

2014 年普通高等学校招生全国统一考试（安徽卷）

数学（文科）试题

第 I 卷（选择题 共 50 分）

一. 选择题: 本大题共 10 小题, 每小题 5 分, 共 50 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 设  $i$  是虚数单位, 复数  $i^3 + \frac{2i}{1+i} = ( \quad )$

- i      B.  $i$       C. -1      D. 1

【答案】D

【解析】

试题分析: 由题意  $i^3 + \frac{2i}{1+i} = -i + \frac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = -i + i - i^2 = 1$ , 故选 D.

考点: 1. 复数的运算.

命题 “ $\forall x \in R, |x| + x^2 \geq 0$ ” 的否定是 ( )

- $\forall x \in R, |x| + x^2 < 0$       B.  $\forall x \in R, |x| + x^2 \leq 0$   
C.  $\exists x_0 \in R, |x_0| + x_0^2 < 0$       D.  $\exists x_0 \in R, |x_0| + x_0^2 \geq 0$

【答案】C

【解析】

试题分析: 对于命题的否定, 要将命题中 “ $\forall$ ” 变为 “ $\exists$ ”, 且否定结论, 则命题 “ $\forall x \in R, |x| + x^2 \geq 0$ ” 的否定是 “ $\exists x_0 \in R, |x_0| + x_0^2 < 0$ ”, 故学科网选 C.

考点: 1. 含全称量词的命题否定.

3. 抛物线  $y = \frac{1}{4}x^2$  的准线方程是 ( )

- A.  $y = -1$       B.  $y = -2$       C.  $x = -1$       D.  $x = -2$

【答案】A

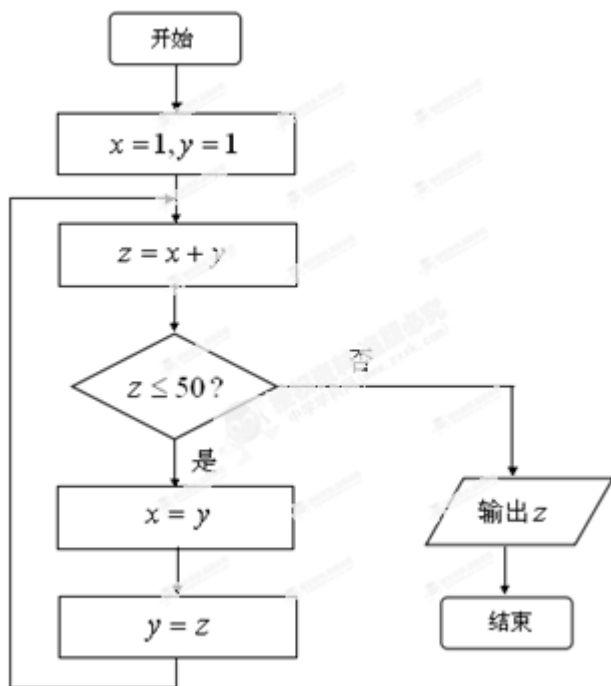
【解析】

试题分析: 题中抛物线的标准形式为  $x^2 = 4y$ , 则其准线方程为  $y = -1$ , 故先 A.

考点: 1. 抛物线的准线方程.

4. 如图所示, 程序框图 (算法流程图) 的输出结果是 ( )

- A. 34      B. 55      C. 78      D. 89



**【答案】** B

**【解析】**

试题分析：由题意，①  $x=1, y=1, z=2 \Rightarrow$  ②  $x=y=1, y=z=2, z=3 \Rightarrow$  ③  $x=2, y=3, z=5$

$\Rightarrow$  ④  $x=3, y=5, z=8 \Rightarrow$  ⑤  $x=5, y=8, z=13 \Rightarrow$  ⑥  $x=8, y=13, z=21 \Rightarrow$  ⑦

$x=13, y=21, z=34 \Rightarrow$  ⑧  $x=21, y=34, z=55 > 50$ ，从而输出  $z=55$ ，故选 B.

考点：1.程序框图的应用.

5. 设  $a = \log_3 7, b = 2^{1.1}, c = 0.8^{3.1}$  则 ( )

- A.  $b < a < c$     B.  $c < a < b$     C.  $c < b < a$     D.  $a < c < b$

**【答案】** B

**【解析】**

试题分析：由题意，因为  $a = \log_3 7$ ，则  $1 < a < 2$ ； $b = 2^{1.1}$ ，则  $b > 2$ ； $c = 0.8^{3.1}$ ，则  $c < 0.8^0 = 1$ ，

所以  $c < a < b$

考点：1.指数、对数学科网的运算性质.

6. 过点  $P(-\sqrt{3}, 1)$  的直线  $l$  与圆  $x^2 + y^2 = 1$  有公共点，则直线  $l$  的倾斜角的取值范围是 ( )

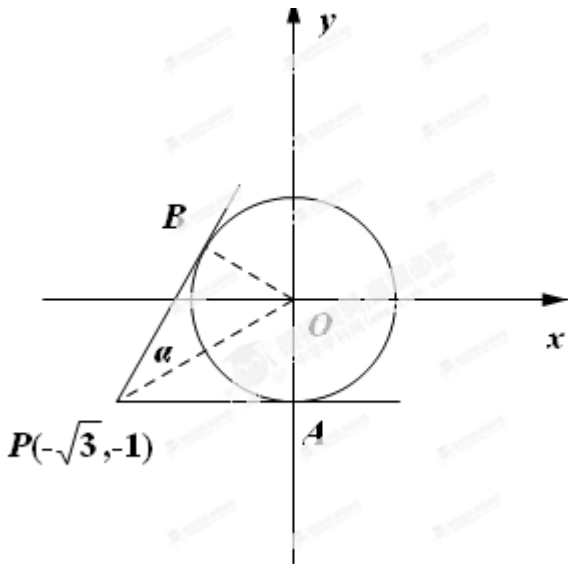
- A.  $(0, \frac{\pi}{6}]$     B.  $(0, \frac{\pi}{3}]$     C.  $[0, \frac{\pi}{6}]$     D.  $[0, \frac{\pi}{3}]$

