

2009年普通高等学校招生全国统一考试（浙江卷）

数学（文科）

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设 $U = \mathbf{R}$, $A = \{x | x > 0\}$, $B = \{x | x > 1\}$, 则 $A \cap \complement_U B =$ ()
- A. $\{x | 0 < x < 1\}$ B. $\{x | 0 < x \leq 1\}$ C. $\{x | x < 0\}$ D. $\{x | x > 1\}$

【测量目标】集合的基本运算（交集与补集）。

【考查方式】集合的表示（描述法），求集合的补集与交集。

【参考答案】B

【试题解析】对于 $\complement_U B = \{x | x \leq 1\}$, 因此 $A \cap \complement_U B = \{x | 0 < x \leq 1\}$ 。

2. “ $x > 0$ ”是“ $x \neq 0$ ”的 ()
- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

【测量目标】命题的充分，必要条件。

【考查方式】主要考查命题的基本关系以及充分必要条件。

【参考答案】A

【试题解析】对于“ $x > 0$ ” \Rightarrow “ $x \neq 0$ ”；反之不一定成立，因此“ $x > 0$ ”是“ $x \neq 0$ ”的充分而不必要条件。

3. 设 $z = 1 + i$ (i 是虚数单位), 则 $\frac{2}{z} + z^2 =$ ()
- A. $1 + i$ B. $-1 + i$ C. $1 - i$ D. $-1 - i$

【测量目标】复数的代数形式的四则运算。

【考查方式】给出复数的除法乘方形式，考查复数的代数四则运算。

【参考答案】D

【试题解析】对于 $\frac{2}{z} + z^2 = \frac{2}{1+i} + (1+i)^2 = 1-i+2i = 1+i$ 。

4. 设 α, β 是两个不同的平面, l 是一条直线, 以下命题正确的是 ()
- A. 若 $l \perp \alpha, \alpha \perp \beta$, 则 $l \subset \beta$ B. 若 $l \parallel \alpha, \alpha \parallel \beta$, 则 $l \subset \beta$
C. 若 $l \perp \alpha, \alpha \parallel \beta$, 则 $l \perp \beta$ D. 若 $l \parallel \alpha, \alpha \perp \beta$, 则 $l \perp \beta$

【测量目标】直线与平面位置关系，平面与平面的位置关系.

【考查方式】给出线面，面面的部分关系，推导直线与平面的关系.

【参考答案】C

【试题解析】对于 A, B, D 均可能出现 $l \parallel \beta$ ，而对于 C 是正确的.

5. 已知向量 $\mathbf{a} = (1, 2), \mathbf{b} = (2, -3)$. 若向量 \mathbf{c} 满足 $(\mathbf{c} + \mathbf{a}) \parallel \mathbf{b}, \mathbf{c} \perp (\mathbf{a} + \mathbf{b})$, 则 $\mathbf{c} = ()$

- A. $(\frac{7}{9}, \frac{7}{3})$ B. $(-\frac{7}{3}, -\frac{7}{9})$ C. $(\frac{7}{3}, \frac{7}{9})$ D. $(-\frac{7}{9}, -\frac{7}{3})$

【测量目标】平面向量的坐标运算.

【考查方式】给出平面向量满足的关系式，通过平面向量的平行和垂直关系运算求解.

【参考答案】D

【试题解析】不妨设 $\mathbf{c} = (m, n)$, 则 $\mathbf{a} + \mathbf{c} = (1+m, 2+n), \mathbf{a} + \mathbf{b} = (3, -1)$, 对于 $(\mathbf{c} + \mathbf{a}) \parallel \mathbf{b}$, 则有 $-3(1+m) = (2+n)$; (步骤 1)

又 $\mathbf{c} \perp (\mathbf{a} + \mathbf{b})$, 则有 $3m - n = 0$, 则有 $m = -\frac{7}{9}, n = -\frac{7}{3}$ (步骤 2)

6. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F , 右顶点为 A , 点 B 在椭圆上, 且 $BF \perp x$

轴, 直线 AB 交 y 轴于点 P . 若 $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PB}$, 则椭圆的离心率是 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

【测量目标】椭圆的简单几何性质，解析几何与平面向量结合.

