

2010年全国统一高考数学试卷（理科）（大纲版Ⅱ）

参考答案与试题解析

一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

1. （5分）复数 $(\frac{3-i}{1+i})^2 =$ ()

- A. $-3-4i$ B. $-3+4i$ C. $3-4i$ D. $3+4i$

【考点】A5：复数的运算.

【专题】11：计算题.

【分析】首先进行复数的除法运算，分子和分母同乘以分母的共轭复数，把复数整理成整式形式，再进行复数的乘方运算，合并同类项，得到结果.

【解答】解： $(\frac{3-i}{1+i})^2 = [\frac{(3-i)(1-i)}{2}]^2 = (1-2i)^2 = -3-4i$.

故选：A.

【点评】本题主要考查复数的除法和乘方运算，是一个基础题，解题时没有规律和技巧可寻，只要认真完成，则一定会得分.

2. （5分）函数 $y = \frac{1+\ln(x-1)}{2} (x > 1)$ 的反函数是 ()

- A. $y = e^{2x-1} - 1 (x > 0)$ B. $y = e^{2x-1} + 1 (x > 0)$
C. $y = e^{2x-1} - 1 (x \in \mathbb{R})$ D. $y = e^{2x-1} + 1 (x \in \mathbb{R})$

【考点】4H：对数的运算性质；4R：反函数.

【专题】11：计算题；16：压轴题.

【分析】从条件中 $y = \frac{1+\ln(x-1)}{2} (x > 1)$ 中反解出 x ，再将 x, y 互换即得. 解答

本题首先熟悉反函数的概念，然后根据反函数求解三步骤：1、换： x, y 换位，2、解：解出 y ，3、标：标出定义域，据此即可求得反函数.

【解答】解：由原函数解得

$$x = e^{2y-1} + 1,$$

$$\therefore f^{-1}(x) = e^{2x-1} + 1,$$

又 $x > 1$, $\therefore x - 1 > 0$;

$\therefore \ln(x - 1) \in \mathbb{R}$. \therefore 在反函数中 $x \in \mathbb{R}$,

故选: D.

【点评】 求反函数, 一般应分以下步骤: (1) 由已知解析式 $y=f(x)$ 反求出 $x=\Phi(y)$; (2) 交换 $x=\Phi(y)$ 中 x 、 y 的位置; (3) 求出反函数的定义域 (一般可通过求原函数的值域的方法求反函数的定义域).

3. (5分) 若变量 x , y 满足约束条件
$$\begin{cases} x \geq -1 \\ y \geq x \\ 3x + 2y \leq 5 \end{cases}$$
, 则 $z=2x+y$ 的最大值为 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

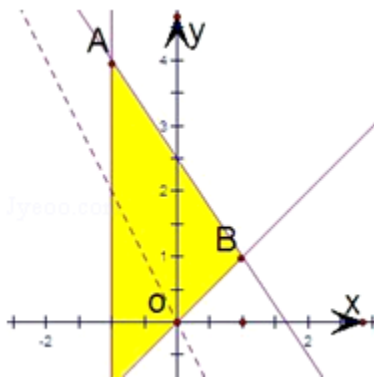
【考点】 7C: 简单线性规划.

【专题】 31: 数形结合.

【分析】 先根据约束条件画出可行域, 设 $z=2x+y$, 再利用 z 的几何意义求最值, 只需求出直线 $z=2x+y$ 过可行域内的点B时, 从而得到 m 值即可.

【解答】 解: 作出可行域, 作出目标函数线, 可得直线与 $y=x$ 与 $3x+2y=5$ 的交点为最优解点, \therefore 即为B(1, 1), 当 $x=1$, $y=1$ 时 $z_{\max}=3$.

故选: C.



【点评】 本题考查了线性规划的知识, 以及利用几何意义求最值, 属于基础题.

4. (5分) 如果等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3+a_4+a_5=12$, 那么 $a_1+a_2+\dots+a_7=(\quad)$
- A. 14 B. 21 C. 28 D. 35

【考点】 83: 等差数列的性质; 85: 等差数列的前 n 项和.

【分析】 由等差数列的性质求解.

【解答】 解: $a_3+a_4+a_5=3a_4=12$, $a_4=4$,

$$\therefore a_1+a_2+\dots+a_7=\frac{7(a_1+a_7)}{2}=7a_4=28$$

故选: C.

【点评】 本题主要考查等差数列的性质.

5. (5分) 不等式 $\frac{x^2-x-6}{x-1}>0$ 的解集为 (\quad)

- A. $\{x|x<-2, \text{或}x>3\}$ B. $\{x|x<-2, \text{或}1<x<3\}$
C. $\{x|-2<x<1, \text{或}x>3\}$ D. $\{x|-2<x<1, \text{或}1<x<3\}$

【考点】 73: 一元二次不等式及其应用.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 解 $\frac{f(x)}{g(x)}>0$, 可转化成 $f(x)\cdot g(x)>0$, 再利用根轴法进行求解.