**【答案】** D

**【解析】**

试题分析：如下图，要使过点  $P$  的直线  $l$  与圆有公共点，则直线  $l$  在  $PA$  与  $PB$  之间，因为  $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ ，所

以  $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ，则  $\angle AOB = 2\alpha = \frac{\pi}{3}$ ，所以直线  $l$  的倾斜角的取值范围为  $[0, \frac{\pi}{3}]$ 。故选 D。



考点：1.直线的倾斜角；2.直线与圆的学科网相交问题。

7. 若将函数  $f(x) = \sin 2x + \cos 2x$  的图像向右平移  $\varphi$  个单位，所得图像关于  $y$  轴对称，则  $\varphi$  的最小正值是 ( )

- A.  $\frac{\pi}{8}$     B.  $\frac{\pi}{4}$     C.  $\frac{3\pi}{8}$     D.  $\frac{3\pi}{4}$

【答案】C

【解析】

试题分析：由题意  $f(x) = \sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4})$ ，将其图像向右平移  $\varphi$  个单位，得

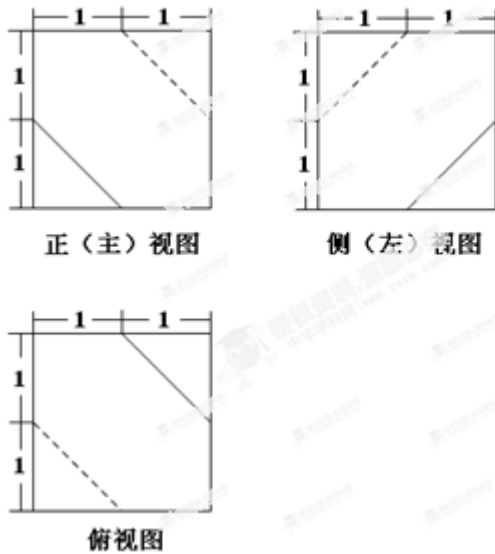
$\sqrt{2} \sin[2(x - \varphi) + \frac{\pi}{4}] = \sqrt{2} \sin[2x - 2\varphi + \frac{\pi}{4}]$ ，要使图像关于  $y$  轴对称，则  $\frac{\pi}{4} - 2\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ，解得

$\varphi = -\frac{\pi}{8} - \frac{k\pi}{2}$ ，当  $k = -1$  时， $\varphi$  取最小正值  $\frac{3\pi}{8}$ ，故选 c。

考点：1.三角函数的平移；2.三角函数恒等变换与图象性质。

8. 一个多面体的三视图如图所示，则多面体的体积是 ( )

- A.  $\frac{23}{3}$     B.  $\frac{47}{6}$     C. 6    D. 7

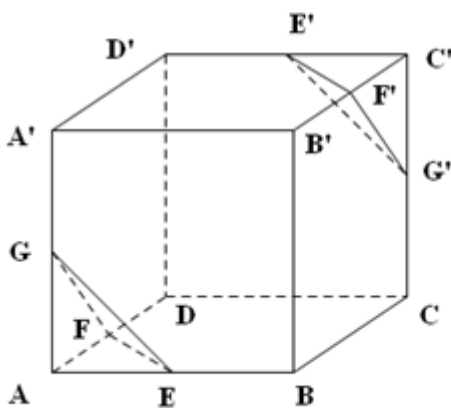


【答案】A

【解析】

试题分析：由题意，该多面体的直观图是一个正方体  $ABCD-A'B'C'D'$  挖去左下角三棱锥  $A-EFG$  和右上角三棱锥  $C'-E'F'G'$ ，如下图学科网，则多面体的体积  $V = 2 \times 2 \times 2 - 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 1 = \frac{23}{3}$ 。

故选 A.



考点：1.多面体的三视图与体积.

9. 若函数  $f(x) = |x+1| + |2x+a|$  的最小值 3，则实数  $a$  的值为 ( )

- A. 5 或 8    B. -1 或 5    C. -1 或 -4    D. -4 或 8

【答案】D

【解析】

试题分析：由题意，①当  $-1 > -\frac{a}{2}$  时，即  $a > 2$ ， $f(x) = \begin{cases} -3x - (1+a), x \leq -\frac{a}{2} \\ x+a-1, -\frac{a}{2} < x \leq -1 \\ 3x + (a+1), x > -1 \end{cases}$ ，则当  $x = -\frac{a}{2}$  时，

$f_{\min}(x) = f(-\frac{a}{2}) = |-\frac{a}{2} + 1| + |-a + a| = 3$ ，解得  $a = 8$  或  $a = -4$  (舍)；②当  $-1 < -\frac{a}{2}$  时，即  $a < 2$ ，

$f(x) = \begin{cases} -3x - (1+a), x \leq -1 \\ -x + 1 - a, -1 < x \leq -\frac{a}{2} \\ 3x + (a+1), x > -\frac{a}{2} \end{cases}$ ，则当  $x = -\frac{a}{2}$  时， $f_{\min}(x) = f(-\frac{a}{2}) = |-\frac{a}{2} + 1| + |-a + a| = 3$ ，解

得  $a = 8$  (舍) 或  $a = -4$ ；③当  $-1 = -\frac{a}{2}$  时，即  $a = 2$ ， $f(x) = 3|x+1|$ ，此时  $f_{\min}(x) = 0$ ，不满足

题意，所以  $a = 8$  或  $a = -4$ ，故选 D.

