2004年辽宁高考数学真题及答案

第Ⅰ卷（选择题　共60分）

参考公式：

如果事件A、B互斥，那么　　　　　　　球的表面积公式

$P(A+B)=P(A)+P(B)$　　　　　　　$S=4\pi R^2$

如果事件A、B相互独立，那么

$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$　　　　　　　其中R表示球的半径球的体积公式

如果事件A在一次试验中发生的概率是

P，那么n次独立重复试验中恰好发生k　　　　$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

次的概率$P_n(k)=C_n^k P^k(1-P)^{n-k}$　　　　其中R表示球的半径

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．若$\cos\theta>0$,且$\sin 2\theta<0$,则角θ的终边所在象限是

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

2．对于$0<a<1$，给出下列四个不等式

①$\log_a(1+a)<\log_a(1+\frac{1}{a})$　　②$\log_a(1+a)>\log_a(1+\frac{1}{a})$

③$a^{1+a}<a^{1+\frac{1}{a}}$　　④$a^{1+a}>a^{1+\frac{1}{a}}$

其中成立的是

A．①与③　　B．①与④　　C．②与③　　D．②与④

3．已知α、β是不同的两个平面，直线$a\subset\alpha$,直线$b\subset\beta$，命题$p:a$与b无公共点；命题$q:\alpha//\beta$．则p是q的

A．充分而不必要的条件　　B．必要而不充分的条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要的条件

4．设复数z满足$\frac{1-z}{1+z}=i$,则$|1+z|=$

A．0　　B．1　　C．$\sqrt{2}$　　D．2

5．甲、乙两人独立地解同一问题，甲解决这个问题的概率是p_1，乙解决这个问题的概率是p_2，那么恰好有1人解决这个问题的概率是

A．p_1p_2　　B．$p_1(1-p_2)+p_2(1-p_1)$

C．$1-p_1p_2$　　D．$1-(1-p_1)(1-p_2)$

6．已知点 $A(-2,0)$、$B(3,0)$，动点 $P(x,y)$ 满足 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=x^2$，则点 P 的轨迹是

A．圆　　　　B．椭圆　　　　C．双曲线　　　　D．抛物线

7．已知函数 $f(x)=\sin(\pi x-\frac{\pi}{2})-1$，则下列命题正确的是

A．$f(x)$ 是周期为 1 的奇函数　　　B．$f(x)$ 是周期为 2 的偶函数

C．$f(x)$ 是周期为 1 的非奇非偶函数　D．$f(x)$ 是周期为 2 的非奇非偶函数

8．已知随机变量 ξ 的概率分布如下：

ξ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3^2}$	$\frac{2}{3^3}$	$\frac{2}{3^4}$	$\frac{2}{3^5}$	$\frac{2}{3^6}$	$\frac{2}{3^7}$	$\frac{2}{3^8}$	$\frac{2}{3^9}$	m

则 $P(\xi=10)=$

A．$\frac{2}{3^9}$　　　B．$\frac{2}{3^{10}}$　　　C．$\frac{1}{3^9}$　　　D．$\frac{1}{3^{10}}$

9．已知点 $F_1(-\sqrt{2},0)$、$F_2(\sqrt{2},0)$，动点 P 满足 $|PF_2|-|PF_1|=2$，当点 P 的纵坐标是 $\frac{1}{2}$ 时，点 P 到坐标原点的距离是

A．$\frac{\sqrt{6}}{2}$　　　B．$\frac{3}{2}$　　　C．$\sqrt{3}$　　　D．2

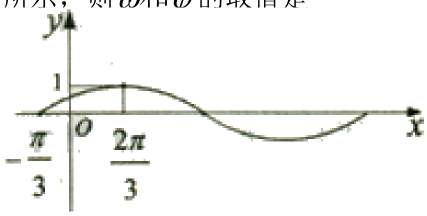
10．设 A、B、C、D 是球面上的四个点，且在同一平面内，AB=BC=CD=DA=3，球心到该平面的距离是球半径的一半，则球的体积是

A．$8\sqrt{6}\pi$　　　B．$64\sqrt{6}\pi$　　　C．$24\sqrt{2}\pi$　　　D．$72\sqrt{2}\pi$

11．若函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象（部分）如图所示，则 ω 和 φ 的取值是

A．$\omega=1,\varphi=\frac{\pi}{3}$　　B．$\omega=1,\varphi=-\frac{\pi}{3}$

C．$\omega=\frac{1}{2},\varphi=\frac{\pi}{6}$　　D．$\omega=\frac{1}{2},\varphi=-\frac{\pi}{6}$