【解答】 解: $\frac{x^2-x-6}{x-1}>0\Leftrightarrow\frac{(x-3)(x+2)}{(x-1)}>0\Leftrightarrow(x-3)(x+2)(x-1)>0$

利用数轴穿根法解得 $-2<x<1$ 或 $x>3$,

故选: C.

【点评】 本试题主要考查分式不等式与高次不等式的解法, 属于不等式的基础题.

6. (5分) 将标号为1, 2, 3, 4, 5, 6的6张卡片放入3个不同的信封中, 若每个信封放2张, 其中标号为1, 2的卡片放入同一信封, 则不同的方法共有 (\quad)
- A. 12种 B. 18种 C. 36种 D. 54种

【考点】 D9: 排列、组合及简单计数问题.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 本题是一个分步计数问题, 首先从3个信封中选一个放1, 2有3种不同的选法, 再从剩下的4个数中选两个放一个信封有 C_4^2 , 余下放入最后一个信封, 根据分步计数原理得到结果.

【解答】 解: 由题意知, 本题是一个分步计数问题,

∴先从3个信封中选一个放1, 2, 有 $C_3^1=3$ 种不同的选法; 根据分组公式, 其他四

封信放入两个信封, 每个信封两个有 $\frac{C_4^2 \cdot C_2^2}{A_2^2} \cdot A_2^2=6$ 种放法,

∴共有 $3 \times 6 \times 1=18$.

故选: B.

【点评】 本题考查分步计数原理, 考查平均分组问题, 是一个易错题, 解题的关键是注意到第二步从剩下的4个数中选两个放到一个信封中, 这里包含两个步骤, 先平均分组, 再排列.

7. (5分) 为了得到函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象, 只需把函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

的图象 ()

A. 向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个长度单位

B. 向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个长度单位

C. 向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个长度单位

D. 向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个长度单位

【考点】 HJ: 函数 $y=A\sin(\omega x+\phi)$ 的图象变换.

【专题】 1: 常规题型.

【分析】 先将2提出来, 再由左加右减的原则进行平移即可.

【解答】 解: $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin 2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)$, $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$,

所以将 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个长度单位得到 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象,

故选：B.

【点评】本试题主要考查三角函数图象的平移. 平移都是对单个的 x 来说的.

8. (5分) $\triangle ABC$ 中, 点D在边AB上, CD平分 $\angle ACB$, 若 $\overrightarrow{CB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$, $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, 则 $\overrightarrow{CD}=(\quad)$

- A. $\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$ B. $\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$ C. $\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{4}{5}\vec{b}$ D. $\frac{4}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}$

【考点】9B: 向量加减混合运算.

【分析】由 $\triangle ABC$ 中, 点D在边AB上, CD平分 $\angle ACB$, 根据三角形内角平分线定理, 我们易得到 $\frac{BD}{AD}=\frac{BC}{AC}=\frac{1}{2}$, 我们将 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}$ 后, 将各向量用 \vec{a} , \vec{b} 表示, 即可得到答案.

【解答】解: \because CD为角平分线,

$$\therefore \frac{BD}{AD}=\frac{BC}{AC}=\frac{1}{2},$$

$$\therefore \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}=\vec{a}-\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$$

故选：B.

【点评】本题考查了平面向量的基础知识, 解答的核心是三角形内角平分线定理, 即若AD为三角形ABC的内角A的角平分线, 则 $AB: AC=BD: CD$

9. (5分) 已知正四棱锥S - ABCD中, $SA=2\sqrt{3}$, 那么当该棱锥的体积最大时, 它的高为()

- A. 1 B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. 3

【考点】LF: 棱柱、棱锥、棱台的体积.

【专题】11: 计算题; 16: 压轴题.

【分析】设出底面边长, 求出正四棱锥的高, 写出体积表达式, 利用求导求得

最大值时，高的值.

【解答】解：设底面边长为 a ，则高 $h = \sqrt{SA^2 - \left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2} = \sqrt{12 - \frac{a^2}{2}}$ ，所以体积 $V = \frac{1}{3}$

$$a^2h = \frac{1}{3}\sqrt{12a^4 - \frac{1}{2}a^6},$$

设 $y = 12a^4 - \frac{1}{2}a^6$ ，则 $y' = 48a^3 - 3a^5$ ，当 y 取最大值时， $y' = 48a^3 - 3a^5 = 0$ ，解得 $a = 0$ 或 $a =$

4时，当 $a = 4$ 时，体积最大，

$$\text{此时 } h = \sqrt{12 - \frac{a^2}{2}} = 2,$$

故选：C.

【点评】本试题主要考查椎体的体积，考查高次函数的最值问题的求法. 是中档题.

