

# 2011年天津高考文科数学试题及答案详细解析 (天津卷)

参考公式:

如果事件A, B互斥, 那么

棱柱的体积公式  $V = Sh$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

其中S表示棱柱的底面面积。

一、选择题: 在每小题给出的四个选项中只有一项是符合题目要求的。

1.  $i$  是虚数单位, 复数  $\frac{1-3i}{1-i} =$

- A.  $2-i$                       B.  $2+i$                       C.  $-1-2i$                       D.  $-1+2i$

2. 设变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x \geq 1, \\ x+y-4 \leq 0, \\ x-3y+4 \leq 0, \end{cases}$  则目标函数  $z = 3x - y$  的

最大值为

- A. -4                      B. 0  
C.  $\frac{4}{3}$                       D. 4

3. 阅读右边的程序框图, 运行相应的程序, 若输入  $x$  的值为-

4, 则输出  $y$  的值为

- A. 0.5                      B. 1  
C. 2                      D. 4

4. 设集合  $A = \{x \in R \mid x-2 > 0\}, B = \{x \in R \mid x < 0\},$

$$C = \{x \in R \mid x(x-2) > 0\},$$

则“ $x \in A \cup B$ ”是“ $x \in C$ ”的

- A. 充分而不必要条件                      B. 必要而不充分条件  
C. 充分必要条件                      D. 即不充分也不必要条件

5. 已知  $a = \log_2 3.6, b = \log_4 3.2, c = \log_4 3.6$  则

- A.  $a > b > c$                       B.  $a > c > b$                       C.  $b > a > c$                       D.  $c > a > b$

6. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左顶点与抛物线  $y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点的距

离为4, 且双曲线的一条渐近线与抛物线的准线的准线的交点坐标为  $(-2, -$

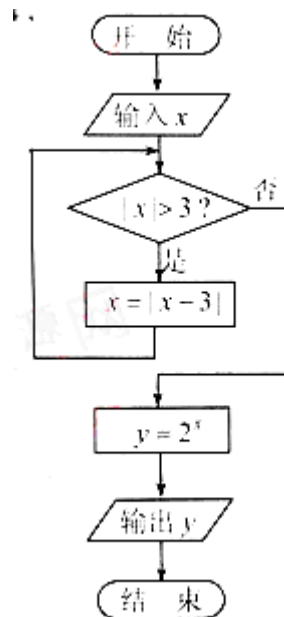
$1)$ , 则双曲线的焦距为 ( )

- A.  $2\sqrt{3}$                       B.  $2\sqrt{5}$                       C.  $4\sqrt{3}$                       D.  $4\sqrt{5}$

7. 已知函数  $f(x) = 2 \sin(\omega x + \varphi), x \in R,$  其中  $\omega > 0, -\pi < \varphi \leq \pi,$  若  $f(x)$  的最小正周期

为  $6\pi,$  且当  $x = \frac{\pi}{2}$  时,  $f(x)$  取得最大值, 则 ( )

- A.  $f(x)$  在区间  $[-2\pi, 0]$  上是增函数                      B.  $f(x)$  在区间  $[-3\pi, -\pi]$  上是增函数  
C.  $f(x)$  在区间  $[3\pi, 5\pi]$  上是减函数                      D.  $f(x)$  在区间  $[4\pi, 6\pi]$  上是减函数



8. 对实数  $a$  和  $b$ , 定义运算“ $\otimes$ ”:  $a \otimes b = \begin{cases} a, a-b \leq 1, \\ b, a-b > 1. \end{cases}$  设函数

$f(x) = (x^2 - 2) \otimes (x - 1), x \in R$ . 若函数  $y = f(x) - c$  的图象与  $x$  轴恰有两个公共点, 则实数  $c$  的取值范围是 ( )

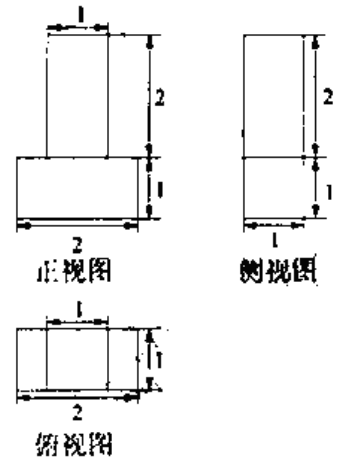
- A.  $(-1, 1] \cup (2, +\infty)$  B.  $(-2, -1] \cup (1, 2]$  C.  $(-\infty, -2) \cup (1, 2]$  D.  $[-2, -1]$

二、填空题: 本大题共6小题, 每小题5分, 共30分.

