n+1}+\lambda^2}{(1-\lambda)^2}.$$

这时数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=\dfrac{(n-1)\lambda^{n+2}-n\lambda^{n+1}+\lambda^2}{(1-\lambda)^2}+2^{n+1}-2$．

当$\lambda=1$时，$T_n=\dfrac{n(n-1)}{2}$．这时数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=\dfrac{n(n-1)}{2}+2^{n+1}-2$．

（Ⅲ）证明：通过分析，推测数列$\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$的第一项$\dfrac{a_2}{a_1}$最大，下面证明：

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{\lambda^2+4}{2},n\geqslant2$．　　③

由$\lambda>0$知$a_n>0$，要使③式成立，只要$2a_{n+1}<(\lambda^2+4)a_n(n\geqslant2)$，

因为$(\lambda^2+4)a_n=(\lambda^2+4)(n-1)\lambda^n+(\lambda^2+1)2^n$

$> 4\lambda\ (n-1)\lambda^n + 4\times 2^n = 4(n-1)\lambda^{n+1} + 2^{n+2}$

$\geqslant 2n\lambda^{n+1} + 2^{n+2} = 2a_{n+1}$，$n\geqslant 2$．

所以③式成立．

因此，存在$k=1$，使得$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\dfrac{a_{k+1}}{a_k}=\dfrac{a_2}{a_1}$对任意$n\in\mathbf{N}^*$均成立．

22．本小题主要考查椭圆的标准方程和几何性质、直线方程、求曲线的方程等基础知识，考查曲线和方程的关系等解析几何的基本思想方法及推理、运算能力．满分 14 分．

（Ⅰ）证法一：由题设$AF_2\perp F_1F_2$及$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，不妨设点$A(c,\ y)$，其中$y>0$．由于点A在椭圆上，有$\dfrac{c^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，即$\dfrac{a^2-b^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$．

解得$y=\dfrac{b^2}{a}$，从而得到$A\left(c,\dfrac{b^2}{a}\right)$．

直线AF_1的方程为$y=\dfrac{b^2}{2ac}(x+c)$，整理得$b^2x-2acy+b^2c=0$．

由题设，原点O到直线AF_1的距离为$\dfrac{1}{3}|OF_1|$，即$\dfrac{c}{3}=\dfrac{b^2c}{\sqrt{b^4+4a^2c^2}}$，

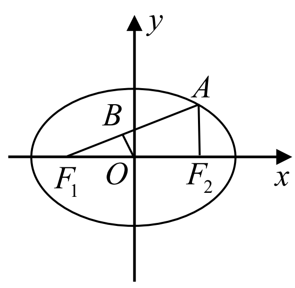
将$c^2=a^2-b^2$代入上式并化简得$a^2=2b^2$，即$a=\sqrt{2}b$．

证法二：同证法一，得到点A的坐标为$\left(c,\dfrac{b^2}{a}\right)$．

过点O作$OB\perp AF_1$，垂足为B，易知$\triangle F_1BO\backsim\triangle F_1F_2A$，故$\dfrac{|BO|}{|OF_1|}=\dfrac{|F_2A|}{|F_1A|}$．

由椭圆定义得$|AF_1|+|AF_2|=2a$，又$|BO|=\dfrac{1}{3}|OF_1|$，

所以$\dfrac{1}{3}=\dfrac{|F_2A|}{|F_1A|}=\dfrac{|F_2A|}{2a-|F_2A|}$，



解得$|F_2A|=\dfrac{a}{2}$，而$|F_2A|=\dfrac{b^2}{a}$，得$\dfrac{b^2}{a}=\dfrac{a}{2}$，即$a=\sqrt{2}b$．

（Ⅱ）解法一：设点D的坐标为$(x_0,\ y_0)$．

当$y_0\neq 0$时，由$OD\perp Q_1Q_2$知，直线Q_1Q_2的斜率为$-\dfrac{x_0}{y_0}$，所以直线Q_1Q_2的方程为

$y=-\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)+y_0$，或 $y=kx+m$，其中 $k=-\frac{x_0}{y_0}$， $m=y_0+\frac{x_0^2}{y_0}$.