10. (5分) 若曲线 $y = \frac{1}{x^2}$ 在点 $(a, \frac{1}{a^2})$ 处的切线与两个坐标围成的三角形的面积为18，则 $a =$ ()

A. 64

B. 32

C. 16

D. 8

【考点】6H：利用导数研究曲线上某点切线方程.

【专题】31：数形结合.

【分析】欲求参数 a 值，必须求出在点 $(a, \frac{1}{a^2})$ 处的切线方程，只须求出其斜率的值即可，故先利用导数求出在 $x = a$ 处的导函数值，再结合导数的几何意义即可求出切线的斜率得到切线的方程，最后求出与坐标轴的交点坐标结合三角形的面积公式. 从而问题解决.

【解答】解： $y' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$ ， $\therefore k = -\frac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}}$ ，

切线方程是 $y - \frac{1}{a^2} = -\frac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}}(x - a)$ ，

令 $x = 0$ ， $y = \frac{3}{2}a^{-\frac{1}{2}}$ ，令 $y = 0$ ， $x = 3a$ ，

∴三角形的面积是 $s = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot \frac{3}{2} a^{-\frac{1}{2}} = 18$,

解得 $a = 64$.

故选：A.

【点评】 本试题主要考查求导法则、导数的几何意义、切线的求法和三角形的面积公式，考查考生的计算能力.

11. (5分) 与正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的三条棱 AB 、 CC_1 、 A_1D_1 所在直线的距离相等的点 ()

A. 有且只有1个 B. 有且只有2个 C. 有且只有3个 D. 有无数个

【考点】 LO: 空间中直线与直线之间的位置关系.

【专题】 16: 压轴题.

【分析】 由于点 D 、 B_1 显然满足要求，猜想 B_1D 上任一点都满足要求，然后想办法证明结论.

【解答】 解：在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 上建立如图所示空间直角坐标系，并设该正方体的棱长为1，连接 B_1D ，并在 B_1D 上任取一点 P ，

因为 $\overrightarrow{DB_1} = (1, 1, 1)$ ，

所以设 $P(a, a, a)$ ，其中 $0 \leq a \leq 1$.

作 $PE \perp$ 平面 A_1D ，垂足为 E ，再作 $EF \perp A_1D_1$ ，垂足为 F ，

则 PF 是点 P 到直线 A_1D_1 的距离.

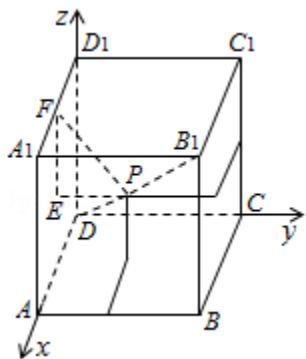
所以 $PF = \sqrt{a^2 + (1-a)^2}$;

同理点 P 到直线 AB 、 CC_1 的距离也是 $\sqrt{a^2 + (1-a)^2}$.

所以 B_1D 上任一点与正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的三条棱 AB 、 CC_1 、 A_1D_1 所在直线的距离都相等，

所以与正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的三条棱 AB 、 CC_1 、 A_1D_1 所在直线的距离相等的点有无数个.

故选：D.



【点评】 本题主要考查合情推理的能力及空间中点到线的距离的求法.

12. (5分) 已知椭圆 $T: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 过右焦点 F 且

斜率为 k ($k > 0$) 的直线与 T 相交于 A, B 两点, 若 $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{FB}$, 则 $k =$ ()

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2

【考点】 KH: 直线与圆锥曲线的综合.

【专题】 11: 计算题; 16: 压轴题.

【分析】 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 根据 $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{FB}$ 求得 y_1 和 y_2 关系根据离心率

设 $a = 2t$, $c = \sqrt{3}t$, $b = t$, 代入椭圆方程与直线方程联立, 消去 x , 根据韦达定

理表示出 $y_1 + y_2$ 和 $y_1 y_2$, 进而根据 y_1 和 y_2 关系求得 k .

【解答】 解: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

$$\because \overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{FB}, \therefore y_1 = -3y_2,$$

$$\because e = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 设 } a = 2t, c = \sqrt{3}t, b = t,$$

$$\therefore x^2 + 4y^2 - 4t^2 = 0 \text{ ①},$$

设直线 AB 方程为 $x = sy + \sqrt{3}t$, 代入①中消去 x , 可得 $(s^2 + 4)y^2 + 2\sqrt{3}sty - t^2 = 0$

$$\therefore y_1 + y_2 = -\frac{2\sqrt{3}st}{s^2 + 4}, y_1 y_2 = -\frac{t^2}{s^2 + 4}, -2y_2 = -\frac{2\sqrt{3}st}{s^2 + 4}, -3y_2^2 = -\frac{t^2}{s^2 + 4},$$

$$\text{解得 } s^2 = \frac{1}{2}, k = \sqrt{2}$$

故选：B.