【考查方式】考查解析几何与平面向量结合，数形结合求解离心率.

【参考答案】D

【试题解析】对于椭圆，因为 $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PB}$, 则 $OA = 2OF, \therefore a = 2c, \therefore e = \frac{1}{2}$

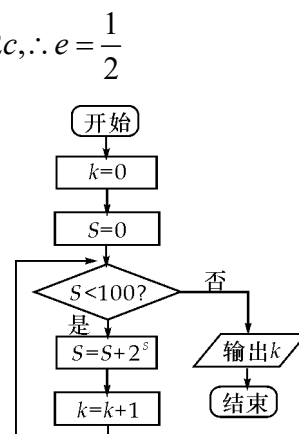
7. 某程序框图如图所示，该程序运行后输出的 k 的值是 ()

- A. 4 B. 5
C. 6 D. 7

【测量目标】循环结构的程序框图.

【考查方式】考查循环结构的流程图，注意循环条件的设置，以及循环体的构成，特别是注意最后一次循环 k 的值.

【参考答案】A



【试题解析】对于 $k=0, s=1, \therefore k=1$ ，而对于 $k=1, s=3, \therefore k=2$ ，则 $k=2, s=3+8, \therefore k=3$ ，后面是 $k=3, s=3+8+2^{11}, \therefore k=4$ ，不符合条件时输出的 $k=4$ 。

8. 若函数 $f(x) = x^2 + \frac{a}{x} (a \in \mathbf{R})$ ，则下列结论正确的是 ()

- A. $\forall a \in \mathbf{R}$ ， $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数
- B. $\forall a \in \mathbf{R}$ ， $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数
- C. $\exists a \in \mathbf{R}$ ， $f(x)$ 是偶函数
- D. $\exists a \in \mathbf{R}$ ， $f(x)$ 是奇函数

【测量目标】全称量词、存在量词、函数奇偶性与单调性的判断。

【考查方式】给出函数式，通过对量词的考查结合函数的性质进行考查。

【参考答案】C

【试题解析】对于 $a=0$ 时有 $f(x) = x^2$ 是一个偶函数

9. 已知三角形的三边长分别为 3, 4, 5，则它的边与半径为 1 的圆的公共点个数最多为 ()

- A. 3
- B. 4
- C. 5
- D. 6

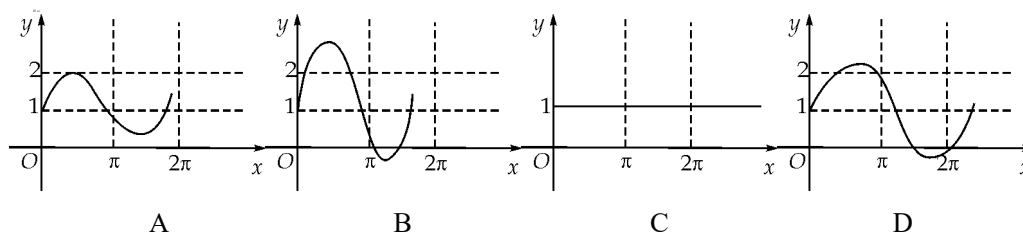
【测量目标】直线与圆的位置关系。

【考查方式】通过三角形边与圆相切来考虑公共点。

【参考答案】B

【试题解析】对于半径为 1 的圆有一个位置是正好是三角形的内切圆，此时只有三个交点，对于圆的位置稍一右移或其他的变化，能实现 4 个交点的情况，但 4 以上的交点不能实现。

10. 已知 a 是实数，则函数 $f(x) = 1 + a \sin ax$ 的图象不可能是 ()



【测量目标】三角函数的图象。

【考查方式】函数式中设定函数，考查三角函数的图象。

【参考答案】D

【试题解析】对于振幅大于 1 时，三角函数的周期为 $T = \frac{2\pi}{|a|}$ ， $\therefore |a| > 1, \therefore T < 2\pi$ (步骤 1)

而 D 不符合要求，它的振幅大于 1，但周期反而大于了 2π 。(步骤 2)

非选择题部分（共 100 分）

二、填空题：本大题共 7 小题，每小题 4 分，共 28 分.

11. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q = \frac{1}{2}$ ，前 n 项和为 S_n ，则 $\frac{S_4}{a_4} = \underline{\hspace{2cm}}$.