考点：1.绝对值函数的最值；2.分类讨论思想应用.

10. 设  $\vec{a}, \vec{b}$  为非零向量， $|\vec{b}| = 2|\vec{a}|$ ，两组向量  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4$  和  $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3, \vec{y}_4$  均由 2 个  $\vec{a}$  和 2 个  $\vec{b}$  排列而成，若

$\vec{x}_1 \cdot \vec{y}_1 + \vec{x}_2 \cdot \vec{y}_2 + \vec{x}_3 \cdot \vec{y}_3 + \vec{x}_4 \cdot \vec{y}_4$  所有可能取值中的最小值为  $4|\vec{a}|^2$ ，则  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的夹角为 ( )

- A.  $\frac{2}{3}\pi$     B.  $\frac{\pi}{3}$     C.  $\frac{\pi}{6}$     D. 0

【答案】B

【解析】

试题分析：由题意  $\vec{x}_1 \cdot \vec{y}_1 + \vec{x}_2 \cdot \vec{y}_2 + \vec{x}_3 \cdot \vec{y}_3 + \vec{x}_4 \cdot \vec{y}_4$  有以下三种可能：①  $\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b}$

$= 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2 = 10|\vec{a}|^2$ ；②  $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{a} = 4\vec{a} \cdot \vec{b} = 4|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$

$= 8|\vec{a}|^2 \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ ；③  $\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} = 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| + |\vec{b}| \cdot |\vec{b}|$

$= 5|\vec{a}|^2 + 4|\vec{a}|^2 \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ ，已知第②种情况原式的值最小，即  $8|\vec{a}|^2 \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 4|\vec{a}|^2$ ，解得

$\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{1}{2}$ ，即  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\pi}{3}$ ，故选 B.

考点：1.向量的数量积运算；2.分类讨论思想的应用.

第 II 卷 (非选择题 共 100 分)

二. 选择题: 本大题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

11.  $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}} + \log_3 \frac{5}{4} + \log_3 \frac{4}{5} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

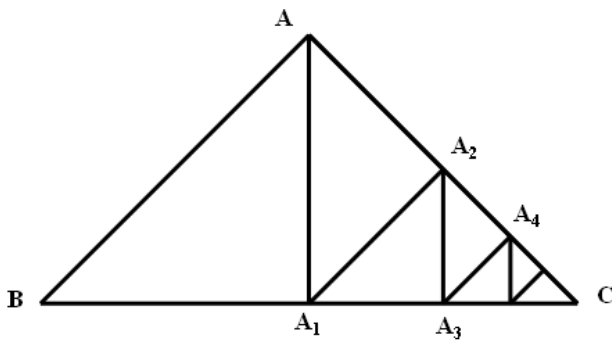
**【答案】**  $\frac{27}{8}$

**【解析】**

**试题分析:** 原式 =  $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^4\right]^{\frac{3}{4}} + \log_3 \frac{5}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{27}{8} + \log_3 1 = \frac{27}{8}$

**考点:** 1. 指数运算性质.

12. 如图, 在等腰直角三角形  $ABC$  中, 斜边  $BC = 2\sqrt{2}$ , 过点  $A$  作  $BC$  的垂线, 垂足为  $A_1$ ; 过点  $A_1$  作  $AC$  的垂线, 垂足为  $A_2$ ; 过点  $A_2$  作  $A_1C$  的垂线, 垂足为  $A_3$ ;  $\dots$ , 以此类推, 设  $BA = a_1$ ,  $AA_1 = a_2$ ,  $A_1A_2 = a_3$ ,  $\dots$ ,  $A_5A_6 = a_7$ , 则  $a_7 = \underline{\hspace{2cm}}$ .



**【答案】**  $\frac{1}{4}$

**【解析】**

**试题学科网分析:** 由题意,  $BA = a_1 = 2$ ,  $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \tan \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 所以  $\{a_n\}$  是以首项

$a_1 = 2$ , 公比  $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$  的等比数列, 则  $a_7 = a_1 \cdot q^6 = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6 = \frac{1}{4}$ .

**考点:** 1. 等比数列通项公式.

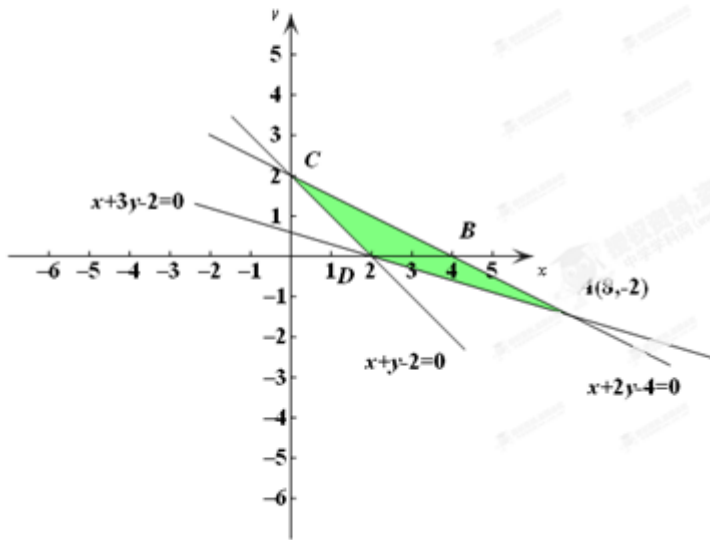
不等式组  $\begin{cases} x+y-2 \geq 0 \\ x+2y-4 \leq 0 \\ x+3y-2 \geq 0 \end{cases}$  表示的平面区域的面积为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

**【答案】** 4

**【解析】**

试题分析：不等式组所表示的平面区域如下图阴影部分，则其表示的面积

$$S_{ABCD} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 4.$$



考点：1.线性规划表示的区域面积.