【点评】 本题主要考查了直线与圆锥曲线的综合问题. 此类题问题综合性强, 要求考生有较高地转化数学思想的运用能力, 能将已知条件转化到基本知识的运用.

二、填空题 (共4小题, 每小题5分, 满分20分)

13. (5分) 已知 α 是第二象限的角, $\tan(\pi+2\alpha) = -\frac{4}{3}$, 则 $\tan\alpha = \underline{-\frac{1}{2}}$.

【考点】 GO: 运用诱导公式化简求值; GS: 二倍角的三角函数.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 根据诱导公式 $\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha$ 得到 $\tan 2\alpha$, 然后利用公式 $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$ 求出 $\tan\alpha$, 因为 α 为第二象限的角, 判断取值即可.

【解答】 解: 由 $\tan(\pi+2\alpha) = -\frac{4}{3}$ 得 $\tan 2\alpha = -\frac{4}{3}$, 又 $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = -\frac{4}{3}$,

解得 $\tan\alpha = -\frac{1}{2}$ 或 $\tan\alpha = 2$,

又 α 是第二象限的角, 所以 $\tan\alpha = -\frac{1}{2}$.

故答案为: $\underline{-\frac{1}{2}}$.

【点评】 本试题主要考查三角函数的诱导公式、正切的二倍角公式和解方程, 考查考生的计算能力.

14. (5分) 若 $(x - \frac{a}{x})^9$ 的展开式中 x^3 的系数是 -84 , 则 $a = \underline{1}$.

【考点】 DA: 二项式定理.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 利用二项展开式的通项公式求出第 $r+1$ 项, 令 x 的指数为3得展开式中 x^3 的系数, 列出方程解得.

【解答】 解: $(x - \frac{a}{x})^9$ 展开式的通项为 $T_{r+1} = C_9^r x^{9-r} (-\frac{a}{x})^r = (-a)^r C_9^r x^{9-2r}$

令 $9 - 2r = 3$ 得 $r = 3$

∴展开式中 x^3 的系数是 $C_9^3 (-a)^3 = -84a^3 = -84$,

∴ $a=1$.

故答案为1

【点评】本试题主要考查二项展开式的通项公式和求指定项系数的方法.

15. (5分) 已知抛物线 $C: y^2=2px$ ($p>0$) 的准线 l , 过 $M(1, 0)$ 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线与 l 相交于 A , 与 C 的一个交点为 B , 若 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$, 则 $p=$ 2 .

【考点】K8: 抛物线的性质.

【专题】11: 计算题; 16: 压轴题.

【分析】设直线 AB 的方程与抛物线方程联立消去 y 得 $3x^2 + (-6 - 2p)x + 3 = 0$, 进而根据 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$, 可知 M 为 A 、 B 的中点,

可得 p 的关系式, 解方程即可求得 p .

【解答】解: 设直线 $AB: y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$, 代入 $y^2=2px$ 得 $3x^2 + (-6 - 2p)x + 3 = 0$,

又∵ $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$, 即 M 为 A 、 B 的中点,

∴ $x_B + (-\frac{p}{2}) = 2$, 即 $x_B = 2 + \frac{p}{2}$,

得 $p^2 + 4p - 12 = 0$,

解得 $p=2$, $p=-6$ (舍去)

故答案为: 2

【点评】本题考查了抛物线的几何性质. 属基础题.

16. (5分) 已知球 O 的半径为4, 圆 M 与圆 N 为该球的两个小圆, AB 为圆 M 与圆 N 的公共弦, $AB=4$, 若 $OM=ON=3$, 则两圆圆心的距离 $MN=$ 3 .

【考点】JE: 直线和圆的方程的应用; ND: 球的性质.

【专题】11: 计算题; 16: 压轴题.

【分析】根据题意画出图形, 欲求两圆圆心的距离, 将它放在与球心组成的三角形 MNO 中, 只要求出球心角即可, 通过球的性质构成的直角三角形即可

解得.

【解答】解法一：∵ON=3，球半径为4，

∴小圆N的半径为 $\sqrt{7}$ ，

∴小圆N中弦长AB=4，作NE垂直于AB，

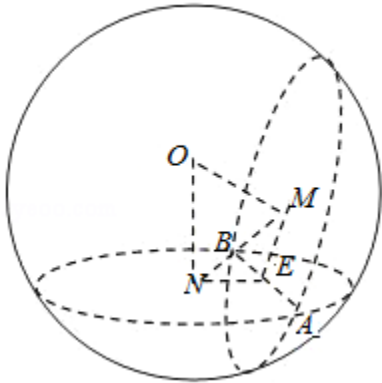
∴NE= $\sqrt{3}$ ，同理可得ME= $\sqrt{3}$ ，在直角三角形ONE中，

∴NE= $\sqrt{3}$ ，ON=3，

$$\therefore \angle EON = \frac{\pi}{6},$$

$$\therefore \angle MON = \frac{\pi}{3},$$

∴MN=3.



