2005年河南高考理科数学真题及答案

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分。第Ⅰ卷1至2页。第Ⅱ卷3到10页。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第Ⅰ卷

注意事项：

1．答第Ⅰ卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目涂写在答题卡上。

2．每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。不能答在试题卷上。

3．本卷共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

参考公式：

如果事件A、B互斥，那么

$P(A+B)=P(A)+P(B)$

如果事件A、B相互独立，那么

$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$

如果事件A在一次试验中发生的概率是P，那么

n次独立重复试验中恰好发生k次的概率

$P_n(k)=C_n^kP^k(1-P)^{n-k}$

球是表面积公式

$S=4\pi R^2$

其中R表示球的半径

球的体积公式

$V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$

其中R表示球的半径

一．选择题

（1）设I为全集，S_1、S_2、S_3是I的三个非空子集，且$S_1\cup S_2\cup S_3=I$，则下面论断正确的是

（A）$C_IS_1\cap(S_2\cup S_3)=\Phi$　　（B）$S_1\subseteq(C_IS_2\cap C_IS_3)$

（C）$C_IS_1\cap C_IS_2\cap C_IS_3)=\Phi$　　（D）$S_1\subseteq(C_IS_2\cup C_IS_3)$

（2）一个与球心距离为1的平面截球所得的圆面面积为π，则球的表面积为

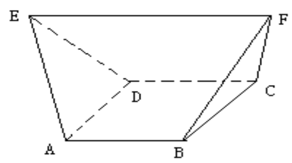
（A）$8\sqrt{2}\pi$　　（B）8π　　（C）$4\sqrt{2}\pi$　　（D）4π

（3）已知直线l过点$(-2,0)$，当直线l与圆$x^2+y^2=2x$有两个交点时，其斜率k的取值范围是

（A）$(-2\sqrt{2},2\sqrt{2})$　　（B）$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

（C）$(-\dfrac{\sqrt{2}}{4},\dfrac{\sqrt{2}}{4})$　　（D）$(-\dfrac{1}{8},\dfrac{1}{8})$

（4）如图，在多面体ABCDEF中，已知ABCD是边长为1的正方



形，且ΔADE、ΔBCF均为正三角形，EF∥AB，EF=2，则该多面体的体积为

（A）$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　（B）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

（C）$\dfrac{4}{3}$　　（D）$\dfrac{3}{2}$

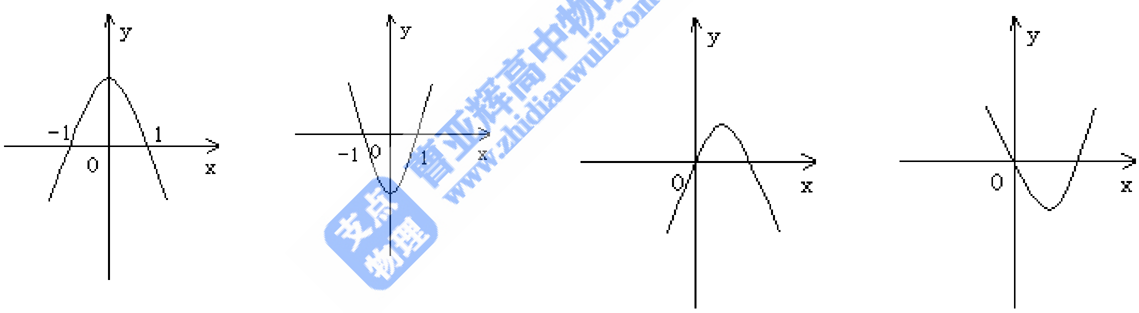
（5）已知双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1\ (a>0)$的一条准线与抛物线$y^2=-6x$的准线重合，则该双曲线的离心率为

（A）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　（B）$\dfrac{3}{2}$　　（C）$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　（D）$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

（6）当$0<x<\dfrac{\pi}{2}$时，函数$f(x)=\dfrac{1+\cos 2x+8\sin^2 x}{\sin 2x}$的最小值为

（A）2　　（B）$2\sqrt{3}$　　（C）4　　（D）$4\sqrt{3}$

（7）设$b>0$，二次函数$y=ax^2+bx+a^2-1$的图像为下列之一



则a的值为

（A）1　　（B）-1　　（C）$\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$　　（D）$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