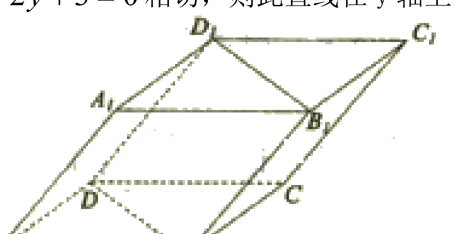
12．有两排座位，前排 11 个座位，后排 12 个座位，现安排 2 人就座，规定前排中间的 3 个座位不能坐，并且这 2 人不左右相邻，那么不同排法的种数是

A．234　　　B．346　　　C．350　　　D．363

第Ⅱ卷（非选择题 共 90 分）

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分.

13．若经过点 P（－1，0）的直线与圆 $x^2+y^2+4x-2y+3=0$ 相切，则此直线在 y 轴上



的截距是______________.

14．$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{(x-\pi)\cos x}{\sqrt{x}-\sqrt{\pi}}$=__________________.

15．如图，四棱柱 ABCD—$A_1B_1C_1D_1$的底面 ABCD 为正方形，侧棱与底面边长均为 $2a$，

且$\angle A_1AD=\angle A_1AB=60°$，则侧棱 AA_1 和截面 B_1D_1DB 的距离是______________.

16．口袋内装有 10 个相同的球，其中 5 个球标有数字 0，5 个球标有数字 1，若从袋中摸出 5 个球，那么摸出的 5 个球所标数字之和小于 2 或大于 3 的概率是______________．（以数值作答）

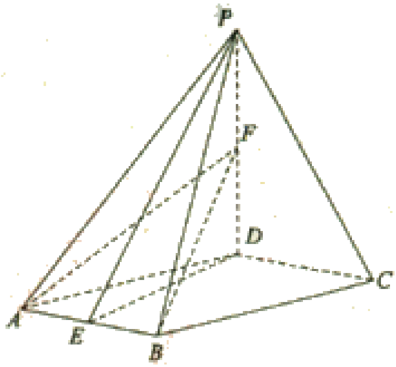
三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17．（本小题满分 12 分）

已知四棱锥 P—ABCD，底面 ABCD 是菱形，$\angle DAB=60°, PD\perp$平面 ABCD，PD=AD，点 E 为 AB 中点，点 F 为 PD 中点.

（1）证明平面 PED⊥平面 PAB；

（2）求二面角 P—AB—F 的平面角的余弦值.



18．（本小题满分 12 分）

设全集 U=R

（1）解关于 x 的不等式$|x-1|+a-1>0(a\in R)$;

（2）记 A 为（1）中不等式的解集，集合$B=\{x\mid\sin(\pi x-\dfrac{\pi}{3})+\sqrt{3}\cos(\pi x-\dfrac{\pi}{3})=0\}$，

若（$\complement_U$A）∩B 恰有 3 个元素，求 a 的取值范围.

19.（本小题满分 12 分）

设椭圆方程为$x^2+\frac{y^2}{4}=1$，过点 M（0，1）的直线 l 交椭圆于点 A、B，O 是坐标原点，点 P 满足$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$，点 N 的坐标为$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，当 l 绕点 M 旋转时，求：

（1）动点 P 的轨迹方程；

（2）$|\overrightarrow{NP}|$的最小值与最大值.

20.（本小题满分 12 分）

甲方是一农场，乙方是一工厂．由于乙方生产须占用甲方的资源，因此甲方有权向乙方索赔以弥补经济损失并获得一定净收入，在乙方不赔付甲方的情况下，乙方的年利润 x（元）与年产量 t（吨）满足函数关系 $x=2000\sqrt{t}$．

若乙方每生产一吨产品必须赔付甲方 s 元（以下称 s 为赔付价格），

（1）将乙方的年利润 w（元）表示为年产量 t（吨）的函数，并求出乙方获得最大利润的年产量；

（2）甲方每年受乙方生产影响的经济损失金额 $y=0.002t^2$（元），在乙方按照获得最大利润的产量进行生产的前提下，甲方要在索赔中获得最大净收入，应向乙方要求的赔付价格 s 是多少？

21.（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=ax-\frac{3}{2}x^2$ 的最大值不大于 $\frac{1}{6}$，又当 $x\in[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$时，$f(x)\geq\frac{1}{8}$.