9. 已知集合  $A = \{x \in R \mid |x-1| < 2\}$ ,  $Z$  为整数集, 则集合

$A \cap Z$  中所有元素的和等于\_\_\_\_\_

10. 一个几何体的三视图如图所示(单位:  $m$ ), 则该几何体的体积为\_\_\_\_\_  $m^3$



11. 已知  $\{a_n\}$  为等差数列,  $S_n$  为其前  $n$  项和,  $n \in N^*$ ,

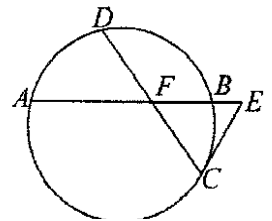
若  $a_3 = 16, S_{20} = 20$ , 则  $S_{10}$  的值为\_\_\_\_\_

12. 已知  $\log_2 a + \log_2 b \geq 1$ , 则  $3^a + 9^b$  的最小值为\_\_\_\_\_

13. 如图已知圆中两条弦  $AB$  与  $CD$  相交于点  $F$ ,  $E$  是  $AB$  延长

线上一点, 且  $DF = CF = \sqrt{2}, AF : FB : BE = 4 : 2 : 1$ .

若  $CE$  与圆相切, 则  $CE$  的长为\_\_\_\_\_



14. 已知直角梯形  $ABCD$  中,  $AD \parallel BC, \angle ADC = 90^\circ, AD = 2, BC = 1$ ,

$P$  是腰  $DC$  上的动点, 则  $|\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB}|$  的最小值为\_\_\_\_\_

三、解答题: 本大题共6小题, 共80分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 编号为  $A_1, A_2, \dots, A_{16}$  的16名篮球运动员在某次训练比赛中的得分记录如下:

运动员编号	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$A_7$	$A_8$
得分	15	35	21	28	25	36	18	34
运动员编号	$A_9$	$A_{10}$	$A_{11}$	$A_{12}$	$A_{13}$	$A_{14}$	$A_{15}$	$A_{16}$
得分	17	26	25	33	22	12	31	38

(I) 将得分在对应区间内的人数填入相应的空格:

区间	$[10, 20)$	$[20, 30)$	$[30, 40]$
人数			

(II) 从得分在区间  $[20, 30)$  内的运动员中随机抽取2人,

(i) 用运动员的编号列出所有可能的抽取结果; (ii) 求这2人得分之和大于50的概率

16.

在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 已知  $B = C, 2b = \sqrt{3}a$ .

(I) 求  $\cos A$  的值;

(II)  $\cos(2A + \frac{\pi}{4})$  的值.

17. (本小题满分13分) 如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  为

平行四边形,  $\angle ADC = 45^\circ$ ,  $AD = AC = 1$ ,  $O$  为  $AC$  中点,

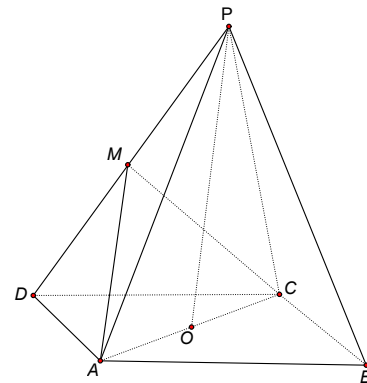
$PO \perp$  平面  $ABCD$ ,  $PO = 2$ ,

$M$  为  $PD$  中点.

(I) 证明:  $PB \parallel$  平面  $ACM$ ;

(II) 证明:  $AD \perp$  平面  $PAC$ ;

(III) 求直线  $AM$  与平面  $ABCD$  所成角的正切值.