（8）设$0<a<1$，函数$f(x)=\log_a(a^{2x}-2a^x-2)$，则使$f(x)<0$的$x$的取值范围是

（A）$(-\infty,0)$　（B）$(0,+\infty)$　　（C）$(-\infty,\log_a 3)$　　（D）$(\log_a 3,+\infty)$

（9）在坐标平面上，不等式组$\begin{cases} y\ge x-1 \\ y\le -3|x|+1 \end{cases}$所表示的平面区域的面积为

（A）$\sqrt{2}$　　（B）$\dfrac{3}{2}$　　（C）$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　　（D）2

（10）在ΔABC中，已知$\tan\dfrac{A+B}{2}=\sin C$，给出以下四个论断：

①$\tan A\cdot\cot B=1$　　②$0<\sin A+\sin B\le\sqrt{2}$

③$\sin^2 A+\cos^2 B=1$　　④$\cos^2 A+\cos^2 B=\sin^2 C$

其中正确的是

（A）①③　（B）②④　（C）①④　（D）②③

（11）过三棱柱任意两个顶点的直线共 15 条，其中异面直线有

（A）18 对　（B）24 对　（C）30 对　（D）36 对

（12）复数 $\dfrac{\sqrt{2}-i^3}{1-\sqrt{2}i}=$

（A）i　（B）$-i$　（C）$2\sqrt{2}-i$　（D）$-2\sqrt{2}+i$

第Ⅱ卷

注意事项：

1．用钢笔或圆珠笔直接答在试题卷上。

2．答卷前将密封线内的项目填写清楚。

3．本卷共 10 小题，共 90 分。

二．本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分，把答案填在题中横线上。

（13）若正整数 m 满足 $10^{m-1}<2^{512}<10^{m}$，则 m = ________。$(\lg 2\approx 0.3010)$

（14）$(2x-\dfrac{1}{\sqrt{x}})^9$ 的展开式中，常数项为__________。（用数字作答）

（15）ΔABC 的外接圆的圆心为 O，两条边上的高的交点为 H，$\overrightarrow{OH}=m(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$，

则实数 m =________

（16）在正方形 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，过对角线 BD' 的一个平面交 AA' 于 E，交 CC' 于 F，则

① 四边形 $BFD'E$ 一定是平行四边形

② 四边形 $BFD'E$ 有可能是正方形

③ 四边形 $BFD'E$ 在底面 ABCD 内的投影一定是正方形

④ 四边形 $BFD'E$ 有可能垂直于平面 $BB'D$

以上结论正确的为___________。（写出所有正确结论的编号）

三．解答题：本大题共 6 小题，共 74 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

（17）（本大题满分 12 分）

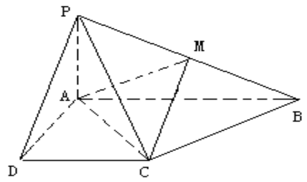
设函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)\ (-\pi<\varphi<0), y=f(x)$ 图像的一条对称轴是直线 $x=\dfrac{\pi}{8}$。

（Ⅰ）求 φ；

（Ⅱ）求函数 $y=f(x)$ 的单调增区间；

（Ⅲ）证明直线 $5x-2y+c=0$ 与函数 $y=f(x)$ 的图像不相切。

（18）（本大题满分 12 分）



已知四棱锥 P-ABCD 的底面为直角梯形，AB∥DC，$\angle DAB=90^\circ, PA\perp$ 底面 ABCD，且 PA=AD=DC=$\dfrac{1}{2}$AB=1，M 是 PB 的中点。

（Ⅰ）证明：面 PAD⊥面 PCD；

（Ⅱ）求 AC 与 PB 所成的角；

（Ⅲ）求面 AMC 与面 BMC 所成二面角的大小。

（19）（本大题满分 12 分）

设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，前 n 项和 $S_n>0\ (n=1,2,\cdots)$。