（1）求 a 的值；

（2）设 $0<a_1<\frac{1}{2},a_{n+1}=f(a_n),n\in N^+$.证明$a_n<\frac{1}{n+1}$.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\ln(e^x+a)(a>0)$.

（1）求函数 $y=f(x)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 及 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$;

（2）假设对任意 $x\in[\ln(3a),\ln(4a)]$, 不等式 $|m-f^{-1}(x)|+\ln(f'(x))<0$ 成立，求实数 m 的取值范围.

2004年普通高等学校招生全国统一考试（辽宁卷）
数学试题答案与评分参考

一、选择题：本题考查基本知识和基本运算. 每小题5分，满分60分.

1.D　2.D　3.B　4.C　5.B　6.D　7.B　8.C　9.A　10.A　11.C　12.B

二、填空题：本题考查基本知识和基本运算. 每小题4分，满分16分.

13．1　　14．$-2\sqrt{\pi}$　　15．a　　16．$\dfrac{13}{63}$

三、解答题

17．本小题主要考查空间中的线面关系，四棱锥的有关概念及余弦定理等基础知识，考查空间想象能力和推理能力. 满分12分.

（1）证明：连接BD.

$\because AB=AD,\angle DAB=60°,\therefore \Delta ADB$为等边三角形.

$\because E$是AB中点，$\therefore AB\perp DE.$…………2分

$\because PD\perp$面ABCD，AB$\subset$面ABCD，$\therefore AB\perp PD.$

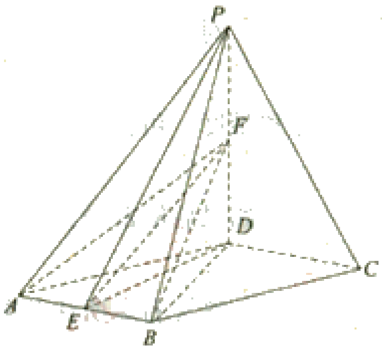
$\because DE\subset$面PED，PD$\subset$面PED，$DE\cap PD=D,\therefore AB\perp$面PED.…………4分

$\because AB\subset$面PAB，$\therefore$面$PED\perp$面PAB. ……………………6分

（2）解：$\because AB\perp$平面PED，PE$\subset$面PED，$\therefore AB\perp PE.$

连接EF，$\because EF\subset$PED，$\therefore AB\perp EF.$

$\therefore \angle PEF$为二面角P—AB—F的平面角. ………… 9分



设AD=2，那么PF=FD=1，DE=$\sqrt{3}$.

在ΔPEF中$,PE=\sqrt{7},EF=2,PF=1,$

$$\therefore \cos\angle PEF=\frac{(\sqrt{7})^2+2^2-1}{2\times 2\sqrt{7}}=\frac{5\sqrt{7}}{14},$$

即二面角P—AB—F的平面角的余弦值为$\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$.…12分

18．本小题主要考查集合的有关概念，含绝对值的不等式，简单三角函数式的化简和已知三角函数值求角等基础知识，考查简单的分类讨论方法，以及分析问题和推理计算能力. 满分12分.

解：（1）由$|x-1|+a-1>0$得$|x-1|>1-a.$

当$a>1$时，解集是R；

当$a\le 1$时，解集是$\{x\,|\,x<a$或$x>2-a\}$.……………………3分

（2）当$a>1$时，($\complement_U$A）=ϕ；

当$a \le 1$时，$\complement_U$A=$\{x \mid a \le x \le 2-a\}$.……………………5 分

因$\sin(\pi x-\frac{\pi}{3})+\sqrt{3}\cos(\pi x-\frac{\pi}{3})=2[\sin(\pi x-\frac{\pi}{3})\cos\frac{\pi}{3}+\cos(\pi x-\frac{\pi}{3})\sin\frac{\pi}{3}]=2\sin\pi x.$

由$\sin\pi x=0$,得$\pi x=k\pi(k\in Z)$,即$x=k\in Z$,所以$B=Z$.…………8 分

当（$\complement_U$A）∩B 恰有 3 个元素时，a就满足$\begin{cases}a<1,\\2\le 2-a<3,\\-1<a\le 0.\end{cases}$ 解得$-1<a\le 0$.…12 分

19．本小题主要考查平面向量的概念、直线方程的求法、椭圆的方程和性质等基础知识，以及轨迹的求法与应用、曲线与方程的关系等解析几何的基本思想和综合解题能力. 满分 12 分.

（1）解法一：直线 l 过点 M（0，1）设其斜率为 k，则 l 的方程为 $y=kx+1$.