18. (本小题满分13分)

设椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ . 点  $P(a, b)$  满足

$$|PF_2| = |F_1F_2|.$$

(I) 求椭圆的离心率  $e$ ;

(II) 设直线  $PF_2$  与椭圆相交于  $A, B$  两点, 若直线  $PF_2$  与圆

$$(x+1)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 16$$

相交于  $M, N$  两点, 且  $|MN| = \frac{5}{8}|AB|$ , 求椭圆的方程

19. (本小题满分14分) 已知函数  $f(x) = 4x^3 + 3tx^2 - 6tx + t - 1, x \in R$ , 其中  $t \in R$ .

(I) 当  $t = 1$  时, 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(0, f(0))$  处的切线方程;

(II) 当  $t \neq 0$  时, 求  $f(x)$  的单调区间;

(III) 证明: 对任意的  $t \in (0, +\infty)$ ,  $f(x)$  在区间  $(0, 1)$  内均存在零点.

20. (本小题满分14分)

已知数列  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$  满足

$$b_{n+1}a_n + b_n a_{n+1} = (-2)^n + 1, b_n = \frac{3 + (-1)^{n-1}}{2}, n \in N^*, \text{且} a_1 = 2.$$

(I) 求  $a_2, a_3$  的值;

(II) 设  $c_n = a_{2n+1} - a_{2n-1}, n \in N^*$ , 证明  $\{c_n\}$  是等比数列;

(III) 设  $S_n$  为  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 证明  $\frac{S_1}{a_1} + \frac{S_2}{a_2} + \dots + \frac{S_{2n-1}}{a_{2n-1}} + \frac{S_{2n}}{a_{2n}} \leq n - \frac{1}{3} (n \in N^*)$ .

参考答案

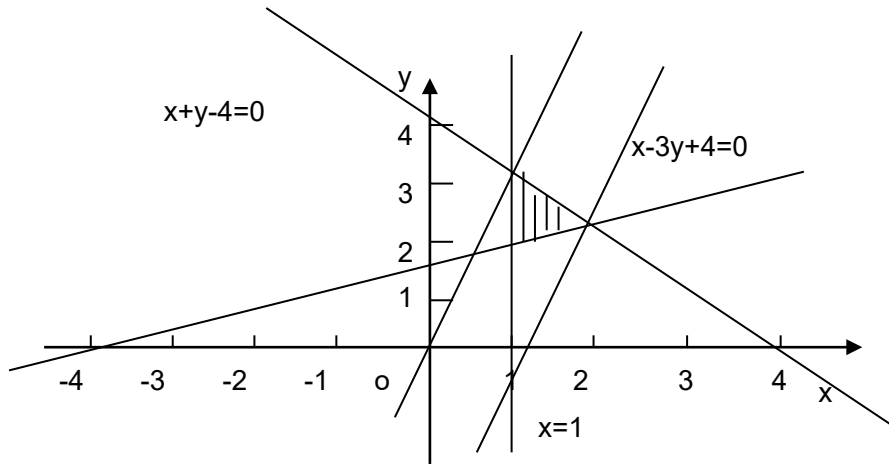
一、选择题：本题考查基本知识和基本运算，每小题5分，满分40分。

1. 【答案】A

【解析】  $\frac{1-3i}{1-i} = \frac{(1-3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{4-2i}{2} = 2-i.$

2. 【答案】D

【解析】可行域如图：



联立  $\begin{cases} x+y+4=0 \\ x-3y+4=0 \end{cases}$  解得  $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$  当目标直线  $z=3x-y$  移至  $(2,2)$  时， $z=3x-y$  有最大

值4.

3. 【答案】C

【解析】当  $x=-4$  时， $x=|x-3|=7$ ；

当  $x=7$  时， $x=|x-3|=4$

当  $x=4$  时， $x=|x-3|=1 < 3$ ，

$\therefore y=2^x=2.$

4. 【答案】C

【解析】 $\because A = \{x \in \mathbb{R} \mid x-2 > 0\}$ ， $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ ，

$\therefore A \cup B = \{x \mid x < 0, \text{ 或 } x > 2\}$ ，又  $\because C = \{x \in \mathbb{R} \mid x(x-2) > 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ 或 } x > 2\}$ ，

$\therefore A \cup B = C$ ，即“ $x \in A \cup B$ ”是“ $x \in C$ ”的充分必要条件.