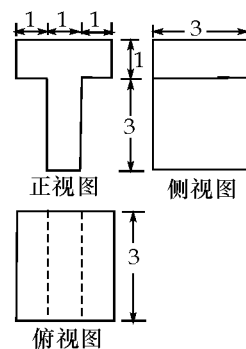
【测量目标】等比数列的通项，等比数列的前 n 和.

【考查方式】给出等比数列的公比，考查等比数列前 n 和每项的关系.

【参考答案】15

【试题解析】对于 $S_4 = \frac{a_1(1-q^4)}{1-q}$, $a_4 = a_1q^3$, $\therefore \frac{S_4}{a_4} = \frac{1-q^4}{q^3(1-q)} = 15$.

12. 若某几何体的三视图（单位：cm）如图所示，则此几何体的体积是 $\underline{\hspace{2cm}}$ cm^3 .



【测量目标】三视图求几何体的体积.

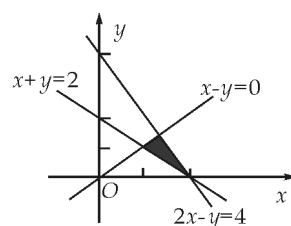
【考查方式】给出三视图，求几何体的体积.

【参考答案】18

【试题解析】该几何体是由二个长方体组成，下面体积为 $1 \times 3 \times 3 = 9$ ，上面的长方体体积为 $3 \times 3 \times 1 = 9$ ，因此其几何体的体积为 18

13. 若实数 x, y 满足不等式组 $\begin{cases} x+y \leq 2, \\ 2x-y \geq 4, \\ x-y \leq 0, \end{cases}$ 则 $2x+3y$ 的最小值

是 $\underline{\hspace{2cm}}$.



【测量目标】二元线性规划求目标函数的最值.

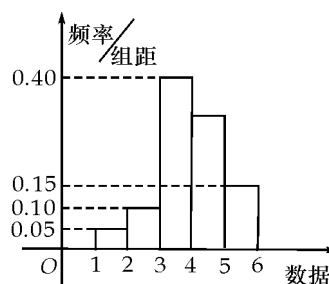
【考查方式】给出约束条件，应用数形结合思想画出不等式组所表示的平面区域，求出线性目标函数的最小值.

【参考答案】4

【试题解析】通过画出其线性规划，可知直线 $y = -\frac{2}{3}x + z$ 过点 $(2, 0)$ 时，

$(2x+3y)_{\min} = 4$

14. 某个容量为 100 的样本的频率分布直方图如下，则在区间 $[4, 5)$ 上的数据的频数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



【测量目标】频率分布直方图.

【考查方式】给出频率分布直方图, 通过图表解决问题.

【参考答案】30

【试题解析】对于在区间 $[4,5]$ 的频率/组距的数值为0.3, 而总数为100, 因此频数为30.

15. 某地区居民生活用电分为高峰和低谷两个时间段进行分时计价. 该地区的电网销售电价表如下:

高峰时间段用电价格表		低谷时间段用电价格表	
高峰月用电量 (单位: 千瓦时)	高峰电价 (单位: 元/千瓦 时)	低谷月用电量 (单位: 千瓦时)	低谷电价 (单位: 元/千瓦 时)
50 及以下的部分	0.568	50 及以下的部分	0.288
超过 50 至 200 的部分	0.598	超过 50 至 200 的部分	0.318
超过 200 的部分	0.668	超过 200 的部分	0.388

若某家庭 5 月份的高峰时间段用电量为 200 千瓦时, 低谷时间段用电量为 100 千瓦时,

则按这种计费方式该家庭本月应付的电费为_____元 (用数字作答).

【测量目标】分段函数模型.

【考查方式】考查识图能力及数据处理能力, 求解.

【参考答案】148.4

【试题解析】对于应付的电费应分二部分构成, 高峰部分为 $50 \times 0.568 + 150 \times 0.598$; 对于低谷部分为 $50 \times 0.288 + 50 \times 0.318$, 二部分之和为148.4.

16. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则 S_4 , $S_8 - S_4$, $S_{12} - S_8$, $S_{16} - S_{12}$ 成等差数

列. 类比以上结论有: 设等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项积为 T_n , 则 T_4 , _____, _____, $\frac{T_{16}}{T_{12}}$ 成等比数列.

【测量目标】等比数列的性质, 等差数列的性质.

【考查方式】通过已知条件进行类比推理求解.

【参考答案】 $\frac{T_8}{T_4}, \frac{T_{12}}{T_8}$

【试题解析】对于等比数列, 通过类比, 有等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项积为 T_n , 则 T_4 ,

$\frac{T_8}{T_4}, \frac{T_{12}}{T_8}, \frac{T_{16}}{T_{12}}$ 成等比数列.

17. 有 20 张卡片, 每张卡片上分别标有两个连续的自然数 $k, k+1$, 其中 $k=0, 1, 2, \dots, 19$.

从这 20 张卡片中任取一张, 记事件“该卡片上两个数的各位数字之和 (例如: 若取到标有 9, 10 的卡片, 则卡片上两个数的各位数字之和为 $9+1+0=10$) 不小于 14, A , 则 $P(A) =$ _____.

【测量目标】排列组合及其应用.

【考查方式】给出排列组合的方式, 求在一定条件下出现 A 事件概率.

【参考答案】 $\frac{1}{4}$

【试题解析】对于大于 14 的点数的情况通过列举可得有 5 种情况, 即

7, 8; 8, 9; 16, 17; 17, 18; 18, 19, 而基本事件有 20 种, 因此 $P(A) = \frac{1}{4}$.

三、解答题: 本大题共 5 小题, 共 72 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

18. (本题满分 14 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且满足

$$\cos \frac{A}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3$. (I) 求 $\triangle ABC$ 的面积; (II) 若 $c=1$, 求 a 的值.

【测量目标】平面向量的线性运算, 正弦定理余弦定理, 二倍角, 同角三角函数的基本关系.

【考查方式】给出关于向量的等式, 根据数量积的公式将其转化为边与角的关系式, 进而求 $\triangle ABC$ 的面积; 给出边 c , 根据余弦定理求 a 值.

【试题解析】(I) $\cos A = 2 \cos^2 \frac{A}{2} - 1 = 2 \times \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 - 1 = \frac{3}{5}$ (步骤 1)

又 $A \in (0, \pi)$, $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{4}{5}$, (步骤 2)

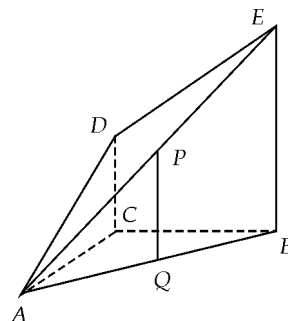
而 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos A = \frac{3}{5} bc = 3$, 所以 $bc = 5$,

所以 $\triangle ABC$ 的面积为: $\frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{4}{5} = 2$ (步骤 3)

(II) 由 (I) 知 $bc = 5$, 而 $c=1$, 所以 $b=5$

所以 $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A} = \sqrt{25 + 1 - 2 \times 3} = 2\sqrt{5}$ (步骤 4)

19. (本题满分 14 分) 如图, $DC \perp$ 平面 ABC , $EB \parallel DC$,



$AC = BC = EB = 2DC = 2$, $\angle ACB = 120^\circ$, P, Q 分别为 AE, AB 的中点. (I) 证明: $PQ \parallel$ 平面 ACD ; (II) 求 AD 与平面 ABE 所成角的正弦值.

【测量目标】线面平行的判定, 线面角的求法.

【考查方式】线线平行推出线面平行; 由几何体中的位置关系, 进行求解.

