

2007 年内蒙古高考理科数学真题及答案

注意事项:

1. 本试题卷分第 I 卷 (选择题) 和第 II 卷 (非选择题) 两部分, 共 4 页, 总分 150 分, 考试时间 120 分钟.
2. 答题前, 考生须将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在本试题卷指定的位置上.
3. 选择题的每小题选出答案后, 用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案, 不能答在试题卷上.
4. 非选择题必须使用 0.5 毫米的黑色字迹的签字笔在答题卡上书写, 字体工整, 笔迹清楚.
5. 非选择题必须按照题号顺序在答题卡上各题目的答题区域内作答. 超出答题区域或在其它题的答题区域内书写的答案无效; 在草稿纸、本试题卷上答题无效.
6. 考试结束, 将本试题卷和答题卡一并交回.

第 I 卷 (选择题)

本卷共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

参考公式:

如果事件 A, B 互斥, 那么

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

如果事件 A, B 相互独立, 那么

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 p , 那么

n 次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

球的表面积公式

$$S = 4\pi R^2$$

其中 R 表示球的半径

球的体积公式

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

其中 R 表示球的半径

一、选择题

1. $\sin 210^\circ = (\quad)$

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

2. 函数 $y = |\sin x|$ 的一个单调增区间是 ()

- A. $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ B. $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ C. $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ D. $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$

3. 设复数 z 满足 $\frac{1+2i}{z} = i$, 则 $z = (\quad)$

- A. $-2+i$ B. $-2-i$ C. $2-i$ D. $2+i$

4. 下列四个数中最大的是 ()
- A. $(\ln 2)^2$ B. $\ln(\ln 2)$ C. $\ln \sqrt{2}$ D. $\ln 2$
5. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 D 是 AB 边上一点, 若 $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \lambda\overrightarrow{CB}$, 则 $\lambda =$ ()
- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $-\frac{1}{3}$ D. $-\frac{2}{3}$
6. 不等式 $\frac{x-1}{x^2-4} > 0$ 的解集是 ()
- A. $(-2, 1)$ B. $(2, +\infty)$ C. $(-2, 1) \cup (2, +\infty)$ D. $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$
7. 已知正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的侧棱长与底面边长相等, 则 AB_1 与侧面 ACC_1A_1 所成角的正弦值等于 ()
- A. $\frac{\sqrt{6}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
8. 已知曲线 $y = \frac{x^2}{4} - 3\ln x$ 的一条切线的斜率为 $\frac{1}{2}$, 则切点的横坐标为 ()
- A. 3 B. 2 C. 1 D. $\frac{1}{2}$
9. 把函数 $y = e^x$ 的图像按向量 $\mathbf{a} = (2, 3)$ 平移, 得到 $y = f(x)$ 的图像, 则 $f(x) =$ ()
- A. $e^{x-3} + 2$ B. $e^{x+3} - 2$ C. $e^{x-2} + 3$ D. $e^{x+2} - 3$
10. 从 5 位同学中选派 4 位同学在星期五、星期六、星期日参加公益活动, 每人一天, 要求星期五有 2 人参加, 星期六、星期日各有 1 人参加, 则不同的选派方法共有 ()
- A. 40 种 B. 60 种 C. 100 种 D. 120 种
11. 设 F_1, F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ 的左、右焦点, 若双曲线上存在点 A , 使 $\angle F_1AF_2 = 90^\circ$ 且 $|AF_1| = 3|AF_2|$, 则双曲线的离心率为 ()
- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{15}}{2}$ D. $\sqrt{5}$
12. 设 F 为抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点, A, B, C 为该抛物线上三点, 若 $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC} = \mathbf{0}$, 则 $|\overrightarrow{FA}| + |\overrightarrow{FB}| + |\overrightarrow{FC}| =$ ()
- A. 9 B. 6 C. 4 D. 3

第 II 卷 (非选择题)

本卷共 10 题, 共 90 分

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $(1+2x^2)\left(x-\frac{1}{x}\right)^8$ 的展开式中常数项为_____。(用数字作答)

14. 在某项测量中，测量结果 ξ 服从正态分布 $N(1, \sigma^2)(\sigma > 0)$. 若 ξ 在 $(0,1)$ 内取值的概率为 0.4，则 ξ 在 $(0,2)$ 内取值的概率为_____.