5. 【答案】B

【解析】 $\because a = \log_2^{3.6} > \log_2^2 = 1$ ，又  $\because y = \log_4^x$  为单调递增函数，

$\therefore \log_4^{3.2} < \log_4^{3.6} < \log_4^4 = 1$ ，

$\therefore b < c < a.$

6. 【答案】B

【解析】双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{5} = 1$  的渐近线为  $y = \pm \frac{b}{a}x$ ，由双曲线的一条渐近线与抛物线的准

线的交点坐标为  $(-2, -1)$  得  $-\frac{p}{2} = 2$ , 即  $p = 4$ ,

又  $\frac{p}{2} + a = 4$ ,  $\therefore a = 2$ , 将  $(-2, -1)$  代入  $y = \frac{b}{a}x$  得  $b = 1$ ,

$\therefore c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$ , 即  $2c = 2\sqrt{5}$ .

7. 【答案】A

【解析】 $\because \frac{2\pi}{\omega} = 6\pi$ ,  $\therefore \omega = \frac{1}{3}$ . 又  $\because \frac{1}{3} \times \frac{\pi}{2} + = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$  且  $-\pi < 4 < \pi$ ,

$\therefore$  当  $k = 0$  时,  $\varphi = \frac{\pi}{3}, f(x) = 2\sin(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{3})$ , 要使  $f(x)$  递增, 须有

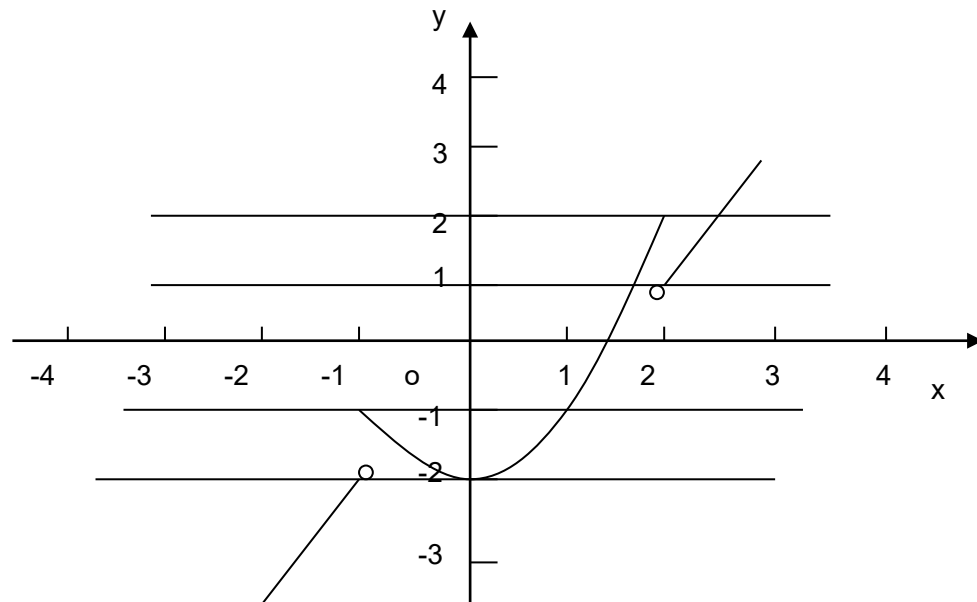
$2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq \frac{1}{3}x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ , 解之得  $6k\pi - \frac{5\pi}{2} \leq x \leq 6k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ , 当  $k = 0$

时,  $-\frac{5}{2}\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $\therefore f(x)$  在  $[-\frac{5}{2}\pi, \frac{\pi}{2}]$  上递增.

8. 【答案】B

$$\begin{aligned} \text{【解析】 } f(x) &= \begin{cases} x^2 - 2, & x^2 - 2 - (x-1) \leq 1 \\ x - x^2, & x^2 - 2 - (x-1) > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} x^2 - 2, & -1 \leq x \leq 2 \\ x - 1, & x < -1, \text{ 或 } x > 2 \end{cases} \end{aligned}$$

则  $f(x)$  的图象如图,



$\therefore$  函数  $y = f(x) - c$  的图象与  $x$  轴恰有两个公共点,

$\therefore$  函数  $y = f(x)$  与  $y = c$  的图象有两个交点, 由图象可得  $-2 < c \leq 1$ , 或  $1 < c \leq 2$ .