点 $Q_1(x_1, y_1)$， $Q_2(x_2, y_2)$ 的坐标满足方程组 $\begin{cases} y=kx+m, \\ x^2+2y^2=2b^2. \end{cases}$

将①式代入②式，得 $x^2+2(kx+m)^2=2b^2$，

整理得 $(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-2b^2=0$，

于是 $x_1+x_2=-\frac{4km}{1+2k^2}$， $x_1x_2=\frac{2m^2-2b}{1+2k^2}$.

由①式得 $y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+k^2$

$=k^2\,\frac{2m^2-2b^2}{1+2k^2}+km\,\frac{-4km}{1+2k}+m^2=\frac{m^2-2b^2k^2}{1+2k^2}$.

由 $OQ_1\perp OQ_2$ 知 $x_1x_2+y_1y_2=0$. 将③式和④式代入得 $\frac{3m^2-2b^2-2b^2k^2}{1+2k^2}=0$，

$3m^2=2b^2(1+k^2)$.

将 $k=-\frac{x_0}{y_0}$， $m=y_0+\frac{x_0^2}{y_0}$ 代入上式，整理得 $x_0^2+y_0^2=\frac{2}{3}b^2$.

当 $y_0=0$ 时，直线 Q_1Q_2 的方程为 $x=x_0$， $Q_1(x_1, y_1)$， $Q_2(x_2, y_2)$ 的坐标满足方程组

$\begin{cases} x=x_0, \\ x^2+2y^2=2b^2. \end{cases}$

所以 $x_1=x_2=x_0$， $y_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{2b^2-x_0^2}{2}}$.

由 $OQ_1\perp OQ_2$ 知 $x_1x_2+y_1y_2=0$，即 $x_0^2-\frac{2b^2-x_0^2}{2}=0$，

解得 $x_0^2=\frac{2}{3}b^2$.

这时，点 D 的坐标仍满足 $x_0^2+y_0^2=\frac{2}{3}b^2$.

综上，点 D 的轨迹方程为 $x^2+y^2=\frac{2}{3}b^2$.

解法二：设点 D 的坐标为 (x_0, y_0)，直线 OD 的方程为 $y_0x-x_0y=0$，由

$OD \perp Q_1Q_2$，垂足为 D，可知直线 Q_1Q_2 的方程为 $x_0x+y_0y=x_0^2+y_0^2$.

记 $m=x_0^2+y_0^2$（显然 $m\neq 0$），点 $Q_1(x_1,\ y_1)$，$Q_2(x_2,\ y_2)$ 的坐标满足方程组

$$\begin{cases} x_0x+y_0y=m, & ① \\ x^2+2y^2=2b^2. & ② \end{cases}$$

由①式得 $y_0y=m-x_0x$.　　③

由②式得 $y_0^2x^2+2y_0^2y^2=2y_0^2b^2$.　　④

将③式代入④式得 $y_0^2x^2+2(m-x_0x)^2=2y_0^2b^2$.

整理得 $(2x_0^2+y_0^2)x^2-4mx_0x+2m^2-2b^2y_0^2=0$，

于是 $x_1x_2=\dfrac{2m^2-2b^2y_0^2}{2x_0^2+y_0^2}$.　　⑤

由①式得 $x_0x=m-y_0y$.　　⑥

由②式得 $x_0^2x^2+2x_0^2y^2=2x_0^2b^2$.　　⑦

将⑥式代入⑦式得 $(m-y_0y)^2+2x_0^2y^2=2x_0^2b^2$，

整理得 $(2x_0^2+y_0^2)y^2-2my_0y+m^2-2b^2x_0^2=0$，

于是 $y_1y_2=\dfrac{m^2-2b^2x_0^2}{2x_0^2+y_0^2}$.　　⑧

由 $OQ_1 \perp OQ_2$ 知 $x_1x_2+y_1y_2=0$. 将⑤式和⑧式代入得 $\dfrac{2m^2-2b^2y_0^2}{2x_0^2+y_0^2}+\dfrac{m^2-2b^2x_0^2}{2x_0^2+y_0^2}=0$，

$3m^2-2b^2(x_0^2+y_0^2)=0$.

将 $m=x_0^2+y_0^2$ 代入上式，得 $x_0^2+y_0^2=\dfrac{2}{3}b^2$.

所以，点 D 的轨迹方程为 $x^2+y^2=\dfrac{2}{3}b^2$.