（Ⅰ）求 q 的取值范围；

（Ⅱ）设 $b_n=a_{n+2}-\dfrac{3}{2}a_{n+1}$，记 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，试比较 S_n 与 T_n 的大小。

（20）（本大题满分 12 分）

9 粒种子分种在 3 个坑内，每坑 3 粒，每粒种子发芽的概率为 0.5，若一个坑内至少有 1 粒种子发芽，则这个坑不需要补种，若一个坑内的种子都没发芽，则这个坑需要补种。假定每个坑至多补种一次，每补种 1 个坑需 10 元，用ξ表示补种费用，写出ξ的分布列并求ξ的数学期望。（精确到 0.01）

（21）（本大题满分 14 分）

已知椭圆的中心为坐标原点 O，焦点在 x 轴上，斜率为 1 且过椭圆右焦点 F 的直线交椭圆于 A、B 两点，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 与 $a=(3,-1)$ 共线。

（Ⅰ）求椭圆的离心率；

（Ⅱ）设 M 为椭圆上任意一点，且 $\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}\ (\lambda,\mu\in R)$，证明 $\lambda^2+\mu^2$ 为定值。

（22）（本大题满分 12 分）

（Ⅰ）设函数 $f(x)=x\log_2 x+(1-x)\log_2(1-x)\ (0<x<1)$，求 $f(x)$ 的最小值；

（Ⅱ）设正数 $p_1,p_2,p_3,\cdots,p_{2^n}$ 满足 $p_1+p_2+p_3+\cdots+p_{3^n}=1$，证明

$$p_1\log_2 p_1+p_2\log_2 p_2+p_3\log_2 p_3+\cdots+p_{2^n}\log_2 p_{2^n}\geq -n$$

参考答案

一、选择题（本题考查基本知识和基本运算，每小题 5 分，满分 60 分）

1. A　2. C　3. B　4. C　5. A　6. D　7. C　8. B　9. C　10. B　11. B　12. D

二、填空题：本题考查基本知识和基本运算. 每小题 4 分，满分 16 分.

13. 155　14. 672　15. 1　16. ①③④

三、解答题

17. 本小题主要考查三角函数性质及图像的基本知识，考查推理和运算能力，满分 12 分.

解：（Ⅰ）$\because x=\dfrac{\pi}{8}$ 是函数 $y=f(x)$ 的图像的对称轴，$\therefore \sin(2\times\dfrac{\pi}{8}+\varphi)=\pm1,$

$\therefore \dfrac{\pi}{4}+\pi=k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in Z.\quad \because -\pi<\varphi<0,\varphi=-\dfrac{3\pi}{4}.$

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $\varphi=-\dfrac{3\pi}{4}$，因此 $y=\sin(2x-\dfrac{3\pi}{4}).$

由题意得

$$2k\pi-\frac{\pi}{2}\leq 2x-\frac{3\pi}{4}\leq 2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z.$$

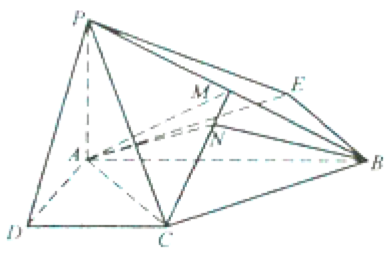
所以函数 $y=\sin(2x-\dfrac{3\pi}{4})$ 的单调增区间为 $[k\pi+\dfrac{\pi}{8},k\pi+\dfrac{5\pi}{8}],k\in Z.$

（Ⅲ）证明：$\because |y'|=|(\sin(2x-\dfrac{3\pi}{4}))'|=|2\cos(2x-\dfrac{3\pi}{4})|\leq 2,$

所以曲线 $y=f(x)$ 的切线斜率取值范围为[－2，2]，而直线 $5x-2y+c=0$ 的斜率为 $\dfrac{5}{2}>2$，

所以直线 $5x-2y+c=0$ 与函数 $y=\sin(2x-\dfrac{3\pi}{4})$ 的图像不相切.

18. 本小题主要考查直线与平面垂直、直线与平面所成角的有关知识及思维能力和空间想象能力. 考查应用向量知识解决数学问题的能力. 满分 12 分.