二、填空题: 本题考查基本知识和基本运算, 每小题5分, 满分30分.

9. 【答案】3

【解析】  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x-1| < 2\} = \{x \mid -1 < x < 3\} \therefore A \cap \mathbb{Z} = \{0, 1, 2\}$ , 即  $0 + 1 + 2 = 3$ .

10. 【答案】 4

【解析】  $v = 2 \times 1 \times 1 + 1 \times 1 \times 2 = 4$ .

11. 【答案】 110

【解析】 设等差数列的首项为  $a_1$ , 公差为  $d$ , 由题意得,

$$\begin{cases} a_3 = a_1 + 2d = 16 \\ S_{20} = 20a_1 + \frac{20 \times 19}{2} \times (-2) = 20 \end{cases}, \text{解之得 } a_1 = 20, d = -2, \therefore$$

$$s_{10} = 10 \times 20 + \frac{10 \times 9}{2} \times (-2) = 110.$$

12. 【答案】 18

【解析】  $\because \log_2^a + \log_2^b = \log_2^{ab} \geq 1$ ,

$$\therefore ab \geq 2,$$

$$\therefore 3^a + 9^b = 3^a + 3^{2b} \geq 2\sqrt{3^a \cdot 3^{2b}} = 2\sqrt{3^{a+2b}} \geq 2\sqrt{3^{2\sqrt{2ab}}} = 18.$$

13. 【答案】  $\frac{\sqrt{7}}{2}$

【解析】 设  $AF = 4k$ ,  $BF = 2k$ ,  $BE = k$ , 由  $DF \cdot FC = AF \cdot BF$  得  $2 = 8k^2$ , 即

$$k = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore AF = 2, BF = 1, BE = \frac{1}{2}, AE = \frac{7}{2},$$

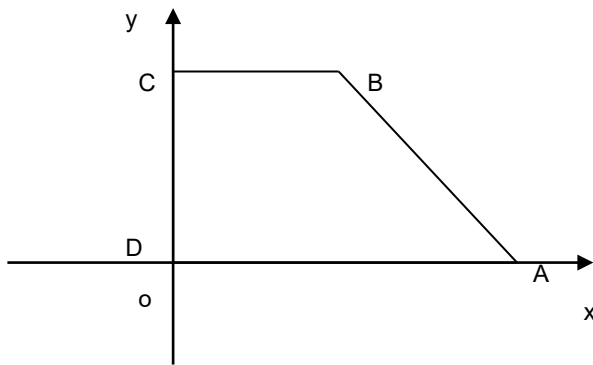
$$\text{由切割定理得 } CE^2 = BE \cdot EA = \frac{1}{2} \times \frac{7}{2} = \frac{7}{4},$$

$$\therefore CE = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

14. 【答案】 5

【解析】 建立如图所示的坐标系, 设  $PC = h$ , 则  $A(2, 0), B(1, h)$ , 设  $P(0, y), (0 \leq y \leq h)$

$$\text{则 } \overrightarrow{PA} = (2, -y), \overrightarrow{PB} = (1, h-y), \therefore |\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB}| = \sqrt{25 + (3h-4y)^2} \geq \sqrt{25} = 5.$$



### 三、解答题

(15) 本小题主要考查用列举法计算随机事件所含的基本事件数、古典概型及其概率计算公式的等基础知识，考查数据处理能力及运用概率知识解决简单的实际问题的能力，满分13分。

(I) 解：4, 6, 6

(II) (i) 解：得分在区间 $[20, 30)$ 内的运动员编号为 $A_3, A_4, A_5, A_{10}, A_{11}, A_{13}$ 。从中随机抽取2人，所有可能的抽取结果有：

$\{A_3, A_4\}, \{A_3, A_5\}, \{A_3, A_{10}\}, \{A_3, A_{11}\}, \{A_3, A_{13}\}, \{A_4, A_5\}, \{A_4, A_{10}\},$

$\{A_4, A_{11}\}, \{A_4, A_{13}\}, \{A_5, A_{10}\}, \{A_5, A_{11}\}, \{A_5, A_{13}\}, \{A_{10}, A_{11}\}, \{A_{10}, A_{13}\}, \{A_{11}, A_{13}\},$