记$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$,由题设可得点 A、B 的坐标(x_1,y_1)、(x_2,y_2)是方程组

$$\begin{cases}y=kx+1 & ①\\x^2+\frac{y^2}{4}=1 & ②\end{cases}$$ 的解. …………………………2 分

将①代入②并化简得，$(4+k^2)x^2+2kx-3=0$，所以

$$\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{2k}{4+k^2},\\y_1+y_2=\frac{8}{4+k^2}.\end{cases}$$ 于是

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})=(\frac{-k}{4+k^2},\frac{4}{4+k^2}).$$ …………6 分

设点 P 的坐标为(x,y),则

$$\begin{cases}x=\frac{-k}{4+k^2},\\y=\frac{4}{4+k^2}.\end{cases}$$ 消去参数 k 得 $4x^2+y^2-y=0$ ③

当 k 不存在时，A、B 中点为坐标原点（0，0），也满足方程③，所以点 P 的轨迹方程为$4x^2+y^2-y=0$.………………8 分

解法二：设点 P 的坐标为(x,y)，因$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$在椭圆上，所以

$x_1^2+\frac{y_1^2}{4}=1$, ④　　　　$x_2^2+\frac{y_2^2}{4}=1$. ⑤

④—⑤得 $x_1^2-x_2^2+\frac{1}{4}(y_1^2-y_2^2)=0$，所以

$(x_1-x_2)(x_1+x_2)+\frac{1}{4}(y_1-y_2)(y_1+y_2)=0.$

当 $x_1\neq x_2$ 时，有 $x_1+x_2+\frac{1}{4}(y_1+y_2)\cdot\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=0.$ ⑥

并且 $\begin{cases}x=\frac{x_1+x_2}{2},\\ y=\frac{y_1+y_2}{2},\\ \frac{y-1}{x}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}.\end{cases}$ ⑦　将⑦代入⑥并整理得 $4x^2+y^2-y=0.$ ⑧

当 $x_1=x_2$ 时，点 A、B 的坐标为（0，2）、（0，—2），这时点 P 的坐标为（0，0）也满足⑧，所以点 P 的轨迹方程为

$\frac{x^2}{\frac{1}{16}}+\frac{(y-\frac{1}{2})^2}{\frac{1}{4}}=1.$………………8 分

（2）解：由点 P 的轨迹方程知 $x^2\leq\frac{1}{16}$,即 $-\frac{1}{4}\leq x\leq\frac{1}{4}$.所以

$|\overrightarrow{NP}|^2=(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}-4x^2=-3(x+\frac{1}{6})^2+\frac{7}{12}$……10 分

故当 $x=\frac{1}{4}$，$|\overrightarrow{NP}|$ 取得最小值，最小值为 $\frac{1}{4}$;当 $x=-\frac{1}{6}$ 时，$|\overrightarrow{NP}|$ 取得最大值，

最大值为 $\frac{\sqrt{21}}{6}$.……………………12 分

注：若将 $s=\frac{1000}{\sqrt{t}}$ 代入 v 的表达式求解，可参照上述标准给分.

21．本小题主要考查函数和不等式的概念，考查数学归纳法，以及灵活运用数学方法分析和解决问题的能力. 满分 14 分.

（1）解：由于 $f(x)=ax-\frac{3}{2}x^2$ 的最大值不大于 $\frac{1}{6}$,所以

$f(\frac{a}{3})=\frac{a^2}{6}\leq\frac{1}{6}$,即 $a^2\leq 1$. ①　　………………3 分

又 $x\in[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$时$f(x)\ge\frac{1}{8}$,所以$\begin{cases}f(\frac{1}{2})\ge\frac{1}{8},\\ f(\frac{1}{4})\ge\frac{1}{8},\end{cases}$即$\begin{cases}\frac{a}{2}-\frac{3}{8}\ge\frac{1}{8},\\ \frac{a}{4}-\frac{3}{32}\ge\frac{1}{8}.\end{cases}$解得$a\ge 1$. ②

由①②得 $a=1$. ………………6 分

（2）证法一：（i）当 n=1 时，$0<a_1<\frac{1}{2}$，不等式$0<a_n<\frac{1}{n+1}$成立；

因 $f(x)>0, x\in(0,\frac{2}{3})$,所以$0<a_2=f(a_1)\le\frac{1}{6}<\frac{1}{3}$,故$n=2$时不等式也成立.

