

绝密★启用前

2018年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）

数学试卷

（满分150分，考试时间120分钟）

考生注意

1. 本场考试时间120分钟，试卷共4页，满分150分，答题纸共2页。
2. 作答前，在答题纸正面填写姓名、准考证号，反面填写姓名，将核对后的条形码贴在答题纸指定位置。
3. 所有作答务必填涂或书写在答题纸上与试卷题号对应的区域，不得错位。在试卷上作答一律不得分。
4. 用2B铅笔作答选择题，用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答非选择题。

一、填空题（本大题共有12题，满分54分，第1~6题每题4分，第7~12题每题5分）

1. 行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ 的值为_____.

2. 双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的渐近线方程为_____.

3. 在 $(1+x)^7$ 的二项展开式中， x^2 项的系数为_____。（结果用数值表示）

4. 设常数 $a \in \mathbb{R}$ ，函数 $f(x) = \log_2(x+a)$ 。若 $f(x)$ 的反函数的图像经过点 $(3,1)$ ，则

$a =$ _____.

5. 已知复数 z 满足 $(1+i)z = 1-7i$ （ i 是虚数单位），则 $|z| =$ _____.

6. 记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $a_3 = 0$ ， $a_6 + a_7 = 14$ ，则 $S_7 =$ _____.

7. 已知 $\alpha \in \left\{-2, -1, -\frac{1}{2}, 1, 2, 3\right\}$ 。若幂函数 $f(x) = x^\alpha$ 为奇函数，且在 $(0, +\infty)$ 上递减，则

$\alpha =$ _____.

8. 在平面直角坐标系中，已知点 $A(-1,0)$ ， $B(2,0)$ ， E 、 F 是 y 轴上的两个动点，且

$|\overline{EF}| = 2$ ，则 $\overline{AE} \cdot \overline{BF}$ 的最小值为_____.

9. 有编号互不相同的五个砝码，其中5克、3克、1克砝码各一个，2克砝码两个。从中随机

选取三个，则这三个砝码的总质量为9克的概率是_____。（结果用最简分数表示）

10. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = q^{n-1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$)，前 n 项和为 S_n 。若 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{2}$

，则 $q =$ _____。

11. 已知常数 $a > 0$ ，函数 $f(x) = \frac{2^x}{2^x + ax}$ 的图像经过点 $P\left(p, \frac{6}{5}\right)$ 、 $Q\left(q, -\frac{1}{5}\right)$ 。若

$2^{p+q} = 36pq$ ，则 $a =$ _____。

12. 已知实数 x_1, x_2, y_1, y_2 满足： $x_1^2 + y_1^2 = 1, x_2^2 + y_2^2 = 1, x_1x_2 + y_1y_2 = \frac{1}{2}$ ，则

$\frac{|x_1 + y_1 - 1|}{\sqrt{2}} + \frac{|x_2 + y_2 - 1|}{\sqrt{2}}$ 的最大值为_____。

二、选择题（本大题共有4题，满分20分，每题5分）

13. 设 P 是椭圆 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$ 上的动点，则 P 到该椭圆的两个焦点的距离之和为（ ）

(A) $2\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{3}$ (C) $2\sqrt{5}$ (D) $4\sqrt{2}$

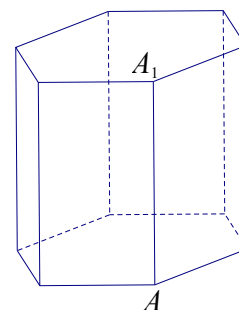
14. 已知 $a \in \mathbf{R}$ ，则“ $a > 1$ ”是“ $\frac{1}{a} < 1$ ”的（ ）

(A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件
(C) 充要条件 (D) 既非充分又非必要条件

15. 《九章算术》中，称底面为矩形而有一侧棱垂直于底面的四棱锥

为阳马。设 AA_1 是正六棱柱的一条侧棱，如图。若阳马以该正六

棱柱的顶点为顶点、以 AA_1 为底面矩形的一边，则这样的阳马的个数是（ ）



- (A) 4 (B) 8 (C) 12 (D) 16

16. 设 D 是含数 1 的有限实数集, $f(x)$ 是定义在 D 上的函数. 若 $f(x)$ 的图像绕原点逆时针

旋转 $\frac{\pi}{6}$ 后与原图像重合, 则在以下各项中, $f(1)$ 的可能取值只能是 ()