方案一：

（Ⅰ）证明：∵PA⊥面 ABCD，CD⊥AD，

∴由三垂线定理得：CD⊥PD.
因而，CD 与面 PAD 内两条相交直线 AD，PD 都垂直，
∴CD⊥面 PAD.
又 CD⊂面 PCD，∴面 PAD⊥面 PCD.
（Ⅱ）解：过点 B 作 BE//CA，且 BE=CA，
则∠PBE 是 AC 与 PB 所成的角.

连结 AE，可知 AC=CB=BE=AE=$\sqrt{2}$，又 AB=2，

所以四边形 ACBE 为正方形. 由 PA⊥面 ABCD 得∠PEB=90°

在 Rt△PEB 中 BE=$\sqrt{2}$，PB=$\sqrt{5}$， $\therefore \cos\angle PBE=\dfrac{BE}{PB}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}.$

$\therefore AC$与PB所成的角为$\arccos\dfrac{\sqrt{10}}{5}.$

（Ⅲ）解：作 AN⊥CM，垂足为 N，连结 BN.
在 Rt△PAB 中，AM=MB，又 AC=CB，
∴△AMC≌△BMC,
∴BN⊥CM，故∠ANB 为所求二面角的平面角.
∵CB⊥AC，由三垂线定理，得 CB⊥PC，
在 Rt△PCB 中，CM=MB，所以 CM=AM.

在等腰三角形 AMC 中，AN·MC=$\sqrt{CM^2-(\dfrac{AC}{2})^2}\cdot AC$，

$\therefore AN=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{2}}{\dfrac{\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}.$ ∴AB=2，$\therefore \cos\angle ANB=\dfrac{AN^2+BN^2-AB^2}{2\times AN\times BN}=-\dfrac{2}{3}$

故所求的二面角为$\arccos(-\dfrac{2}{3})$.

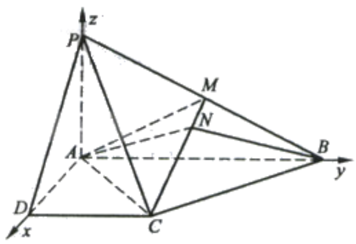
方法二：因为 PA⊥PD，PA⊥AB，AD⊥AB，以 A 为坐标原点 AD 长为单位长度，如图建立空间直角坐标系，则各点坐标为

A（0，0，0）B（0，2，0），C（1，1，0），D（1，0，0），P（0，0，1），M（0，1，$\dfrac{1}{2}$）.

（Ⅰ）证明：因$\overrightarrow{AP}=(0,0,1),\overrightarrow{DC}=(0,1,0)$,故$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DC}=0$,所以$AP\perp DC$.

由题设知 AD⊥DC，且 AP 与 AD 是平面 PAD 内的两条相交直线，由此得 DC⊥面 PAD.
又 DC 在面 PCD 上，故面 PAD⊥面 PCD.

（Ⅱ）解：因$\overrightarrow{AC}=(1,1,0),\overrightarrow{PB}=(0,2,-1)$,



故$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2},|\overrightarrow{PB}|=\sqrt{5},\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PB}=2,$所以

$$\cos<\overrightarrow{AC},\overrightarrow{PB}>=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{PB}|}=\frac{\sqrt{10}}{5}.$$

（III）解：在 MC 上取一点 N（x，y，z），则存在$\lambda\in R,$使$\overrightarrow{NC}=\lambda\overrightarrow{MC},$

$\overrightarrow{NC}=(1-x,1-y,-z),\overrightarrow{MC}=(1,0,-\frac{1}{2}),\therefore x=1-\lambda,y=1,z=\frac{1}{2}\lambda..$

要使$AN\perp MC,$只需$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{MC}=0$即$x-\frac{1}{2}z=0,$解得$\lambda=\frac{4}{5}.$

可知当$\lambda=\frac{4}{5}$时，N点坐标为$(\frac{1}{5},1,\frac{2}{5}),$能使$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{MC}=0.$

此时，$\overrightarrow{AN}=(\frac{1}{5},1,\frac{2}{5}),\overrightarrow{BN}=(\frac{1}{5},-1,\frac{2}{5}),$有$\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{MC}=0$

由$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{MC}=0,\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{MC}=0$得$AN\perp MC,BN\perp MC.$所以$\angle ANB$为所求二面角的平面角.