若函数  $f(x)(x \in R)$  是周期为 4 的奇函数，且在  $[0, 2]$  上的解析式为  $f(x) = \begin{cases} x(1-x), & 0 \leq x \leq 1 \\ \sin \pi x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ ，则

$$f\left(\frac{29}{4}\right) + f\left(\frac{41}{6}\right) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

**【答案】**  $\frac{5}{16}$

**【解析】**

试题分析：由题意， $f(x+4) = f(x)$ ， $f(-x) = -f(x)$ ，则  $f\left(\frac{29}{4}\right) + f\left(\frac{41}{6}\right) = f\left(4 + \frac{13}{4}\right) + f\left(4 + \frac{17}{6}\right)$

$$= f\left(\frac{13}{4}\right) + f\left(\frac{17}{6}\right) = f\left(4 - \frac{3}{4}\right) + f\left(4 - \frac{7}{6}\right) = f\left(-\frac{3}{4}\right) + f\left(-\frac{7}{6}\right) = -f\left(\frac{3}{4}\right) - f\left(\frac{7}{6}\right) = -\frac{3}{4} \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right) - \sin \frac{7}{6} \pi$$

$$= -\frac{3}{16} + \frac{1}{2} = \frac{5}{16}$$

考点：1.函数的奇偶性与周期性；2.分段函数求值.

15. 若直线  $l$  与曲线  $C$  满足下列两个条件：

(i) 直线  $l$  在点  $P(x_0, y_0)$  处与曲线  $C$  相切；(ii) 曲线  $C$  在  $P$  附近位于直线  $l$  的两侧，则称直线  $l$  在点  $P$  处

“切过”曲线  $C$ .

下列命题正确的是\_\_\_\_\_ (写出所有正确命题的编号)

①直线  $l: y=0$  在点  $P(0,0)$  处“切过”曲线  $C: y=x^3$

②直线  $l: x=-1$  在点  $P(-1,0)$  处“切过”曲线  $C: y=(x+1)^2$

③直线  $l: y=x$  在点  $P(0,0)$  处“切过”曲线  $C: y=\sin x$

④直线  $l: y=x$  在点  $P(0,0)$  处“切过”曲线  $C: y=\tan x$

⑤直线  $l: y=x-1$  在点  $P(1,0)$  处“切过”曲线  $C: y=\ln x$

**【答案】①③④**

**【解析】**

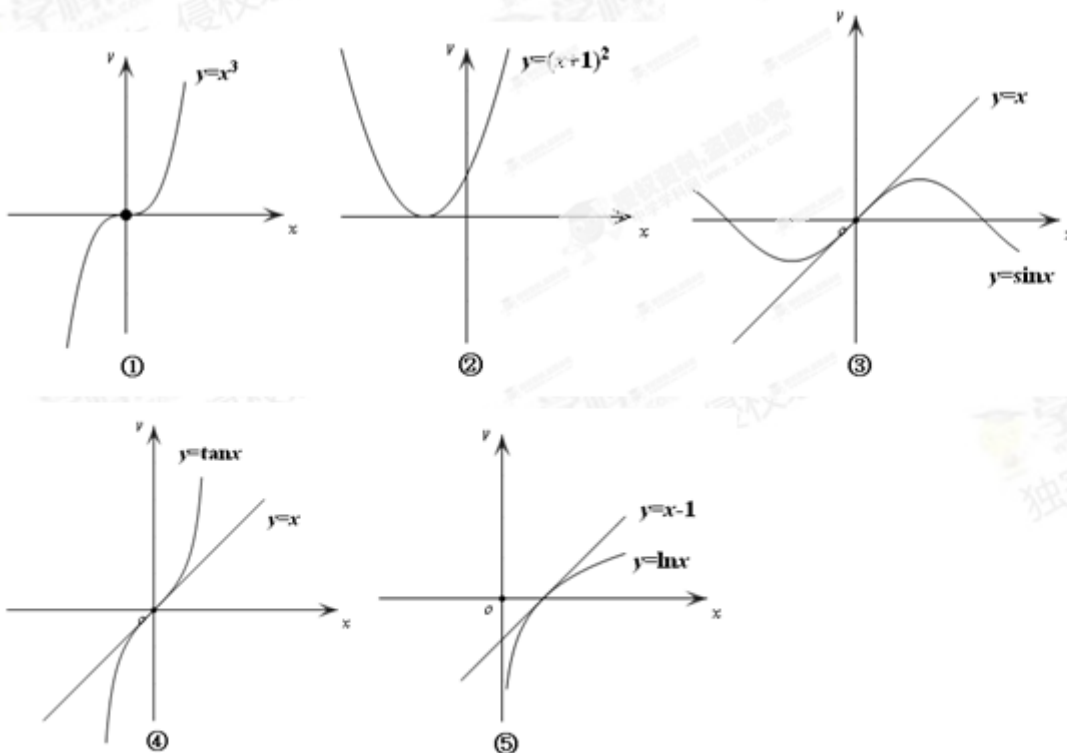
试题分析：由题意，①  $y=x^3$  上在  $P(0,0)$  处的切线方程为  $x=0$ ，曲线  $C$  在  $P$  附近位于切线的两侧，

满足条件；②  $y=(x+1)^2$  上在  $P(-1,0)$  处的切线方程为  $x=-1$ ，曲线  $C$  在  $P$  附近位于切线的同侧，不

满足条件；③  $y=\sin x$  上在  $P(0,0)$  处的切线方程为  $y=x$ ，曲线  $C$  在  $P$  附近位于切线的两侧，满足条件；④

$y=\tan x$  上在  $P(0,0)$  处的切线方程为  $y=x$ ，曲线  $C$  在  $P$  附近位于切线的两侧，满足条件；⑤  $y=\ln x$  上

在  $P(1,0)$  处的切线方程为  $y=x-1$ ，曲线  $C$  在  $P$  附近位于切线的同侧，不满足条件. 故选①③④. 如下图：



考点：1.函数的切线方程；2.对定义的理解.

