2006年福建高考理科数学真题及答案

第Ⅰ卷（选择题　共60分）

一、 选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

(1)设 a、b、c、$d\in$R，则复数$(a+bi)(c+di)$为实数的充要条件是

A. $ad-bc=0$　　B. $ac-bd=0$　　C. $ac+bd=0$　　D. $ad+bc=0$

(2)在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1=2$, $a_2+a_3=13$，则 $a_4+a_5+a_6$ 等于

A. 40　　B. 42　　C. 43　　D. 45

(3)已知 $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，则 $\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})$ 等于

A. $\frac{1}{7}$　　B. 7　　C. $-\frac{1}{7}$　　D. -7

(4)已知全集 U=R，且 $A=\{x\,|\,|x-1|>2\}$，$B=\{x\,|\,x^2-6x+8<0\}$，则 $(\complement_U A)\cap$ 等于

A. $[-1,4]$　　B. $(2,3)$　　C. $(2,3)$　　D. $(-1,4)$

(5)已知正方体外接球的体积是 $\frac{32}{3}\pi$，那么正方体的棱长等于

A. $2\sqrt{2}$　　B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$　　D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

(6)在一个口袋中装有5个白球和3个黑球，这些球除颜色外完全相同，从中摸出3个球，至少摸到2个黑球的概率等于

A. $\frac{2}{7}$　　B. $\frac{3}{8}$　　C. $\frac{3}{7}$　　D. $\frac{9}{28}$

(7)对于平面 α 和共面的直线 m、n，下列命题中真命题是

A. 若 $m\perp\alpha$，$m\perp n$，则 $n/\!/\alpha$　　B. 若 $m/\!/\alpha$，$n/\!/\alpha$，则 $m/\!/n$

C. 若 $m\subset\alpha$，$n/\!/\alpha$，则 $m/\!/n$　　D. 若 m、n 与 α 所成的角相等，则 $n/\!/m$

(8)函数 $y=\log_2\frac{x}{x-1}\ (x>1)$ 的反函数是

A. $y=\frac{2^x}{2^x-1}$ $(x>0)$　　B. $y=\frac{2^x}{2^x-1}$ $(x<0)$

C. $y=\frac{2^x-1}{2^x}$ $(x>0)$　　D. . $y=\frac{2^x-1}{2^x}$ $(x<0)$

(9)已知函数 $f(x)=2\sin\varpi x\ (\varpi>0)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}]$ 上的最小值是-2，则 ϖ 的最小值等于

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. 2　　D. 3

(10) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (a>0, b<0) 的右焦点为 F，若过点 F 且倾斜角为 60° 的直线与双曲线的右支有且只有一个交点，则此双曲线离心率的取值范围是

A. (1, 2)　　B. (1, 2)　　C. [2, +∞]　　D. (2, +∞)

(11) 已知 $|\overrightarrow{OA}|$=1，$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{3}$，$\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}$=0，点 C 在∠AOB 内，且∠AOC=30°，设 $\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$ (m、n∈R)，则 $\frac{m}{n}$ 等于

A. $\frac{1}{3}$　　B. 3　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\sqrt{3}$

(12) 对于直角坐标平面内的任意两点 $A(x_1,\ y_1)$、$B(x_2,\ y_2)$，定义它们之间的一种"距离"：$\|AB\|=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$.

给出下列三个命题：

①若点 C 在线段 AB 上，则 $\|AC\|+\|CB\|=\|AB\|$；

②在△ABC 中，若∠C=90°，则 $\|AC\|^2+\|CB\|^2=\|AB\|^2$；

③在△ABC 中，$\|AC\|+\|CB\|>\|AB\|$.

其中真命题的个数为

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

第II卷（非选择题　共 90 分）

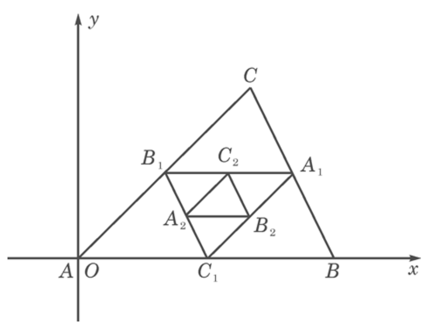
二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分，把答案填在答题卡的相应位置.