故填：3.

解法二：如下图：设AB的中点为C，则OC与MN必相交于MN中点为E，因为OM=

ON=3，

故小圆半径NB为 $\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$

C为AB中点，故CB=2；所以NC= $\sqrt{\sqrt{7}^2-2^2}=\sqrt{3}$ ，

∴△ONC为直角三角形，NE为△ONC斜边上的高，OC= $\sqrt{4^2-2^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$$\therefore MN=2EN=2 \cdot CN \cdot \frac{ON}{CO} = 2 \times \sqrt{3} \times \frac{3}{2\sqrt{3}} = 3$$

$$\text{所以AD} = \frac{BD \cdot \sin B}{\sin \angle BAD} = \frac{33 \times \frac{5}{13}}{\frac{33}{65}} = 25.$$

【点评】三角函数与解三角形的综合性问题，是近几年高考的热点，在高考试题中频繁出现。这类题型难度比较低，一般出现在17或18题，属于送分题，估计以后这类题型仍会保留，不会有太大改变。解决此类问题，要根据已知条件，灵活运用正弦定理或余弦定理，求边角或将边角互化。

18. (12分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = (n^2 + n) \cdot 3^n$.

(I) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{S_n}$; (II) 证明: $\frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_n}{n^2} > 3^n$.

【考点】6F: 极限及其运算; R6: 不等式的证明.

【专题】11: 计算题; 14: 证明题.

【分析】(1) 由题意知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{S_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{S_{n-1}}{S_n}) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n-1}}{S_n}$

, 由此可知答案.

$$\begin{aligned} (2) \text{ 由题意知, } & \frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_n}{n^2} = \frac{S_1}{1^2} + \frac{S_2 - S_1}{2^2} + \dots + \frac{S_n - S_{n-1}}{n^2} \\ = & (\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}) S_1 + (\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}) S_2 + \dots + (\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}) S_{n-1} + \frac{1}{n^2} S_n > \frac{1}{n^2} S_n, \text{ 由} \end{aligned}$$

此可知, 当 $n \geq 1$ 时, $\frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_n}{n^2} > 3^n$.

【解答】解: (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{S_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{S_{n-1}}{S_n}) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n-1}}{S_n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n-1}}{S_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}, \text{ 所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{S_n} = \frac{2}{3};$$

(2) 当 $n=1$ 时, $\frac{a_1}{1^2} = S_1 = 6 > 3$;

$$\begin{aligned}
 & \text{当 } n > 1 \text{ 时, } \frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{n^2} = \frac{S_1}{1^2} + \frac{S_2 - S_1}{2^2} + \cdots + \frac{S_n - S_{n-1}}{n^2} \\
 & = \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) S_1 + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) S_2 + \cdots + \left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}\right) S_{n-1} + \frac{1}{n^2} S_n > \frac{1}{n^2} S_n = \\
 & \quad \frac{n^2 + n}{n^2} \cdot 3^n > 3^n
 \end{aligned}$$

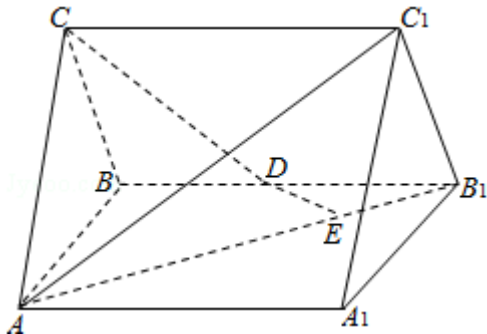
所以, $n \geq 1$ 时, $\frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{n^2} > 3^n$.

【点评】 本题考查数列的极限问题, 解题时要注意公式的灵活运用.

19. (12分) 如图, 直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AC = BC$, $AA_1 = AB$, D 为 BB_1 的中点, E 为 AB_1 上的一点, $AE = 3EB_1$.

(I) 证明: DE 为异面直线 AB_1 与 CD 的公垂线;

(II) 设异面直线 AB_1 与 CD 的夹角为 45° , 求二面角 $A_1 - AC_1 - B_1$ 的大小.



【考点】 LM: 异面直线及其所成的角; LQ: 平面与平面之间的位置关系.

【专题】 11: 计算题; 14: 证明题.

【分析】 (1) 欲证 DE 为异面直线 AB_1 与 CD 的公垂线, 即证 DE 与异面直线 AB_1 与 CD 垂直相交即可;

(2) 将 AB_1 平移到 DG , 故 $\angle CDG$ 为异面直线 AB_1 与 CD 的夹角, 作 $HK \perp AC_1$, K 为垂足, 连接 B_1K , 由三垂线定理, 得 $B_1K \perp AC_1$, 因此 $\angle B_1KH$ 为二面角 $A_1 - AC_1 - B_1$ 的平面角, 在三角形 B_1KH 中求出此角即可.