- (A) $\sqrt{3}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) 0

三、解答题 (本大题共有 5 题, 满分 76 分)

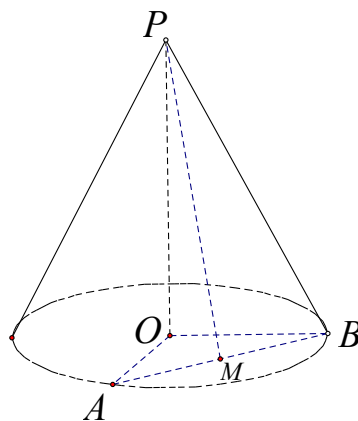
17. (本题满分 14 分, 第 1 小题满分 6 分, 第 2 小题满分 8 分)

已知圆锥的顶点为 P , 底面圆心为 O , 半径为 2.

(1) 设圆锥的母线长为 4, 求圆锥的体积;

(2) 设 $PO = 4$, OA 、 OB 是底面半径, 且 $\angle AOB = 90^\circ$, M 为线段 AB 的中点, 如图

, 求异面直线 PM 与 OB 所成的角的大小。



18. (本题满分 14 分, 第 1 小题满分 6 分, 第 2 小题满分 8 分)

设常数 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = a \sin 2x + 2 \cos^2 x$ 。

(1) 若 $f(x)$ 为偶函数, 求 a 的值;

(2) 若 $f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{3} + 1$, 求方程 $f(x) = 1 - \sqrt{2}$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的解。

19. (本题满分14分, 第1小题满分6分, 第2小题满分8分)

某群体的人均通勤时间, 是指单日内该群体中成员从居住地到工作地的平均用时。某地上班族 S 中的成员仅以自驾或公交方式通勤。分析显示: 当 S 中 $x\%$ ($0 < x < 100$) 的成员自驾时, 自驾群体的人均通勤时间为

$$f(x) = \begin{cases} 30, & 0 < x \leq 30, \\ 2x + \frac{1800}{x} - 90, & 30 < x < 100 \end{cases} \quad (\text{单位: 分钟})$$

而公交群体的人均通勤时间不受 x 影响, 恒为40分钟。试根据上述分析结果回答下列问题

:

(1) 当 x 在什么范围内时, 公交群体的人均通勤时间少于自驾群体的人均通勤时间?

(2) 求该地上班族 S 的人均通勤时间 $g(x)$ 的表达式; 讨论 $g(x)$ 的单调性, 并说明其实际意义。

20. (本题满分16分, 第1小题满分4分, 第2小题满分6分, 第3小题满分6分)

设常数 $t > 2$, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $F(2,0)$, 直线 $l: x=t$, 曲线

$\Gamma: y^2 = 8x$ ($0 \leq x \leq t, y \geq 0$), l 与 x 轴交于点 A , 与 Γ 交于点 B . P 、 Q 分别是曲线 Γ 与线段 AB 上的动点。

(1) 用 t 表示点 B 到点 F 的距离;

(2) 设 $t = 3$, $|FQ| = 2$, 线段 OQ 的中点在直线 FP 上, 求 $\triangle AQP$ 的面积;

(3) 设 $t = 8$, 是否存在以 FP 、 FQ 为邻边的矩形 $FPEQ$, 使得点 E 在 Γ 上? 若存在, 求点 P 的坐标; 若不存在, 说明理由。

21. (本题满分18分, 第1小题满分4分, 第2小题满分6分, 第3小题满分8分)

给定无穷数列 $\{a_n\}$, 若无穷数列 $\{b_n\}$ 满足: 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $|b_n - a_n| \leq 1$, 则称 $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ “接近”。

(1) 设 $\{a_n\}$ 是首项为1, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列, $b_n = a_{n+1} + 1$, $n \in \mathbf{N}^*$ 。判断数列 $\{b_n\}$ 是否与 $\{a_n\}$ 接近, 并说明理由;

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 的前四项为: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $a_4 = 8$, $\{b_n\}$ 是一个与 $\{a_n\}$ 接近的数列, 记集合 $M = \{x \mid x = b_i, i = 1, 2, 3, 4\}$, 求 M 中元素的个数 m ;

(3) 已知 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列。若存在数列 $\{b_n\}$ 满足: $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ 接近, 且在 $b_2 - b_1$, $b_3 - b_2$, \dots , $b_{201} - b_{200}$ 中至少有100个为正数, 求 d 的取值范围。