共15种。

(ii) 解：“从得分在区间 $[20, 30)$ 内的运动员中随机抽取2人，这2人得分之和大于50”

(记为事件B)的所有可能结果有： $\{A_4, A_5\}, \{A_4, A_{10}\}, \{A_4, A_{11}\}, \{A_5, A_{10}\}, \{A_{10}, A_{11}\}$ ，共5种。

$$\text{所以 } P(B) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

(16) 本小题主要考查余弦定理、两角和的余弦公式、同角三角函数的基本关系、二倍角的正弦、余弦公式等基础知识，考查基本运算能力，满分13分。

(I) 解：由 $B = C, 2b = \sqrt{3}a$ , 可得 $c = b = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

$$\text{所以 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{4}a^2 - a^2}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{1}{3}.$$

(II) 解：因为 $\cos A = \frac{1}{3}, A \in (0, \pi)$ , 所以 $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$$\cos 2A = -2\cos^2 A - 1 = -\frac{7}{9}. \text{ 故 } \sin 2A = 2\sin A \cos A = \frac{4\sqrt{2}}{9}.$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \cos\left(2A + \frac{\pi}{4}\right) &= \cos 2A \cos \frac{\pi}{4} - \sin 2A \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \left(-\frac{7}{9}\right) \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{4\sqrt{2}}{9} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{8+7\sqrt{2}}{18}. \end{aligned}$$

(17) 本小题主要考查直线与平面平行、直线与平面垂直、直线与平面所成的角等基础知识，考查空间想象能力、运算能力和推理论证能力。满分13分。

(I) 证明: 连接BD, MO, 在平行四边形ABCD中, 因为O为AC的中点, 所以O为BD的中点, 又M为PD的中点, 所以PB//MO。因为  $PB \not\subset$  平面ACM,  $MO \subset$  平面ACM, 所以PB//平面ACM。

(II) 证明: 因为  $\angle ADC = 45^\circ$ , 且  $AD=AC=1$ , 所以  $\angle DAC = 90^\circ$ , 即  $AD \perp AC$ , 又  $PO \perp$  平面ABCD,  $AD \subset$  平面ABCD, 所以  $PO \perp AD$ , 而  $AC \cap PO = O$ , 所以  $AD \perp$  平面PAC。

(III) 解: 取DO中点N, 连接MN, AN, 因为M为PD的中点, 所以  $MN \parallel PO$ , 且  $MN = \frac{1}{2}PO = 1$ , 由  $PO \perp$  平面ABCD, 得  $MN \perp$  平面ABCD, 所以  $\angle MAN$  是直线AM与平面ABCD所成的角, 在  $Rt\triangle DAO$  中,  $AD = 1, AO = \frac{1}{2}$ ,

所以  $DO = \frac{\sqrt{5}}{2}$ , 从而  $AN = \frac{1}{2}DO = \frac{\sqrt{5}}{4}$ ,

在  $Rt\triangle ANM$  中,  $\tan \angle MAN = \frac{MN}{AN} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{4}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ ,

即直线AM与平面ABCD所成角的正切值为  $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ 。

(18) 本小题主要考查椭圆的标准方程和几何性质、直线的方程、两点间的距离公式、点到直线的距离公式、直线与圆的位置关系等基础知识, 考查用代数方法研究圆锥曲线的性质及数形结合的数学思想, 考查解决问题能力与运算能力, 满分13分。

(I) 解: 设  $F_1(-c, 0), F_2(c, 0) (c > 0)$ , 因为  $|PF_2| = |F_1F_2|$ ,

所以  $\sqrt{(a-c)^2 + b^2} = 2c$ , 整理得  $2\left(\frac{c}{a}\right)^2 + \frac{c}{a} - 1 = 0$ , 得  $\frac{c}{a} = -1$  (舍)

或  $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ , 所以  $e = \frac{1}{2}$ 。

(II) 解: 由 (I) 知  $a = 2c, b = \sqrt{3}c$ , 可得椭圆方程为  $3x^2 + 4y^2 = 12c^2$ , 直线  $FF_2$  的方程为  $y = \sqrt{3}(x - c)$ 。