三. 解答题: 本大题共 6 小题, 共 75 分. 解答应写文字说明、证明过程或演算步骤. 解答写在答题卡上的指定区域内

16. (本小题满分 12 分)

设  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  所对边的长分别是  $a, b, c$ , 且  $b=3, c=1$ ,  $\triangle ABC$  的面积为  $\sqrt{2}$ , 求  $\cos A$  与  $a$  的值.

**【答案】**  $\cos A = \pm \frac{1}{3}$ ,  $a = 2\sqrt{2}$  或  $2\sqrt{3}$ .

**【解析】**

**试题分析:** 根据三角形面积公式可以求出  $\sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ , 利用  $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$  可以解出  $\cos A = \pm \frac{1}{3}$ ,

对  $\cos A$  进行分类讨论, 通过余弦定理即可求出  $a$  的值.

**试题解析:** 由三角形面积公式, 得  $\frac{1}{2} \times 3 \times 1 \cdot \sin A = \sqrt{2}$ , 故  $\sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ .

$\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1$ ,  $\therefore \cos A = \pm \sqrt{1 - \sin^2 A} = \pm \sqrt{1 - \frac{8}{9}} = \pm \frac{1}{3}$ .

当  $\cos A = \frac{1}{3}$  时, 由余弦定理得,  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 9 + 1 - 2 \times 3 \times 1 \times \frac{1}{3} = 8$ , 所以  $a = 2\sqrt{2}$ ;

当  $\cos A = -\frac{1}{3}$  时, 由余弦定理得,  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 9 + 1 + 2 \times 3 \times 1 \times \frac{1}{3} = 12$ , 所以  $a = 2\sqrt{3}$ .

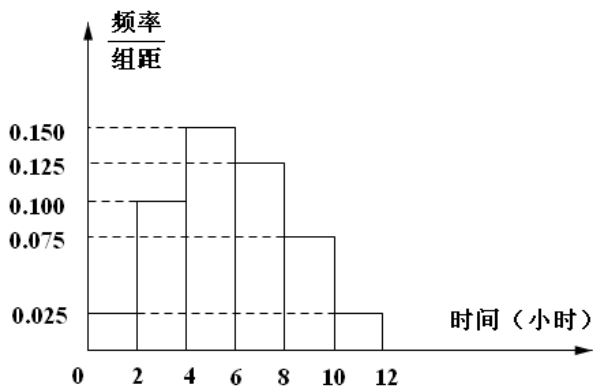
**考点:** 1. 三角形面积公式; 2. 余弦定理.

17. (本小题满分 12 分)

某高校共有 15000 人, 其中男生 10500 人, 女生 4500 人, 为调查该校学生每周平均体育运动时间的情况, 采用分层抽样的方法, 收集 300 位学生每周平均体育运动时间的样本数据 (单位: 小时)

(I) 应收集多少位女生样本数据?

(II) 根据这 300 个样本数据, 得到学生每周平均体育运动时间的频率分布直方图 (如图所示), 其中样本数据分组区间为:  $[0, 2]$ ,  $(2, 4]$ ,  $(4, 6]$ ,  $(6, 8]$ ,  $(8, 10]$ ,  $(10, 12]$ . 估计该校学生每周平均体育运动时间超过 4 个小时的概率.



(III) 在样本数据中, 有 60 位女生的每周平均体育运动时间超过 4 个小时. 请完成每周平均体育运动时间与性别的列联表, 并判断是否有 95% 的把握认为“该校学生的每周平均体育运动时间与性别有关”. 附:

$$K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)}$$

$P(K^2 \geq k_0)$	0.10	0.05	0.010	0.005
$k_0$	2.706	3.841	6.635	7.879

【答案】(1) 90; (2) 0.75; (3) 有 95% 的把握认为“该校学生的每周平均体育运动时间与性别有关”.

【解析】

试题分析: (1) 利用分层抽样的应用可以算出  $300 \times \frac{4500}{15000} = 90$ , 记应收集 90 位女生的样本数据. (2)

根据频率分布直方图可得  $1 - 2 \times (0.100 + 0.025) = 0.75$ . (3) 根据题意 300 位学生中有  $300 \times 0.75 = 225$

人的每周平均体育运动时间超过 4 小时, 75 人的每周平均体育运动时间不超过 4 小时. 又因为样本数据中有 210 份是关于男生的, 90 份是关于女生的. 可以画出每周平均体育运动时间与性别列联表, 计算

$$K^2 = \frac{300 \times (45 \times 60 - 30 \times 165)}{75 \times 225 \times 210 \times 90} = \frac{100}{21} \approx 4.762 > 3.841. \text{ 则有 95\% 的把握认为“该校学生的每周平均}$$

体育运动时间与性别有关”.

试题解析: (1)  $300 \times \frac{4500}{15000} = 90$ , 所以应收集 90 位女生的样本数据.

由频率分布直方图得  $1 - 2 \times (0.100 + 0.025) = 0.75$ , 该校学生每周平均体育运动时间超过 4 个小时的概率为 0.75.