$\because|\overrightarrow{AN}|=\frac{\sqrt{30}}{5},|\overrightarrow{BN}|=\frac{\sqrt{30}}{5},\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BN}=-\frac{4}{5}.$

$$\therefore\cos(\overrightarrow{AN},\overrightarrow{BN})=\frac{\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BN}}{|\overrightarrow{AN}|\cdot|\overrightarrow{BN}|}=-\frac{2}{3}.$$

故所求的二面角为$\arccos(-\frac{2}{3}).$

19. 本小题主要考查等比数列的基本知识，考查分析问题能力和推理能力，满分 12 分.

解：（I）因为$\{a_n\}$是等比数列，$S_n>0,$可得$a_1=S_1>0,q\neq0.$

当$q=1$时，$S_n=na_1>0;$

当$q\neq1$时，$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}>0,$

即$\frac{1-q^n}{1-q}>0,(n=1,2,\cdots)$

上式等价于不等式组：$\begin{cases}1-q<0,\\1-q^n<0\end{cases},(n=1,2,\cdots)$ ①

或$\begin{cases}1-q>0,\\1-q^n>0\end{cases},(n=1,2,\cdots)$ ②

解①式得 $q>1$；解②，由于 n 可为奇数、可为偶数，得$-1<q<1$.

综上，q 的取值范围是$(-1,0)\cup(0,+\infty).$

（Ⅱ）由$b_n = a_{a+2} - \frac{3}{2}a_{n+1}$得

$b_n = a_n(q^2 - \frac{3}{2}q), T_n = (q^2 - \frac{3}{2}q)S_n.$

于是$T_n - S_n = S_n(q^2 - \frac{3}{2}q - 1)$

$\quad = S_n(q + \frac{1}{2})(q - 2).$

又因为$S_n > 0$,且$-1 < q < 0$或$q > 0$,所以,

当$-1 < q < -\frac{1}{2}$或$q > 2$时,$T_n - S_n > 0$,即$T_n > S_n$;

当$-\frac{1}{2} < q < 2$且$q \neq 0$时,$T_n - S_n < 0$,即$T_n < S_n$;

当$q = -\frac{1}{2}$,或$q = 2$时,$T_n - S_n = 0$,即$T_n = S_n$.

20．本小题主要考查相互独立事件和互斥事件有一个发生的概率的计算方法，考查运用概率知识解决实际问题的能力. 满分 12 分.

（Ⅰ）解：因为甲坑内的 3 粒种子都不发芽的概率为$(1-0.5)^3 = \frac{1}{8}$，所以甲坑不需要补

种的概率为 $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$

3 个坑都不需要补种的概率

$C_3^0 \times (\frac{1}{8})^{\circ} \times (\frac{7}{8})^3 = 0.670,$

恰有 1 个坑需要补种的概率为

$C_3^1 \times \frac{1}{8} \times (\frac{7}{8})^2 = 0.287,$

恰有 2 个坑需要补种的概率为

$C_3^2 \times (\frac{1}{8})^2 \times \frac{7}{8} = 0.041,$

3 个坑都需要补种的概率为

$C_3^3 \times (\frac{1}{8})^3 \times (\frac{7}{8})^0 = 0.002.$

补种费用ξ的分布为

ξ	0	10	20	30
P	0.670	0.287	0.041	0.002

ξ的数学期望为

$E\xi = 0 \times 0.670 + 10 \times 0.287 + 20 \times 0.041 + 30 \times 0.002 = 3.75$

21．本小题主要考查直线方程、平面向量及椭圆的几何性质等基本知训，考查综合运用数学知识解决问题及推理的能力，满分 14 分.

（I）解：设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0),F(c,0),$

则直线 AB 的方程为$y=x-c,$代入$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

化简得$(a^2+b^2)x^2-2a^2cx+a^2c^2-a^2b^2=0$.