(13) $(x^2-\frac{1}{x})^2$ 展开式中 x^2 的系数是________(用数字作答)

(14) 已知直线 $x-y-1=0$ 与抛物线 $y=ax^2$ 相切，则 a=________

(15) 一个均匀小正方体的六个面中，三个面上标以数 0，两个面上标以数 1，一个面上标以数 2，将这个小正方体抛掷 2 次，则向上的数之积的数学期望是________

（16）如图，连结△ABC 的各边中点得到一个新的△$A_1B_1C_1$，又连结的△$A_1B_1C_1$ 各边中点得到，如此无限继续下去，得到一系列三角形：△ABC，△$A_1B_1C_1$，△$A_2B_2C_2$，…，这一系列三角形趋向于一个点 M，已知 $A(0,0)$，$B(3,0)$，$C(2,2)$，则点 M 的坐标是______.



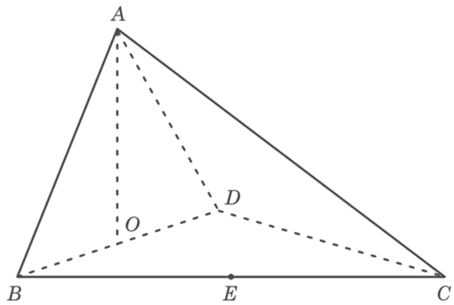
二、 解答题：本大题共 6 小题，共 74 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

(17)（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\sin^2x+\sqrt{3}\,x\cos x+2\cos^2x$, $x\in R$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的最小正周期和单调增区间；
（Ⅱ）函数 $f(x)$ 的图象可以由函数 $y=\sin2x(x\in R)$ 的图象经过怎样的变换得到？

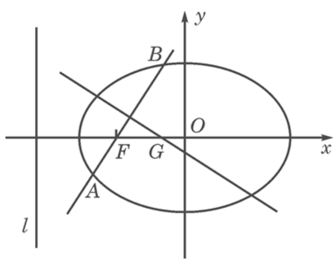
(18)（本小题满分 12 分）
如图，四面体 $ABCD$ 中，O、E 分别 BD、BC 的中点, $CA=CB=CD=BD=2$
（Ⅰ）求证：$AO\perp$ 平面 BCD;
（Ⅱ）求异面直线 AB 与 CD 所成角的大小；
（Ⅲ）求点 E 到平面的距离.



(19)（本小题满分 12 分）
统计表明，某种型号的汽车在匀速行驶中每小时耗油量 y（升）关于行驶速度 x（千米/小时）的函数解析式可以表示为：$y=\dfrac{1}{128000}x^2-\dfrac{3}{80}x+8$ $(0<x\leqslant120)$. 已知甲、乙两地相距 100 千米。
（Ⅰ）当汽车以 40 千米/小时的速度匀速行驶时，从甲地到乙地要耗油多少升？
（Ⅱ）当汽车以多大的速度匀速行驶时，从甲地到乙地耗油最少？最少为多少升？
(20)（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 的左焦点为 F, O 为坐标原点。

（Ⅰ）求过点 O、F，并且与椭圆的左准线 l 相切的圆的方程；
（Ⅱ）设过点 F 且不与坐标轴垂直交椭圆于 A、B 两点，线段 AB 的垂直平分线与 x 轴交于点 G，求点 G 横坐标的取值范围.