由 (2) 知, 300 位学生中有  $300 \times 0.75 = 225$  人的每周平均体育运动时间超过 4 小时, 75 人的每周平均体育运动时间不超过 4 小时. 又因为样本数据中有 210 份是关于男生的, 90 份是关于女生的. 所以每周平均体育运动时间与性别列联表如下:

每周平均体育运动时间与性别列联表

	男生	女生	总计
每周平均体育运动时间	45	30	75

不超过 4 小时			
每周平均体育运动时间 超过 4 小时	165	60	225
总计	210	90	300

结合列联表可算得  $K^2 = \frac{300 \times (45 \times 60 - 30 \times 165)}{75 \times 225 \times 210 \times 90} = \frac{100}{21} \approx 4.762 > 3.841$ .

有 95% 的把握认为“该校学生的每周平均体育运动时间与性别有关”.

考点：1. 频率分布直方图的应用；2. 列联表的画法及  $K^2$  的求解.

18. (本小题满分 12 分)

数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1, na_{n+1} = (n+1)a_n + n(n+1), n \in N^+$

证明：数列  $\{\frac{a_n}{n}\}$  是等差数列；

设  $b_n = 3^n \cdot \sqrt{a_n}$ ，求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$

【答案】(1) 数列  $\{\frac{a_n}{n}\}$  是等差数列；(2)  $S_n = \frac{(2n-1) \cdot 3^{n+1} + 3}{4}$ .

【解析】

试题分析：(1) 证明：在原等式两边同除以  $n(n+1)$ ，得  $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} + 1$ ，即  $\frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n} = 1$ ，所以  $\{\frac{a_n}{n}\}$  是

以  $\frac{a_1}{1} = 1$  为首项，1 为公差的等差数列。(2) 由 (1) 得  $\frac{a_n}{n} = 1 + (n-1) \cdot 1 = n$ ，所以  $a_n = n^2$ ，从而  $b_n = n \cdot 3^n$ 。

用错位相减法求得  $S_n = \frac{(2n-1) \cdot 3^{n+1} + 3}{4}$ 。

试题解析：(1) 证明：由已知可得， $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} + 1$ ，即  $\frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n} = 1$ ，所以  $\{\frac{a_n}{n}\}$  是以  $\frac{a_1}{1} = 1$  为首项，1

为公差的等差数列。(2) 由 (1) 得  $\frac{a_n}{n} = 1 + (n-1) \cdot 1 = n$ ，所以  $a_n = n^2$ ，从而  $b_n = n \cdot 3^n$ 。

$$S_n = 1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \cdots + n \cdot 3^n \quad \text{①}$$

$$3S_n = 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^4 + \cdots + n \cdot 3^{n+1} \quad \text{②}$$

①-②得

$$-2S_n = 3^1 + 3^2 + \dots + 3^n - n \cdot 3^{n+1} = \frac{3 \cdot (1-3^n)}{1-3} - n \cdot 3^{n+1} = \frac{(1-2n) \cdot 3^{n+1} - 3}{2}.$$

$$\text{所以 } S_n = \frac{(2n-1) \cdot 3^{n+1} + 3}{4}.$$

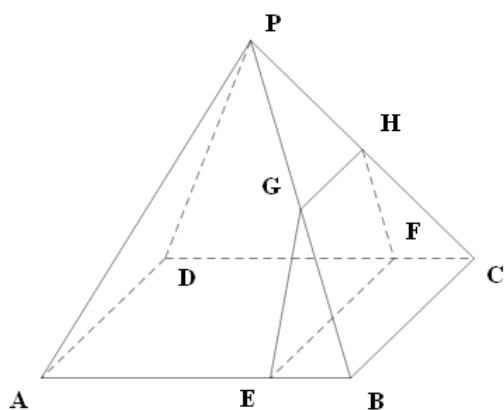
考点：1.等差数列的证明；2.错位相减法求和.

19 (本题满分 13 分)

如图，四棱锥  $P-ABCD$  的底面边长为 8 的正方形，四条侧棱长均为  $2\sqrt{17}$ . 点  $G, E, F, H$  分别是棱  $PB, AB, CD, PC$  上共面的四点，平面  $GEFH \perp$  平面  $ABCD$ ， $BC \parallel$  平面  $GEFH$ .

证明： $GH \parallel EF$ ;

若  $EB = 2$ ，求四边形  $GEFH$  的面积.



【答案】(1)  $GH \parallel EF$ ; (2) 18.

【解析】

试题分析：(1) 要证线线平行，通过线面证明线线平行，再根据平行的传递性即可证明. 因为  $BC \parallel$  平面  $GEFH$ ， $BC \subset$  平面  $PBC$ ，且平面  $PBC \cap$  平面  $GEFH = GH$ ，所以  $GH \parallel BC$ . 同理可证  $EF \parallel BC$ ，因此  $GH \parallel EF$ . (2) 要求出四边形  $GEFH$  的面积，首先需要确定四边形的形状，求出四边形一些量的大小即可求出. 连接  $AC, BD$  交于点  $O$ ， $BD$  交  $EF$  于点  $K$ ，连接  $OP, GK$ . 因为  $PA = PC$ ， $O$  是  $AC$  的中点，所以  $PO \perp AC$ ，同理可得  $PO \perp BD$  又  $BD \cap AC = O$ ，且  $AC, BD$  都在底面内，所以  $PO \perp$  底面  $ABCD$ . 又因为平面  $GEFH \perp$  平面  $ABCD$ ，且  $PO \not\subset$  平面  $GEFH$ ，所以  $PO \parallel$  平面  $GEFH$ . 因为平面  $PBD \cap$  平面  $GEFH = GK$ ，所以  $PO \parallel GK$ ，且  $GK \perp$  底面  $ABCD$ ，从而  $GK \perp EF$ . 所以  $GK$  是