令$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),$

则 $x_1+x_2=\frac{2a^2c}{a^2+b^2},x_1x_2=\frac{a^2c^2-a^2b^2}{a^2+b^2}.$

由$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(x_1+x_2,y_1+y_2),\vec{a}=(3,-1),\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$与$\vec{a}$共线，得

$$3(y_1+y_2)+(x_1+x_2)=0.$$

又 $y_1=x_1-c,y_2=x_2-c,$

∴ $3(x_1+x_2-2c)+(x_1+x_2)=0,$

∴ $x_1+x_2=\frac{3c}{2}.$

即 $\frac{2a^2c}{a^2+b^2}=\frac{3c}{2},$所以$a^2=3b^2.$

∴ $c=\sqrt{a^2-b^2}=\frac{\sqrt{6}a}{3},$

故离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$

（II）证明：由（I）知$a^2=3b^2$，所以椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$可化为$x^2+3y^2=3b^2$.

设$\overrightarrow{OM}=(x,y),$由已知得$(x,y)=\lambda(x_1,y_1)+\mu(x_2,y_2),$

∴ $\begin{cases}x=\lambda x_1+\mu x_2,\\ y=\lambda y_1+\mu y_2.\end{cases}$

∵ $M(x,y)$在椭圆上，

∴ $(\lambda x_1+\mu x_2)^2+3(\lambda y_1+\mu y_2)^2=3b^2.$

即 $\lambda^2(x_1^2+3y_1^2)+\mu^2(x_2^2+3y_2^2)+2\lambda\mu(x_1x_2+3y_1y_2)=3b^2.$ ①

由（I）知 $x_1+x_2=\frac{3}{2}c,a^2=\frac{3}{2}c^2,b^2=\frac{1}{2}c^2.$

$\therefore\qquad x_1x_2=\frac{a^2c^2-a^2b^2}{a^2+b^2}=\frac{3}{8}c^2.$

$$\begin{aligned}\therefore\qquad x_1x_2+3y_1y_2&=x_1+x_2+3(x_1-c)(x_2-c)\\&=4x_1x_2-3(x_1+x_2)c+3c^2\\&=\frac{3}{2}c^2-\frac{9}{2}c^2+3c^2\\&=0.\end{aligned}$$

又 $x_1^2+3y_1^2=3b^2,x_2^2+3y_2^2=3b^2$ 又，代入①得 $\lambda^2+\mu^2=1.$

故 $\lambda^2+\mu^2$ 为定值，定值为 1.

22．本小题主要考查数学归纳法及导数应用等知识，考查综合运用数学知识解决问题的能力．满分 12 分．

（Ⅰ）解：对函数 $f(x)$ 求导数：$f'(x)=(x\log_2 x)'+[(1-x)\log_2(1-x)]'$

$=\log_2 x-\log_2(1-x)+\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 2}.\qquad=\log_2 x-\log_2(1-x).$

于是 $f'(\frac{1}{2})=0.$

当 $x<\frac{1}{2}$时, $f'(x)=\log_2 x-\log_2(1-x)<0, f(x)$ 在区间 $(0,\frac{1}{2})$ 是减函数，

当 $x>\frac{1}{2}$时, $f'(x)=\log_2 x-\log_2(1-x)>0, f(x)$ 在区间 $(\frac{1}{2},1)$ 是增函数.

所以 $f(x)$在$x=\frac{1}{2}$ 时取得最小值，$f(\frac{1}{2})=-1$，

（Ⅱ）证法一：用数学归纳法证明.

（i）当 n=1 时，由（Ⅰ）知命题成立.