【试题解析】(I) 证明: 连接 DP, CQ , 在 $\triangle ABE$ 中, P, Q 分别是 AE, AB 的中点, 所以

$$PQ \parallel \frac{1}{2}BE, \quad (\text{步骤 1})$$

又 $DC \parallel \frac{1}{2}BE$, 所以 $PQ \parallel DC$, 又 $PQ \not\subset$ 平面 ACD , $DC \subset$ 平面 ACD , 所以 $PQ \parallel$

平面 ACD (步骤 2)

(II) 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = BC = 2, AQ = BQ$, 所以 $CQ \perp AB$ (步骤 3)

而 $DC \perp$ 平面 ABC , $EB \parallel DC$, 所以 $EB \perp$ 平面 ABC

而 $EB \subset$ 平面 ABE , 所以平面 $ABE \perp$ 平面 ABC , 所以 $CQ \perp$ 平面 ABE (步骤 4)

由 (I) 知四边形 $DCQP$ 是平行四边形, 所以 $DP \parallel CQ$

所以 $DP \perp$ 平面 ABE , 所以直线 AD 在平面 ABE 内的射影是 AP , (步骤 5)

所以直线 AD 与平面 ABE 所成角是 $\angle DAP$ (步骤 6)

在 $\text{Rt}\triangle APD$ 中, $AD = \sqrt{AC^2 + DC^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$,

$$DP = CQ = 2 \sin \angle CAQ = 1$$

$$\text{所以 } \sin \angle DAP = \frac{DP}{AD} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad (\text{步骤 7})$$

20. (本题满分 14 分) 设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $S_n = kn^2 + n$, $n \in \mathbf{N}^*$, 其中 k 是常数.

(I) 求 a_1 及 a_n ;

(II) 若对于任意的 $m \in \mathbf{N}^*$, a_m, a_{2m}, a_{4m} 成等比数列, 求 k 的值.

【测量目标】等差数列的通项和等比数列的性质, 等差数列前 n 项和.

【考查方式】给出 S_n 的表达式, 求 $\{a_n\}$; $\{a_n\}$ 中部分项呈等比, 求解未知数 k .

【试题解析】(I) 当 $n = 1, a_1 = S_1 = k + 1$,

$$n \dots 2, a_n = S_n - S_{n-1} = kn^2 + n - [k(n-1)^2 + (n-1)] = 2kn - k + 1 \quad (\text{①}) \quad (\text{步骤 1})$$

检验, $n = 1$, (①) 式成立, $\therefore a_n = 2kn - k + 1$ (步骤 2)

(II) $\because a_m, a_{2m}, a_{4m}$ 成等比数列, $\therefore a_{2m}^2 = a_m \cdot a_{4m}$,

$$\text{即 } (4km - k + 1)^2 = (2km - k + 1)(8km - k + 1), \quad (\text{步骤 3})$$

整理得： $mk(k-1) = 0$ ，对任意的 $m \in \mathbf{N}^*$ 成立，

$\therefore k = 0$ 或 $k = 1$ （步骤4）

21.（本题满分15分）已知函数 $f(x) = x^3 + (1-a)x^2 - a(a+2)x + b$ ($a, b \in \mathbf{R}$) .

(I) 若函数 $f(x)$ 的图象过原点，且在原点处的切线斜率是 -3 ，求 a, b 的值；

(II) 若函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 上不单调，求 a 的取值范围.

【测量目标】利用导数判断或求函数的单调区间，函数零点的应用.

【考查方式】限定函数的图象过定点处的斜率，解出方程中的未知数；给出函数在区间上的单调性，求未知数的取值范围.

【试题解析】

(I) 由题意得 $f'(x) = 3x^2 + 2(1-a)x - a(a+2)$ （步骤1）

$$\text{又} \begin{cases} f(0) = b = 0 \\ f'(0) = -a(a+2) = -3 \end{cases}, \text{（步骤2）}$$

解得 $b = 0$ ， $a = -3$ 或 $a = 1$ （步骤3）

(II) 由 $f'(x) = 0$ ，得 $x_1 = a, x_2 = -\frac{a+2}{3}$ （步骤4）

$$\text{又 } f(x) \text{ 在 } (-1, 1) \text{ 上不单调, 即 } \begin{cases} a \neq -\frac{a+2}{3} \\ -1 < a < 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} -1 < -\frac{a+2}{3} < 1 \\ a \neq -\frac{a+2}{3} \end{cases} \text{（步骤5）}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} -1 < a < 1 \\ a \neq -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} -5 < a < 1 \\ a \neq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

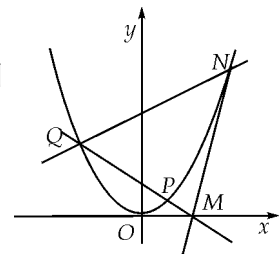
所以 a 的取值范围是 $(-5, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, 1)$.（步骤6）

22.（本题满分15分）已知抛物线 $C: x^2 = 2py$ ($p > 0$) 上一点 $A(m, 4)$ 到其焦点的距离为 $\frac{17}{4}$.