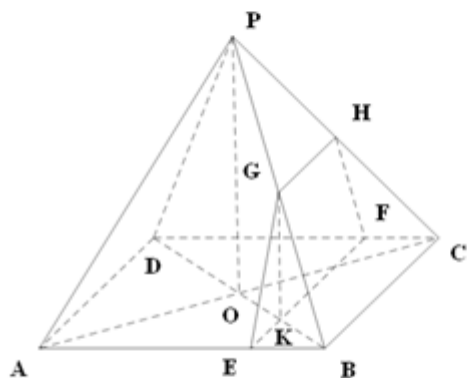
梯形  $GEFH$  的高. 由  $AB = 8, EB = 2$  得  $EB:AK = KB:DB = 1:4$ ，从而  $KB = \frac{1}{4}DB = \frac{1}{2}OB$ ，即  $K$  为

$OB$  的中点. 再由  $PO \parallel GK$  得  $GK = \frac{1}{2}PO$ ，即  $G$  是  $PB$  的中点，且  $GH = \frac{1}{2}BC = 4$ . 由已知可得

$OB = 4\sqrt{2}, PO = \sqrt{PB^2 - OB^2} = \sqrt{68 - 32} = 6$ ，所以  $GK = 3$ ，故四边形  $GEFH$  的面积

$$S = \frac{GH + EF}{2} \cdot GK = \frac{4 + 8}{2} \times 3 = 18.$$

试题解析：(1) 证明：因为  $BC \parallel$  平面  $GEFH$ ， $BC \subset$  平面  $PBC$ ，且平面  $PBC \cap$  平面  $GEFH = GH$ ，所以  $BC \parallel GH$ 。同理可证  $EF \parallel BC$ ，因此  $GH \parallel EF$ 。



连接  $AC, BD$  交于点  $O$ ， $BD$  交  $EF$  于点  $K$ ，连接  $OP, GK$ 。因为  $PA = PC$ ， $O$  是  $AC$  的中点，所以  $PO \perp AC$ ，同理可得  $PO \perp BD$ 。又  $BD \cap AC = O$ ，且  $AC, BD$  都在底面内，所以  $PO \perp$  底面  $ABCD$ 。

又因为平面  $GEFH \perp$  平面  $ABCD$ ，且  $PO \not\subset$  平面  $GEFH$ ，所以  $PO \parallel$  平面  $GEFH$ 。因为平面  $PBD \cap$  平面  $GEFH = GK$ ，所以  $PO \parallel GK$ ，且  $GK \perp$  底面  $ABCD$ ，从而  $GK \perp EF$ 。所以  $GK$  是梯形  $GEFH$

的高。由  $AB = 8, EB = 2$  得  $EB : AK = KB : DB = 1 : 4$ ，从而  $KB = \frac{1}{4} DB = \frac{1}{2} OB$ ，即  $K$  为  $OB$  的中点。

再由  $PO \parallel GK$  得  $GK = \frac{1}{2} PO$ ，即  $G$  是  $PB$  的中点，且  $GH = \frac{1}{2} BC = 4$ 。由已知可得

$OB = 4\sqrt{2}, PO = \sqrt{PB^2 - OB^2} = \sqrt{68 - 32} = 6$ ，所以  $GK = 3$ ，故四边形  $GEFH$  的面积

$$S = \frac{GH + EF}{2} \cdot GK = \frac{4 + 8}{2} \times 3 = 18.$$

考点：1. 线面平行的性质定理；2. 平行的传递性；3. 四边形面积的求解。

20 (本小题满分 13 分)

设函数  $f(x) = 1 + (1 + a)x - x^2 - x^3$ ，其中  $a > 0$

讨论  $f(x)$  在其定义域上的单调性；

当  $x \in [0, 1]$  时，求  $f(x)$  取得最大值和最小值时的  $x$  的值。

【答案】(1)  $f(x)$  在  $(-\infty, x_1)$  和  $(x_2, +\infty)$  内单调递减, 在  $(x_1, x_2)$  内单调递增; (2) 所以当  $0 < a < 1$  时,

$f(x)$  在  $x=1$  处取得最小值; 当  $a=1$  时,  $f(x)$  在  $x=0$  和  $x=1$  处同时取得最小值; 当  $1 < a < 4$

时,  $f(x)$  在  $x=0$  处取得最小值.

【解析】

试题分析: (1) 对原函数进行求导,  $f'(x)=1+a-2x-3x^2$ , 令  $f'(x)=0$ , 解得

$x_1 = \frac{-1-\sqrt{4+3a}}{3}, x_2 = \frac{-1+\sqrt{4+3a}}{3}, x_1 < x_2$ , 当  $x < x_1$  或  $x > x_2$  时  $f'(x) < 0$ ; 从而得出, 当

$x_1 < x < x_2$  时,  $f'(x) > 0$ . 故  $f(x)$  在  $(-\infty, x_1)$  和  $(x_2, +\infty)$  内单调递减, 在  $(x_1, x_2)$  内单调递增. (2) 依

据第(1)题, 对  $a$  进行讨论, ①当  $a \geq 4$  时,  $x_2 \geq 1$ , 由(1)知,  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上单调递增, 所以  $f(x)$

在  $x=0$  和  $x=1$  处分别取得最小值和最大值. ②当  $0 < a < 4$  时,  $x_2 < 1$ . 由(1)知,  $f(x)$  在  $[0, x_2]$  上单

调递增, 在  $[x_2, 1]$  上单调递减, 因此  $f(x)$  在  $x = x_2 = \frac{-1+\sqrt{4+3a}}{3}$  处取得最大值. 又  $f(0)=1, f(1)=a$ ,

所以当  $0 < a < 1$  时,  $f(x)$  在  $x=1$  处取得最小值; 当  $a=1$  时,  $f(x)$  在  $x=0$  和  $x=1$  处同时取得最小值;

当  $1 < a < 4$  时,  $f(x)$  在  $x=0$  处取得最小值.