(21)（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=-x^2+8x$, $g(x)=6\ln x+m$

（Ⅰ）求 $f(x)$ 在区间 $[t, t+1]$ 上的最大值 $h(t)$;
（Ⅱ）是否存在实数 m, 使得 $y=f(x)$ 的图象与 $y=g(x)$ 的图象有且只有三个不同的交点？

若存在，求出 m 的取值范围;，若不存在，说明理由。

（22）（本小题满分 14 分）

已知数列｛a_n｝满足 $a_1=1, a_{n+1}=2a_n+1(n\in N^*)$

（Ⅰ）求数列｛a_n｝的通项公式;

（Ⅱ）若数列{b_n}满足 $4^{k1-1}4^{k2-1}\cdots4^{k-1}=(a_n+1)^{km}(n\in N^*)$，证明：{$b_n$}是等差数列;

（Ⅲ）证明：$\frac{n}{2}-\frac{1}{3}<\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{n}{2}$ $(n\in N^*)$.

2006年福建高考理科数学真题参考答案

一、选择题：本大题考查基本概念和基本运算，每小题 5 分，满分 60 分.

(1)D	(2)B	(3)A	(4)C	(5)D	(6)A
(7)C	(8)A	(9)B	(10)C	(11)B	(12)B

二、填空题：本大题考查基础知识和基本运算.每小题 4 分，满分 16 分.

(13)10　　(14) $\frac{1}{4}$　　(15) $\frac{4}{9}$　　(16) $(\frac{5}{3},\frac{2}{3})$

三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

(17)本小题主要考查三角函数的基本公式，三角恒等变换、三角函数的图象和性质等基本识，以及推理和运算能力，满分 12 分.

解：（1）$f(x)=\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+(1+\cos 2x)$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{2}$$

$$=\sin(2x+\frac{\pi}{6})+\frac{3}{2}.$$

∴f(x)的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

由题意得 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}, k\in Z$,

∴f(x)的单调增区间为 $[k\pi-\frac{\pi}{3}], k\in Z$.

(2)方法一：

先把 y=sin 2x 图象上所有的点向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，得到 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$ 的图象，再把所得图象上所有的点向上平移 $\frac{3}{2}$ 个单位年度，就得到 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{6})+\frac{3}{2}$ 的图象.

方法二：

把 y=sin 2x 图象上所有的点按向量 a=($-\dfrac{\pi}{12},\dfrac{2}{3}$)平移，就得到 y=sin(2x+$\dfrac{\pi}{6}$)+$\dfrac{3}{2}$ 的图象.

(18)本小题主要考查直线与平面的位置关系、异面直线所成的角以及点到平面的距离等基本知识，考查空间想象能力、逻辑思维能力和运算能力.满分 12 分.

方法一:

(1)证明：连结 OC.

∵BO=DO,AB=AD, ∴AO⊥BD.

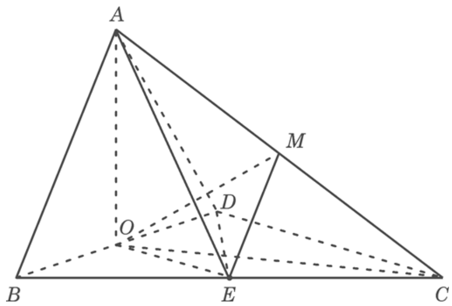
∵BO=DO,BC=CD, ∴CO⊥BD.

在△AOC 中，由已知可得 AO=1,CO=$\sqrt{3}$.

而 AC=2,

∴$AO^2+CO^2=AC^2$,

∴∠AOC=90°,即 AO⊥OC.



$\because BD\bigcap OC=0,$

∴*AB*⊥平面 *BCD*.

（Ⅱ）解：取 *AC* 的中点 *M*,连结 *OM*、*ME*、*OE*，由 *E* 为 *BC* 的中点知 *ME*// *AB*, *OE*// *DC*.

∴直线 *OE* 与 *EM* 所成的锐角就是异面直线 *AB* 与 *CD* 所成的角.

在△*OME* 中，

$$EM=\frac{1}{2}AB=\frac{\sqrt{2}}{2},OE=\frac{1}{2}DC=1,$$

$\because OM$ 是直角△*AOC* 斜边 *AC* 上的中线，$\therefore OM=\dfrac{1}{2}AC=1,$

$$\therefore \cos\angle OEA=\frac{\sqrt{2}}{4},$$

∴异面直线 *AB* 与 *CD* 所成角的大小为 $\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4}.$

（Ⅲ）解：设点 *E* 到平面 *ACD* 的距离为 *h*.