A, B两点的坐标满足方程组  $\begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 12c^2, \\ y = \sqrt{3}(x - c). \end{cases}$  消去  $y$  并整理, 得  $5x^2 - 8cx = 0$ 。

解得  $x_1 = 0, x_2 = \frac{8}{5}c$ , 得方程组的解  $\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = -\sqrt{3}c, \end{cases} \begin{cases} x_2 = \frac{8}{5}c, \\ y_2 = \frac{3\sqrt{3}}{5}c. \end{cases}$

不妨设  $A\left(\frac{8}{5}c, \frac{3\sqrt{3}}{5}c\right), B(0, -\sqrt{3}c)$ , 所以

$$|AB| = \sqrt{\left(\frac{8}{5}c\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{5}c + \sqrt{3}c\right)^2} = \frac{16}{5}c.$$

于是  $|MN| = \frac{5}{8}|AB| = 2c.$

圆心  $(-1, \sqrt{3})$  到直线  $PF_2$  的距离  $d = \frac{|-\sqrt{3} - \sqrt{3} - \sqrt{3}c|}{2} = \frac{\sqrt{3}|2+c|}{2}.$

因为  $d^2 + \left(\frac{|MN|}{2}\right)^2 = 4^2$ , 所以  $\frac{3}{4}(2+c)^2 + c^2 = 16.$

整理得  $7c^2 + 12c - 52 = 0$ , 得  $c = -\frac{26}{7}$  (舍), 或  $c = 2$ . 所以椭圆方程为

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1.$$

(19) 本小题主要考查导数的几何意义、利用导数研究函数的单调性、曲线的切线方程、函数的零点、解不等式等基础知识, 考查运算能力及分类讨论的思想方法, 满分14分。




(I) 解: 当  $t = 1$  时,  $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x, f(0) = 0, f'(x) = 12x^2 + 6x - 6$

$f'(0) = -6$ . 所以曲线  $y = f(x)$  在点  $(0, f(0))$  处的切线方程为  $y = -6x$ .

(II) 解:  $f'(x) = 12x^2 + 6tx - 6t^2$ , 令  $f'(x) = 0$ , 解得  $x = -t$  或  $x = \frac{t}{2}$ .




因为  $t \neq 0$ , 以下分两种情况讨论:

(1) 若  $t < 0$ , 则  $\frac{t}{2} < -t$ , 当  $x$  变化时,  $f'(x), f(x)$  的变化情况如下表:

$x$	$\left(-\infty, \frac{t}{2}\right)$	$\left(\frac{t}{2}, -t\right)$	$(-t, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$			

所以,  $f(x)$  的单调递增区间是  $\left(-\infty, \frac{t}{2}\right), (-t, +\infty)$ ;  $f(x)$  的单调递减区间是  $\left(\frac{t}{2}, -t\right)$ .

(2) 若  $t > 0$ , 则  $-t < \frac{t}{2}$ , 当  $x$  变化时,  $f'(x), f(x)$  的变化情况如下表:

$x$	$(-\infty, t)$	$\left(-t, \frac{t}{2}\right)$	$\left(\frac{t}{2}, +\infty\right)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$			

所以,  $f(x)$  的单调递增区间是  $(-\infty, -t), \left(\frac{t}{2}, +\infty\right)$ ;  $f(x)$  的单调递减区间是  $\left(-t, \frac{t}{2}\right)$ .

(III) 证明: 由 (II) 可知, 当  $t > 0$  时,  $f(x)$  在  $\left(0, \frac{t}{2}\right)$  内的单调递减, 在  $\left(\frac{t}{2}, +\infty\right)$

内单调递增, 以下分两种情况讨论:

(1) 当  $\frac{t}{2} \geq 1$ , 即  $t \geq 2$  时,  $f(x)$  在  $(0, 1)$  内单调递减,

$$f(0) = t - 1 > 0, f(1) = -6t^2 + 4t + 3 \leq -6 \times 4 + 4 \times 2 + 3 < 0.$$