试题解析: (1)  $f(x)$  的定义域为  $R$ ,  $f'(x)=1+a-2x-3x^2$ . 令  $f'(x)=0$ , 得

$x_1 = \frac{-1-\sqrt{4+3a}}{3}, x_2 = \frac{-1+\sqrt{4+3a}}{3}, x_1 < x_2$ , 所以  $f'(x) = -3(x-x_1)(x-x_2)$ . 当  $x < x_1$  或  $x > x_2$

时  $f'(x) < 0$ ; 当  $x_1 < x < x_2$  时,  $f'(x) > 0$ . 故  $f(x)$  在  $(-\infty, x_1)$  和  $(x_2, +\infty)$  内单调递减, 在  $(x_1, x_2)$  内单调递增.

因为  $a > 0$ , 所以  $x_1 < 0, x_2 > 0$ .

$a \geq 4$  时,  $x_2 \geq 1$ , 由(1)知,  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上单调递增, 所以  $f(x)$  在  $x=0$  和  $x=1$  处分别取得最小值

和最大值. ②当  $0 < a < 4$  时,  $x_2 < 1$ . 由(1)知,  $f(x)$  在  $[0, x_2]$  上单调递增, 在  $[x_2, 1]$  上单调递减, 因此

$f(x)$  在  $x = x_2 = \frac{-1+\sqrt{4+3a}}{3}$  处取得最大值. 又  $f(0)=1, f(1)=a$ , 所以当  $0 < a < 1$  时,  $f(x)$  在

$x=1$  处取得最小值; 当  $a=1$  时,  $f(x)$  在  $x=0$  和  $x=1$  处同时取得最小值; 当  $1 < a < 4$  时,  $f(x)$

在  $x = 0$  处取得最小值.

考点：1.含参函数的单调性；2.含参函数的最值求解.

21 (本小题满分 13 分)

设  $F_1, F_2$  分别是椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、右焦点，过点  $F_1$  的直线交椭圆  $E$  于  $A, B$  两点，

$$|AF_1| = 3|BF_1|$$

若  $|AB| = 4$ ,  $\triangle ABF_2$  的周长为 16, 求  $|AF_2|$ ;

若  $\cos \angle AF_2B = \frac{3}{5}$ , 求椭圆  $E$  的离心率.

【答案】(1) 5; (2)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

【解析】

试题分析: (1) 由题意  $|AF_1| = 3|F_1B|$ ,  $|AB| = 4$  可以求得  $|AF_1| = 3$ ,  $|F_1B| = 1$ , 而  $\triangle ABF_2$  的周长为 16,

再由椭圆定义可得  $4a = 16$ ,  $|AF_1| + |AF_2| = 2a = 8$ . 故  $|AF_2| = 2a - |AF_1| = 8 - 3 = 5$ . (2) 设出

$|F_1B| = k$ , 则  $k > 0$  且  $|AF_1| = 3k$ ,  $|AB| = 4k$ . 根据椭圆定义以及余弦定理可以表示出  $a, k$  的关系

$(a+k)(a-3k) = 0$ , 从而  $a = 3k$ ,  $|AF_2| = 3k = |AF_1|$ ,  $|BF_2| = 5k$ , 则  $|BF_2|^2 = |F_2A|^2 + |AB|^2$ ,

故  $F_1A \perp F_2A$ ,  $\triangle AF_1F_2$  为等腰直角三角形. 从而  $c = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ , 所以椭圆  $E$  的离心率  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

试题解析: (1) 由  $|AF_1| = 3|F_1B|$ ,  $|AB| = 4$ , 得  $|AF_1| = 3$ ,  $|F_1B| = 1$ . 因为  $\triangle ABF_2$  的周长为 16, 所以由

椭圆定义可得  $4a = 16$ ,  $|AF_1| + |AF_2| = 2a = 8$ . 故  $|AF_2| = 2a - |AF_1| = 8 - 3 = 5$ .

(2) 设  $|F_1B| = k$ , 则  $k > 0$  且  $|AF_1| = 3k$ ,  $|AB| = 4k$ . 由椭圆定义可得  $|AF_2| = 2a - 3k$ ,  $|BF_2| = 2a - k$ .

在  $\triangle ABF_2$  中, 由余弦定理可得  $|AB|^2 = |AF_2|^2 + |BF_2|^2 - 2|AF_2| \cdot |BF_2| \cos \angle AF_2B$ , 即

$(4k)^2 = (2a - 3k)^2 + (2a - k)^2 - \frac{6}{5}(2a - 3k) \cdot (2a - k)$ , 化简可得  $(a+k)(a-3k) = 0$ , 而  $a+k > 0$ ,

故  $a = 3k$ . 于是有  $|AF_2| = 3k = |AF_1|$ ,  $|BF_2| = 5k$ . 因此  $|BF_2|^2 = |F_2A|^2 + |AB|^2$ , 可得  $F_1A \perp F_2A$ , 故

$\triangle AF_1F_2$  为等腰直角三角形. 从而  $c = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ , 所以椭圆  $E$  的离心率  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

考点: 1. 椭圆的定义; 2. 椭圆的离心率求

解.