（ii）假定当 $n=k$ 时命题成立，即若正数 $p_1,p_2,\cdots,p_{2^k}$ 满足$p_1+p_2+\cdots+p_{2^k}=1$，

则 $p_1\log_2 p_1+p_2\log_2 p_2+\cdots+p_{2^k}\log_2 p_{2^k}\ge -k.$

当$n=k+1$时，若正数 $p_1,p_2,\cdots,p_{2^{k+1}}$满足$p_1+p_2+\cdots+p_{2^{k+1}}=1,$

令 $x=p_1+p_2+\cdots+p_{2^k},q_1=\frac{p_1}{x},q_2=\frac{p_2}{x},\cdots,q_{2^k}=\frac{p_{2^k}}{x}.$

则 $q_1,q_2,\cdots,q_{2^k}$ 为正数，且 $q_1+q_2+\cdots+q_{2^k}=1.$

由归纳假定知 $q_1\log_2 p_1+p_2\log_2 p_2+\cdots+q_{2^k}\log_2 q_{2^k}\ge -k.$

$$p_1\log_2 p_1+p_2\log_2 p_2+\cdots+p_{2^k}\log_2 p_{2^k}=x(q_1\log_2 q_1+q_2\log_2 q_2+\cdots+q_{2^k}\log_2 q_{2^k}$$

$$+\log_2 x)\ge x(-k)+x\log_2 x,\qquad ①$$

同理，由 $p_{2^k+1}+p_{2^k+2}+\cdots+p_{2^{k+1}}=1-x$ 可得 $p_{2^k+1}\log_2 p_{2^k+1}+\cdots+p_{2^{k+1}}\log_2 p_{2^{k+1}}$

$$\ge(1-x)(-k)+(1-x)\log_2(1-x).\qquad ②$$

综合①、②两式 $p_1\log_2 p_1+p_2\log_2 p_2+\cdots+p_{2^{k+1}}\log_2 p_{2^{k+1}}$

$$\ge[x+(1-x)](-k)+x\log_2 x+(1-x)\log_2(1-x)\ge-(k+1).$$

即当 $n=k+1$ 时命题也成立.

根据（i）、（ii）可知对一切正整数 n 命题成立.

证法二：

令函数 $g(x)=x\log_2 x+(c-x)\log_2(c-x)(常数c>0,x\in(0,c)),那么$

$$g(x)=c[\frac{x}{c}\log_2\frac{x}{c}+(1-\frac{x}{c})\log_2(1-\frac{x}{c})+\log_2 c],$$

利用（Ⅰ）知，当 $\frac{x}{c}=\frac{1}{2}(即x=\frac{c}{2})时,函数g(x)取得最小值.$

对任意 $x_1>0,x_2>0,都有$

$$x_1\log_2 x_1+x_2\log_2 x_2\ge2\cdot\frac{x_1+x_2}{2}\log_2\frac{x_1+x_2}{2}$$

$$=(x_1+x_2)[\log_2(x_1+x_2)-1].\qquad ①$$

下面用数学归纳法证明结论.

（i）当 n=1 时，由（Ⅰ）知命题成立.

（ii）设当 n=k 时命题成立，即若正数 $p_1,p_2,\cdots,p_{2^k}满足p_1+p_2+\cdots+p_{2^k}=1,有$

$$p_1\log_2 p_1+p_2\log_2 p_2+\cdots+p_{2^k}\log_2 p_{2^k}\ge-k.$$

当$n=k+1时,p_1,p_2,\cdots,p_{2^{k+1}}满足p_1+p_2+\cdots+p_{2^{k+1}}=1.$

令$H=p_1\log_2 p_1+p_2\log_2 p_2+\cdots+p_{2^{k+1}-1}\log_2 p_{2^{k+1}-1}+p_{2^{k+1}}\log_2 p_{2^{k+1}}$

由①得到

$$H\ge(p_1+p_2)[\log_2(p_1+p_2)-1]+\cdots+(p_{2^{k+1}-1}+p_{2^{k+1}})[\log_2(p_{2^{k+1}-1}+p_{2^{k+1}})-1],$$

因为$(p_1+p_2)+\cdots+(p_{2^{k+1}-1}+p_{2^{k+1}})=1,$

由归纳法假设

$(p_1+p_2)\log_2(p_1+p_2)+\cdots+(p_{2^{k+1}-1}+p_{2^{k+1}})\log_2(p_{2^{k+1}-1}+p_{2^{k+1}})\ge-k,得到$

$$H \geq -k-(p_1+p_2+\cdots+p_{2^{k+1}+1}+p_{2^{k+1}})=-(k+1).$$

即当$n=k+1$时命题也成立.

所以对一切正整数 n 命题成立.