所以对任意  $t \in [2, +\infty)$ ,  $f(x)$  在区间  $(0, 1)$  内均存在零点。

(2) 当  $0 < \frac{t}{2} < 1$ , 即  $0 < t < 2$  时,  $f(x)$  在  $\left(0, \frac{t}{2}\right)$  内单调递减, 在  $\left(\frac{t}{2}, 1\right)$  内单调递增

$$, \text{ 若 } t \in (0, 1], f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{4}t^3 + t - 1 \leq -\frac{7}{4}t^3 < 0.$$

$$f(1) = -6t^2 + 4t + 3 \geq -6t + 4t + 3 = -2t + 3 > 0.$$

所以  $f(x)$  在  $\left(\frac{t}{2}, 1\right)$  内存在零点。

$$\text{若 } t \in (1, 2), f\left(\frac{t}{2}\right) = -\frac{7}{4}t^3 + (t-1) < -\frac{7}{4}t^3 + 1 < 0.$$

$$f(0) = t - 1 > 0$$

所以  $f(x)$  在  $\left(0, \frac{t}{2}\right)$  内存在零点。

所以, 对任意  $t \in (0, 2)$ ,  $f(x)$  在区间  $(0, 1)$  内均存在零点。

综上, 对任意  $t \in (0, +\infty)$ ,  $f(x)$  在区间  $(0, 1)$  内均存在零点。

(20) 本小题主要考查等比数列的定义、数列求和等基础知识, 考查运算能力、推理论证能力、综合分析能力和解决问题的能力及分类讨论的思想方法。满分14分。

$$(I) \text{ 解: 由 } b_n = \frac{3 + (-1)^{n-1}}{2}, n \in N^*, \text{ 可得 } b_n = \begin{cases} 2, n \text{ 为奇数,} \\ 1, n \text{ 为偶数,} \end{cases}$$

$$\text{又 } b_{n+1}a_n + b_n a_{n+1} = (-2)^n + 1,$$

$$\text{当 } n = 1 \text{ 时, } a_1 + 2a_2 = -1, \text{ 由 } a_1 = 2, \text{ 可得 } a_2 = -\frac{3}{2};$$

当  $n = 2$  时,  $2a_2 + a_3 = 5$ , 可得  $a_3 = 8$ .

(II) 证明: 对任意  $n \in N^*$

$$a_{2n-1} + 2a_{2n} = -2^{2n-1} + 1 \quad \textcircled{1}$$

$$2a_{2n} + a_{2n+1} = 2^{2n} + 1 \quad \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} - \textcircled{1}$ , 得  $a_{2n+1} - a_{2n-1} = 3 \times 2^{2n-1}$ , 即  $c_n = 3 \times 2^{2n-1}$ , 于是  $\frac{c_{n+1}}{c_n} = 4$

所以  $\{c_n\}$  是等比数列。

(III) 证明:  $a_1 = 2$ , 由 (II) 知, 当  $k \in N^*$  且  $k \geq 2$  时,

$$\begin{aligned} a_{2k-1} &= a_1 + (a_3 - a_1) + (a_5 - a_3) + (a_7 - a_5) + \cdots + (a_{2k-1} - a_{2k-3}) \\ &= 2 + 3(2 + 2^3 + 2^5 + \cdots + 2^{2k-3}) = 2 + 3 \times \frac{2(1-4^{k-1})}{1-4} = 2^{2k-1} \end{aligned}$$

故对任意  $k \in N^*$ ,  $a_{2k-1} = 2^{2k-1}$ .

由  $\textcircled{1}$  得  $2^{2k-1} + 2a_{2k} = -2^{2k-1} + 1$ , 所以  $a_{2k} = \frac{1}{2} - 2^{2k-1}$ ,  $k \in N^*$

因此,  $S_{2k} = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2k-1} + a_{2k}) = \frac{k}{2}$ .

于是,  $S_{2k} - 1 = S_{2k} - a_{2k} = \frac{k-1}{2} + 2^{2k-1}$ .

故

$$\frac{S_{2k-1}}{a_{2k-1}} + \frac{S_{2k}}{a_{2k}} = \frac{\frac{k-1}{2} + 2^{2k-1}}{2^{2k-1}} + \frac{\frac{k}{2}}{\frac{1}{2} - 2^{2k-1}} = \frac{k-1 + 2^{2k}}{2^{2k}} - \frac{k}{2^{2k} - 1} = 1 - \frac{1}{4^k} - \frac{k}{4^k(4^k - 1)}.$$