(I) 求 p 与 m 的值；

(II) 设抛物线 C 上一点 P 的横坐标为 t ($t > 0$)，过 P 的直线交 C 于另一点 Q ，交 x 轴于点 M ，过点 Q 作 PQ 的垂线交 C 于另一点 N . 若 MN 是 C 的切线，求 t 的最小值.

【测量目标】抛物线的简单几何性质，直线与抛物线的位置关系，圆



锥曲线中的定点定值问题.

【考查方式】给出抛物线上一点到焦点的距离, 根据准线方程求方程中未知数; 根据直线与抛物线直线与直线的关系, 求 t 的最小值

【试题解析】(I) 由抛物线方程得其准线方程: $y = -\frac{p}{2}$, (步骤 1)

根据抛物线定义点 $A(m, 4)$ 到焦点的距离等于它到准线的距离, 即 $4 + \frac{p}{2} = \frac{17}{4}$, 解得

$$p = \frac{1}{2} \quad (\text{步骤 2})$$

\therefore 抛物线方程为: $x^2 = y$, (步骤 3)

将 $A(m, 4)$ 代入抛物线方程, 解得 $m = \pm 2$ (步骤 4)

(II) 由题意知, 过点 $P(t, t^2)$ 的直线 PQ 斜率存在且不为 0, 设其为 k . (步骤 5)

则 $l_{PQ}: y - t^2 = k(x - t)$, 当 $y = 0, x = \frac{-t^2 + kt}{k}$, 则 $M(\frac{-t^2 + kt}{k}, 0)$. (步骤 6)

$$\text{联立方程} \begin{cases} y - t^2 = k(x - t) \\ x^2 = y \end{cases}, \text{整理得: } x^2 - kx + t(k - t) = 0$$

即: $(x - t)[x - (k - t)] = 0$, 解得 $x = t$, 或 $x = k - t$ (步骤 7)

$\therefore Q(k - t, (k - t)^2)$, 而 $QN \perp QP$, \therefore 直线 NQ 斜率为 $-\frac{1}{k}$ (步骤 8)

$$\therefore l_{NQ}: y - (k - t)^2 = -\frac{1}{k}[x - (k - t)], \text{联立方程} \begin{cases} y - (k - t)^2 = -\frac{1}{k}[x - (k - t)] \\ x^2 = y \end{cases}$$

整 理 得 : $x^2 + \frac{1}{k}x - \frac{1}{k}(k - t) - (k - t)^2 = 0$, 即 :

$$kx^2 + x - (k - t)[k(k - t) + 1] = 0$$

$[kx + k(k - t) + 1][x - (k - t)] = 0$, 解得: $x = -\frac{k(k - t) + 1}{k}$ 或 $x = k - t$ (步骤 9)

$$\therefore N(-\frac{k(k - t) + 1}{k}, \frac{[k(k - t) + 1]^2}{k^2}),$$

$$\therefore K_{NM} = \frac{\frac{[k(k - t) + 1]^2}{k^2}}{\frac{k(k - t) + 1}{k} - \frac{-t^2 + kt}{k}} = \frac{(k^2 - kt + 1)^2}{k(t^2 - k^2 - 1)} \quad (\text{步骤 10})$$

而抛物线在点 N 处切线斜率: $k_{\text{切}} = y' \Big|_{x = -\frac{k(k - t) + 1}{k}} = \frac{-2k(k - t) - 2}{k}$ (步骤 11)

$\because MN$ 是抛物线的切线, $\therefore \frac{(k^2 - kt + 1)^2}{k(t^2 - k^2 - 1)} = \frac{-2k(k-t) - 2}{k}$, 整理得

$$k^2 + tk + 1 - 2t^2 = 0$$

$\because \Delta = t^2 - 4(1 - 2t^2) \geq 0$, 解得 $t \geq -\frac{2}{3}$ (舍去), 或 $t \leq \frac{2}{3}$, $\therefore t_{\min} = \frac{2}{3}$ (步骤 12)