【解答】 解: (1) 连接 A_1B , 记 A_1B 与 AB_1 的交点为 F .

因为面 AA_1BB_1 为正方形, 故 $A_1B \perp AB_1$, 且 $AF = FB_1$,

又 $AE = 3EB_1$, 所以 $FE = EB_1$,

又D为 BB_1 的中点，

故 $DE \parallel BF$ ， $DE \perp AB_1$ 。

作 $CG \perp AB$ ，G为垂足，由 $AC=BC$ 知，G为AB中点。

又由底面 $ABC \perp$ 面 AA_1B_1B 。连接DG，则 $DG \parallel AB_1$ ，

故 $DE \perp DG$ ，由三垂线定理，得 $DE \perp CD$ 。

所以DE为异面直线 AB_1 与CD的公垂线。

(2) 因为 $DG \parallel AB_1$ ，故 $\angle CDG$ 为异面直线 AB_1 与CD的夹角， $\angle CDG=45^\circ$

设 $AB=2$ ，则 $AB_1=2\sqrt{2}$ ， $DG=\sqrt{2}$ ， $CG=\sqrt{2}$ ， $AC=\sqrt{3}$ 。

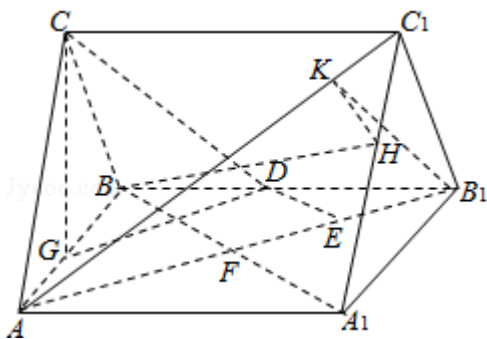
作 $B_1H \perp A_1C_1$ ，H为垂足，因为底面 $A_1B_1C_1 \perp$ 面 AA_1CC_1 ，故 $B_1H \perp$ 面 AA_1CC_1 。又作 HK

$\perp AC_1$ ，K为垂足，连接 B_1K ，由三垂线定理，得 $B_1K \perp AC_1$ ，因此 $\angle B_1KH$ 为二面角 $A_1 - AC_1 - B_1$ 的平面角。

$$B_1H = \frac{2\sqrt{6}}{3}, C_1H = \frac{\sqrt{3}}{3}, AC_1 = \sqrt{7}, HK = \frac{2\sqrt{21}}{21}$$

$$\tan \angle B_1KH = \sqrt{14},$$

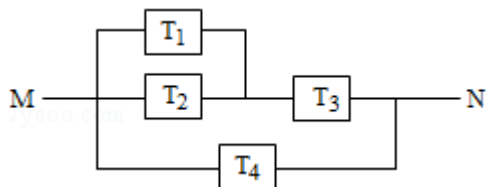
\therefore 二面角 $A_1 - AC_1 - B_1$ 的大小为 $\arctan \sqrt{14}$ 。



【点评】 本试题主要考查空间的线面关系与空间角的求解，考查考生的空间想象与推理计算的能力。三垂线定理是立体几何的最重要定理之一，是高考的热点，它是处理线线垂直问题的有效方法，同时它也是确定二面角的平面角的主要手段。通过引入空间向量，用向量代数形式来处理立体几何问题，淡化了传统几何中的“形”到“形”的推理方法，从而降低了思维难度，使解题变得程序化，这是用向量解立体几何问题的独到之处。

20. (12分) 如图，由M到N的电路中有4个元件，分别标为 T_1, T_2, T_3, T_4 ，电流能通过 T_1, T_2, T_3 的概率都是P，电流能通过 T_4 的概率是0.9，电流能否通过各元件相互独立。已知 T_1, T_2, T_3 中至少有一个能通过电流的概率为0.999

- (I) 求P;
 (II) 求电流能在M与N之间通过的概率.



【考点】 C5: 互斥事件的概率加法公式; C8: 相互独立事件和相互独立事件的概率乘法公式.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 (I) 设出基本事件, 将要求事件用基本事件的来表示, 将 T_1, T_2, T_3 至少有一个能通过电流用基本事件表示并求出概率即可求得 p .

(II) 根据题意, B 表示事件: 电流能在M与N之间通过, 根据电路图, 可得 $B = A_4 + (1 - A_4) A_1 A_3 + (1 - A_4) (1 - A_1) A_2 A_3$, 由互斥事件的概率公式, 代入数据计算可得答案.