$\because V_{A-ACD}-V_{A-CDE}$,

$\therefore \dfrac{1}{3}h\cdot S_{\triangle ACD}=\dfrac{1}{3}\cdot AO\cdot S_{\triangle CDE}.$

在△ACD中，$CA=CD=2, AD=\sqrt{2}$，

$$\therefore S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3}=\frac{\sqrt{7}}{2},$$

而 $AO=1$，$S_{\triangle CDE}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\therefore h=\frac{AO\bullet S_{\Delta CDE}}{S_{\Delta ACD}}=\frac{1\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}=\frac{\sqrt{21}}{7},$$

∴点 E 到平面 ACD 的距离为$\frac{\sqrt{21}}{7}$.

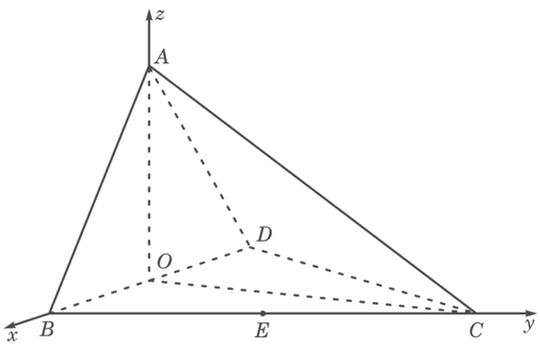
方法二：

（Ⅰ）同方法一：

（Ⅱ）解：以 O 为原点，如图建立空间直角坐标系，则 $B(1，0，0)$，$D(-1，0，0)$，

$C(0，\sqrt{3}，0)$，$A(0, 0, 1)$，$E(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$，$\overrightarrow{BA}=(-1,0,1),\overrightarrow{CD}=(-1,-\sqrt{3},0).$

$$\therefore \cos\left\langle\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CD}\right\rangle=\frac{\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{CD}}{|BA||CD|}=\frac{\sqrt{2}}{4},$$



∴异面直线 AB 与 CD 所成角的大小为$\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$.

（Ⅲ）解：设平面 ACD 的法向量为 $n=(x, y, z)$，则

$$\begin{cases} n\bullet\overrightarrow{AD}=(x,y,z)\bullet(-1,0,-1)=0, \\ n\bullet\overrightarrow{AC}=(x,y,z)\bullet(0,\sqrt{3},-1)=0, \end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases} x+z=0, \\ \sqrt{3}y-z=0. \end{cases}$$

令 y=1，得 n=($-\sqrt{3},1,\sqrt{3}$)是平面 ACD 的一个法向量.

又$\overrightarrow{EC}=(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0),$

∴点 E 到平面 ACD 的距离

$$h=\frac{|\overrightarrow{EC}\cdot n|}{|n|}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}.$$

(19)本小题主要考查函数，导数及其应用等基本知识，考查运用数学知识分析和解决实际问题的能力.满分 12 分.

解：(1)当 x=40 时，汽车从甲地到乙地行驶了 $\dfrac{100}{40}=2.5$ 小时,

要耗油 $(\dfrac{1}{128000}\times 40^3-\dfrac{3}{80}\times 40+8)\times 2.5=17.5(升)$.

答：当汽车以 40 千米/小时的速度匀速行驶时，从甲地到乙地耗油 17.5 升.

(2)当速度为 x 千米/小时，汽车从甲地到乙地行驶了 $\dfrac{100}{x}$ 小时,设耗油量为 h(x)升，衣题意得

$h(x)=(\dfrac{1}{128000}x^3-\dfrac{3}{80}x+8)\cdot\dfrac{100}{x}=\dfrac{1}{1280}x^2+\dfrac{800}{x}-\dfrac{15}{4}(0<x<120)$,

$h'(x)=\dfrac{x}{640}-\dfrac{800}{x^2}=\dfrac{x^3-80^3}{640x^2}$ (0＜x≤120＝

令 h’(x)=0，得 x=80.