（ii）假设$n=k(k\ge 2)$时，不等式$0<a_k<\frac{1}{k+1}$成立，因为$f(x)=x-\frac{3}{2}x^2$的对称轴为$x=\frac{1}{3}$,知$f(x)$在$[0,\frac{1}{3}]$为增函数，所以由$0<a_1<\frac{1}{k+1}\le\frac{1}{3}$得

$0<f(a_k)<f(\frac{1}{k+1})$ ………………8 分

于是有

$$0<a_{k+1}<\frac{1}{k+1}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+2}=\frac{1}{k+2}-\frac{k+4}{2(k+1)^2(k+2)}<\frac{1}{k+2},$$

…………12 分

所以当 n=k+1 时，不等式也成立.

根据（i）（ii）可知，对任何$n\in N^*$，不等式$a_n<\frac{1}{n+1}$成立. …………14 分

证法二：（i）当 n=1 时，$0<a_1<\frac{1}{2}$，不等式$0<a_n<\frac{1}{n+1}$成立；

（ii）假设$n=k(k\ge 1)$时不等式成立，即$0<a_n<\frac{1}{k+1}$，则当 n=k+1 时，

$a_{k+1}=a_k(1-\frac{3}{2}a_k)=\frac{1}{k+2}\cdot(k+2)a_k\cdot(1-\frac{3}{2}a_k)$ ………………8 分

因$(k+2)a_k>0,1-\frac{3}{2}a_k>0$,所以

$$(k+2)a_k\cdot(1-\frac{3}{2}a_k)\le[\frac{1+(k+2-\frac{3}{2})a_k}{2}]^2=[\frac{1+(k+\frac{1}{2})a_k}{2}]^2<1.$$ ……12 分

于是$0<a_{k+1}<\frac{1}{k+2}$.　因此当 n=k+1 时，不等式也成立.

根据（i）（ii）可知，对任何$n\in N^*$，不等式$a_n<\frac{1}{n+1}$成立. …………14 分

证法三：（i）当 n=1 时，$0<a_1<\frac{1}{2}$,不等式$0<a_n<\frac{1}{n+1}$成立；

（ii）假设$n=k(k\ge 1)$时,$0<a_k<\frac{1}{k+1}$,则当$n=k+1$时.

若$0 < a_k < \dfrac{1}{k+2}$.则$0 < a_{k+1} = a_k(1-\dfrac{3}{2}a_k) < a_k < \dfrac{1}{k+2}$.　①…………8 分

$$v(t_2)-v(t_1)=\frac{t_2^2-a^2}{t_2}-\frac{t_1^2-a^2}{t_1}=\frac{t_1t_2(t_2-t_1)-a^2(t_2-t_1)}{t_3t_2}>0.$$

所以$u(t),v(t)$都是增函数.

因此当$t\in[3a,4a]$时，$u(t)$的最大值为$u(4a)=\dfrac{12}{5}a, v(t)$的最小值为

$v(3a)=\dfrac{8}{3}a,$而不等式②成立当且仅当$u(4a) < e^m < v(3a),$即

$\dfrac{12}{5}a < e^m < \dfrac{8}{3}a$，于是得 $\ln(\dfrac{12}{5}a) < m < \ln(\dfrac{8}{3}a)$.………………12 分

解法二：由$|m-f^{-1}(x)|+\ln(f'(x))<0$得

$$\ln(e^x-a)-\ln(e^x+a)+x < m < \ln(e^x-a)+\ln(e^x+a)-x.$$

设$\varphi(x)=\ln(e^x-a)-\ln(e^x+a)+x, \psi(x)=\ln(e^x-a)+\ln(e^x+a)-x,$

于是原不等式对于$x\in[\ln(3a),\ln(4a)]$恒成立等价于$\varphi(x) < m < \psi(x)$. ③…7 分

由$\varphi'(x)=\dfrac{e^x}{e^x-a}-\dfrac{e^x}{e^x+a}+1, \psi'(x)=\dfrac{e^x}{e^x-a}+\dfrac{e^x}{e^x+a}-1$，注意到

$0 < e^x-a < e^x < e^x+a,$故有$\varphi'(x)>0, \psi'(x)>0$，从而可$\varphi(x)$与$\varphi(x)$均在

$[\ln(3a),\ln(4a)]$上单调递增，因此不等式③成立当且仅当

$\varphi(\ln(4a)) < m < \psi(\ln(3a))$.即 $\ln(\dfrac{12}{5}a) < m < \ln(\dfrac{8}{3}a)$.………………12 分