【解答】 解: (I) 根据题意, 记电流能通过 T_i 为事件 $A_i, i=1, 2, 3, 4$,
 A 表示事件: T_1, T_2, T_3 , 中至少有一个能通过电流,

易得 A_1, A_2, A_3 相互独立, 且 $\bar{A} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3$,

$$P(\bar{A}) = (1 - p)^3 = 1 - 0.999 = 0.001,$$

计算可得, $p=0.9$;

(II) 根据题意, B 表示事件: 电流能在M与N之间通过,
 有 $B = A_4 + (1 - A_4) A_1 A_3 + (1 - A_4) (1 - A_1) A_2 A_3$,

$$\begin{aligned} \text{则 } P(B) &= P(A_4 + (1 - A_4) A_1 A_3 + (1 - A_4) (1 - A_1) A_2 A_3) \\ &= 0.9 + 0.1 \times 0.9 \times 0.9 + 0.1 \times 0.1 \times 0.9 \times 0.9 \\ &= 0.9891. \end{aligned}$$

【点评】 本题考查了概率中的互斥事件、对立事件及独立事件的概率, 注意先明确事件之间的关系, 进而选择对应的公式来计算.

21. (12分) 已知斜率为1的直线l与双曲线C: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)相交于B

、D两点, 且BD的中点为M(1, 3).

(I) 求C的离心率;

(II) 设C的右顶点为A, 右焦点为F, $|DF| \cdot |BF| = 17$, 证明: 过A、B、D三点的圆与x轴相切.

【考点】 J9: 直线与圆的位置关系; KC: 双曲线的性质; KH: 直线与圆锥曲线的综合.

【专题】 11: 计算题; 14: 证明题; 16: 压轴题.

【分析】 (I) 由直线过点(1, 3)及斜率可得直线方程, 直线与双曲线交于BD两点的中点为(1, 3), 可利用直线与双曲线消元后根据中点坐标公式找出a, b的关系式即求得离心率.

(II) 利用离心率将条件 $|FA| \cdot |FB| = 17$, 用含a的代数式表示, 即可求得a, 则A点坐标可得(1, 0), 由于A在x轴上所以, 只要证明 $2AM = BD$ 即证得.

【解答】 解: (I) 由题设知, l的方程为: $y = x + 2$, 代入C的方程, 并化简, 得 $(b^2 - a^2)x^2 - 4a^2x - a^2b^2 - 4a^2 = 0$,

$$\text{设 } B(x_1, y_1), D(x_2, y_2), \text{ 则 } x_1 + x_2 = \frac{4a^2}{b^2 - a^2}, x_1 x_2 = -\frac{4a^2 + a^2 b^2}{b^2 - a^2}, \quad \textcircled{1}$$

$$\text{由 } M(1, 3) \text{ 为 } BD \text{ 的中点知 } \frac{x_1 + x_2}{2} = 1.$$

$$\text{故 } \frac{1}{2} \times \frac{4a^2}{b^2 - a^2} = 1, \text{ 即 } b^2 = 3a^2, \quad \textcircled{2}$$

$$\text{故 } c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2a,$$

$$\therefore C \text{ 的离心率 } e = \frac{c}{a} = 2.$$

(II) 由①②知, C的方程为: $3x^2 - y^2 = 3a^2$, A(a, 0), F(2a, 0),

$$x_1 + x_2 = 2, x_1 x_2 = -\frac{4 + 3a^2}{2}.$$

故不妨设 $x_1 \leq -a, x_2 \geq a$,

$$|BF| = \sqrt{(x_1 - 2a)^2 + y_1^2} = a - 2x_1, |FD| = \sqrt{(x_2 - 2a)^2 + y_2^2} = 2x_2 - a,$$

$$|BF| \cdot |FD| = (a - 2x_1)(2x_2 - a) = -4x_1x_2 + 2a(x_1 + x_2) - a^2 = 5a^2 + 4a + 8.$$

又 $|BF| \cdot |FD| = 17$, 故 $5a^2 + 4a + 8 = 17$.

解得 $a = 1$, 或 $a = -\frac{9}{5}$ (舍去),

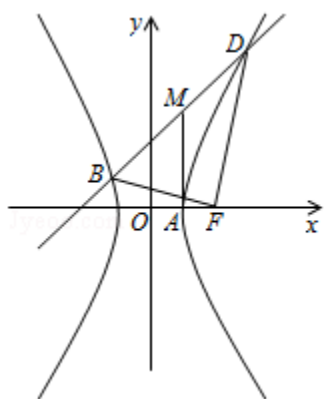
$$\text{故 } |BD| = \sqrt{2} |x_1 - x_2| = \sqrt{2} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = 6,$$

连接 MA , 则由 $A(1, 0)$, $M(1, 3)$ 知 $|MA| = 3$,

从而 $MA = MB = MD$, 且 $MA \perp x$ 轴,

因此以 M 为圆心, MA 为半径的圆经过 A 、 B 、 D 三点, 且在点 A 处与 x 轴相切,

所以过 A 、 B 、 D 三点的圆与 x 轴相切.