当 x∈(0,80)时，h’(x)＜0,h(x)是减函数;

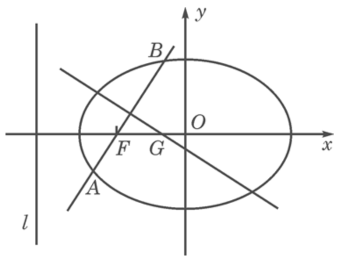
当 x∈(80,120)时，h’(x)＞0,h(x)是增函数.

∴当 x=80 时，h(x)取到极小值 h(80)=11.25.

因为 h(x)在(0,120)上只有一个极值，所以它是最小值.

答：当汽车以 80 千米/小时的速度匀速行驶时，从甲地到乙地耗油最少，最少为 11.25 升.

(20)本小题主要考查直线、圆、椭圆和不等式等基本知识，考查平面解析几何的基本方法，考查运算能力和综合能力.满分 12 分.



解(1) ∵$a^2=2,b^2=1$,∴c=1,F(-1,0),l:x=-2.

∵圆过点 O、F.

∴圆心 M 在直线 $x=-\dfrac{1}{2}$ 上.

设 $M(-\dfrac{1}{2},t)$,则圆半径

$r=|(-\dfrac{1}{2})-(-2)|=\dfrac{3}{2}$.

由|OM|=r,得 $\sqrt{(-\dfrac{1}{2})^2+t^2}=\dfrac{3}{2}$.

解得 $t=\pm\sqrt{2}$,

∴所求圆的方程为$(x+\frac{1}{2})^2+(y\pm\sqrt{2})^2=\frac{9}{4}$.

(2)设直线AB的方程为$y=k(x+1)(k\neq 0)$,

代入$\frac{x^2}{2}+y^2=1$,整理得$(1+2k^2)x^2+4k^2x+2k^2-2=0$.

∵直线AB过椭圆的左焦点F,

∴方程有两个不等实根.

记$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,AB中点$N(x_0,y_0)$,

则$x_1+x_1=-\frac{4k^2}{2k^2+1}$,

$$x_0=\frac{1}{2}(x^1+x^2)=-\frac{2k^2}{2k^2+1}\bullet y_0=k(x_0+1)=\frac{k}{2k^2+1},$$

∴ AB垂直平分线NG的方程为$y-y_0=-\frac{1}{k}(x-x_0)$.

令$y=0$，得

$$x_C=x_0+ky_0=-\frac{2k^2}{2k^2+1}+-\frac{k^2}{2k^2+1}=-\frac{k^2}{2k^2+1}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4k^2+2}.$$

$$\because k\neq 0,\therefore -\frac{1}{2}<x_0<0.$$

∴点G横坐标的取值范围为（$-\frac{1}{2},0$）。

（21）本小题主要考查函数的单调性、极值、最值等基本知识，考查运用导数研究函数性质的方法，考查运算能力，考查函数与方程、数形结合、分类与整合等数学思想方法和分析问题、解决问题的能力。满分12分。

解：（I）$f(x)=-x^2+8x=-(x-4)^2+16$,

当$t+1<4$，即$t<3$时，$f(x)$在$[t,\ t+1]$上单调递增，

$h(t)=f(t+1)=-(t+1)^2+8(t+1)=-t^2+6t+7$;

当$t\leqslant 4\leqslant t+1$时,即$3\leqslant t\leqslant 4$时，$h(t)=f(4)=16$;

当$t>4$时，$f(x)$在$[t,\ t+1]$上单调递减，

$h(t)=f(x)=-t^2+8t$.

综上，$h(t)=\begin{cases}-t^2+6t+7, & t<3,\\ 16, & 3\leqslant t\leqslant 4,\\ -t^2+8t, & t>4\end{cases}$

（II）函数$y=f(x)$的图象与$y=g(x)$的图象有且只有三个不同的交点，即函数

x　　$g(x)-f(x)$的图象与x轴的正半轴有且只有三个不同的交点。

∴　　x　　x $-8x+16\ln x+m$,

$$\because\ {}'\quad x\qquad x-8+\frac{6}{x}=\frac{2x^2-8x+6}{x}=\frac{2(x-1)(x-3)}{x}(x>0),$$

当 x∈(0,1)时， ′ x ， x 是增函数；

当 x∈(1,3)时， ′ x ， x 是减函数；

当 x∈(3,+∞)时， ′ x ， x 是增函数；

当 x=1，或 x=3 时， ′ x ；

∴ x 极大值 1 m—7， x 极小值 3 m+6ln 3－15.

∵当 x 充分接近 时， x ，当 x 充分大时， x >0.

∴要使 x 的图象与 x 轴正半轴有三个不同的交点，必须且只须

$$\begin{cases}\varphi(x)_{\text{极大值}}=m-7>0,\\ \varphi(x)_{\text{极小值}}=m+6\ln 3-15<0,\end{cases}$$ 既 7<m<－6ln 3.

所以存在实数 m，使得函数 y=f(x)与 y=g(x)的图象有且只有三个不同的交点，m 的取值范围为（7，15—6ln 3）.

（22）本小题主要考查数列、不等式等基本知识，考查化归的数学思想方法，考查综合解题能力。满分 14 分。

（I）解：∵a_{n+1}=2 a_n+1（n∈N），

∴a_{n+1}+1=2(a_n+1)，

∴| a_n+1| 是以 a_1+1=2 为首项，2 为公比的等比数列。

∴a_n+1=2^n，

既 a_n=2^n—1(n∈N)。

（II）证法一：∵$4^{b1-1}4^{b2-2}\cdots4^{bn-1}=(a+1)^{bn}$，

∵$4^{k1+k2+\cdots+kn}$ $=2^{nk}$，

∴2[($b_1+b_2+\cdots+b_n$)−n]=nb, ①

2[($b_1+b_2+\cdots+b_{n+1}$)−(n+1)]=(n+1)b_{n+1} ②

②−①，得 2(b_{n+1}−1)=(n+1)b_{n+1}−nb,

即 (n−1)b_{n+1}−nb_n+2=0. ③

nb_{n+2}=(n+1)b_{n+1}+2=0. ④

④−③，得 nb_{n+2}−2nb_{n+1}-nb_n=0,

即 b_{n+2}−2b_{n+1}+b=0,

∴b_{n-2}−b_{n+1}=b_n(n∈N*)，

∴{b_n}是等差数列.

证法二：同证法一，得

(n−1)b_{n+1}=nb_n+2=0

令 n=1，得 b_1=2.

设 b_2=2+d(d∈R)，，下面用数学归纳法证明 b_n=2+(n−1)d.

(1)当 n=1，得 b_1=2.

(2)假设当 n=k(k≥2)时，b_1=2+(k−1)d，那么

$$b_{k+1}=\frac{k}{k-1}b-\frac{2}{k-1}=\frac{k}{k-1}(2+(k-1)d)-\frac{2}{k-1}=2+((k+1)-1)d.$$

这就是说，当 n=k+1 时，等式也成立.

根据(1)和(2)，可知 b_n=2(n−1)d 对任何 n∈N*都成立.

∵b_{n+1}−b_n=d，∴{b_n}是等差数列.

(3)证明：$\because \dfrac{a_k}{a_{k+1}}=\dfrac{2^k-1}{2^{k+1}-1}=\dfrac{2^k-1}{2(2^k-\frac{1}{2})}<\dfrac{1}{2},k=1,2,\ldots,n,$

$\therefore \frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{n}{2}$.

$\because \frac{a_k}{a_{k+1}}=\frac{2^k-1}{2^{k+1}-1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2^{k+1}+1)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3\cdot 2^k+2^k-2}\geqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{3}(\frac{1}{2^k})$, k=1, 2, ⋯, n,