【点评】 本题考查了圆锥曲线、直线与圆的知识, 考查学生运用所学知识解决问题的能力.

22. (12分) 设函数 $f(x) = 1 - e^{-x}$.

(I) 证明: 当 $x > -1$ 时, $f(x) \geq \frac{x}{x+1}$;

(II) 设当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \leq \frac{x}{ax+1}$, 求 a 的取值范围.

【考点】 6E: 利用导数研究函数的最值.

【专题】 15: 综合题; 16: 压轴题.

【分析】 (1) 将函数 $f(x)$ 的解析式代入 $f(x) \geq \frac{x}{x+1}$ 整理成 $e^x \geq 1+x$, 组成新函数

$g(x) = e^x - x - 1$, 然后根据其导函数判断单调性进而可求出函数 $g(x)$ 的最小值 $g(0)$, 进而 $g(x) \geq g(0)$ 可得证.

(2) 先确定函数 $f(x)$ 的取值范围, 然后对 a 分 $a < 0$ 和 $a \geq 0$ 两种情况进行讨论.

当 $a < 0$ 时根据 x 的范围可直接得到 $f(x) \leq \frac{x}{ax+1}$ 不成立；当 $a \geq 0$ 时，令 $h(x) = axf(x) + f(x) - x$ ，然后对函数 $h(x)$ 进行求导，根据导函数判断单调性并求出最值，求 a 的范围。

【解答】解：（1）当 $x > -1$ 时， $f(x) \geq \frac{x}{x+1}$ 当且仅当 $e^x \geq 1+x$

令 $g(x) = e^x - x - 1$ ，则 $g'(x) = e^x - 1$

当 $x \geq 0$ 时 $g'(x) \geq 0$ ， $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 是增函数

当 $x \leq 0$ 时 $g'(x) \leq 0$ ， $g(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 是减函数

于是 $g(x)$ 在 $x=0$ 处达到最小值，因而当 $x \in \mathbb{R}$ 时， $g(x) \geq g(0)$ ，即 $e^x \geq 1+x$

所以当 $x > -1$ 时， $f(x) \geq \frac{x}{x+1}$

（2）由题意 $x \geq 0$ ，此时 $f(x) \geq 0$

当 $a < 0$ 时，若 $x > -\frac{1}{a}$ ，则 $\frac{x}{ax+1} < 0$ ， $f(x) \leq \frac{x}{ax+1}$ 不成立；

当 $a \geq 0$ 时，令 $h(x) = axf(x) + f(x) - x$ ，则

$f(x) \leq \frac{x}{ax+1}$ 当且仅当 $h(x) \leq 0$

因为 $f(x) = 1 - e^{-x}$ ，所以 $h'(x) = af(x) + axf'(x) + f'(x) - 1 = af(x) - axf(x) + ax - f(x)$

（i）当 $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ 时，由（1）知 $x \leq (x+1)f(x)$

$h'(x) \leq af(x) - axf(x) + a(x+1)f(x) - f(x)$

$= (2a - 1)f(x) \leq 0$ ，

$h(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 是减函数， $h(x) \leq h(0) = 0$ ，即 $f(x) \leq \frac{x}{ax+1}$ ；

（ii）当 $a > \frac{1}{2}$ 时，由 $y = x - f(x) = x - 1 + e^{-x}$ ，

$y' = 1 - e^{-x}$ ， $x > 0$ 时，函数 y 递增； $x < 0$ ，函数 y 递减。

可得 $x=0$ 处函数 y 取得最小值0，即有 $x \geq f(x)$ 。

$h'(x) = af(x) - axf(x) + ax - f(x) \geq af(x) - axf(x) + af(x) - f(x) = (2a - 1 - ax)f(x)$

当 $0 < x < \frac{2a-1}{a}$ 时， $h'(x) > 0$ ，所以 $h'(x) > 0$ ，所以 $h(x) > h(0) = 0$ ，即 $f(x) > \frac{x}{ax+1}$

$(x) > \frac{x}{ax+1}$

综上， a 的取值范围是 $[0, \frac{1}{2}]$

【点评】 本题主要考查导数的应用和利用导数证明不等式，考查考生综合运用知识的能力及分类讨论的思想，考查考生的计算能力及分析问题、解决问题的能力；导数常作为高考的压轴题，对考生的能力要求非常高，它不仅要求考生牢固掌握基础知识、基本技能，还要求考生具有较强的分析能力和计算能力。估计以后对导数的考查力度不会减弱。作为压轴题，主要是涉及利用导数求最值解决恒成立问题，利用导数证明不等式等，常伴随对参数的讨论，这也是难点之所在。