15. 一个正四棱柱的各个顶点在一个直径为 2cm 的球面上. 如果正四棱柱的底面边长为 1cm，那么该棱柱的表面积为_____ cm^2 .

16. 已知数列的通项 $a_n = -5n + 2$ ，其前 n 项和为 S_n ，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^2} =$ _____.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

在 $\triangle ABC$ 中，已知内角 $A = \frac{\pi}{3}$ ，边 $BC = 2\sqrt{3}$. 设内角 $B = x$ ，周长为 y .

(1) 求函数 $y = f(x)$ 的解析式和定义域；

(2) 求 y 的最大值.

18. (本小题满分 12 分)

从某批产品中，有放回地抽取产品二次，每次随机抽取 1 件，假设事件 A ：“取出的 2 件产品中至多有 1 件是二等品”的概率 $P(A) = 0.96$.

(1) 求从该批产品中任取 1 件是二等品的概率 p ；

(2) 若该批产品共 100 件，从中任意抽取 2 件， ξ 表示取出的 2 件产品中二等品的件数，

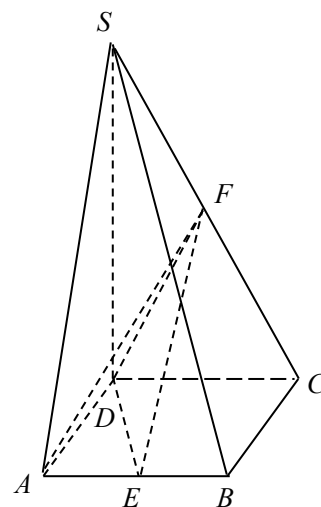
求 ξ 的分布列.

19. (本小题满分 12 分)

如图，在四棱锥 $S-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，侧棱 $SD \perp$ 底面 $ABCD$ ， E, F 分别为 AB, SC 的中点.

(1) 证明 $EF \parallel$ 平面 SAD ；

(2) 设 $SD = 2DC$ ，求二面角 $A-EF-D$ 的大小.



20. (本小题满分 12 分)

在直角坐标系 xOy 中，以 O 为圆心的圆与直线 $x - \sqrt{3}y = 4$ 相切.

- (1) 求圆 O 的方程;
- (2) 圆 O 与 x 轴相交于 A, B 两点, 圆内的动点 P 使 $|PA|, |PO|, |PB|$ 成等比数列, 求 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的取值范围.

21. (本小题满分 12 分)

设数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 \in (0, 1)$, $a_n = \frac{3 - a_{n-1}}{2}$, $n = 2, 3, 4, \dots$.

- (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 设 $b_n = a_n \sqrt{3 - 2a_n}$, 证明 $b_n < b_{n+1}$, 其中 n 为正整数.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x^3 - x$.

- (1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(t, f(t))$ 处的切线方程;
- (2) 设 $a > 0$, 如果过点 (a, b) 可作曲线 $y = f(x)$ 的三条切线, 证明: $-a < b < f(a)$.

参考答案

评分说明:

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考, 如果考生的解法与本解答不同, 可根据试题的主要考查内容比照评分参考制订相应的评分细则.
2. 对计算题, 当考生的解答在某一步出现错误时, 如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度, 可视影响的程度决定后继部分的给分, 但不得超过该部分正确解答应得分数的一半; 如果后继部分的解答有较严重的错误, 就不再给分.
3. 解答右侧所注分数, 表示考生正确做到这一步应得的累加分数.
4. 只给整数分数. 选择题和填空题不给中间分.

一、选择题

1. D 2. C 3. C 4. D 5. A 6. C
7. A 8. A 9. C 10. B 11. B 12. B

二、填空题

13. -42 14. 0.8 15. $2 + 4\sqrt{2}$ 16. $-\frac{5}{2}$

三、解答题

17. 解: (1) $\triangle ABC$ 的内角和 $A + B + C = \pi$, 由 $A = \frac{\pi}{3}$, $B > 0$, $C > 0$ 得

$$0 < B < \frac{2\pi}{3}.$$

应用正弦定理, 知

$$AC = \frac{BC}{\sin A} \sin B = \frac{2\sqrt{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} \sin x = 4 \sin x,$$

$$AB = \frac{BC}{\sin A} \sin C = 4 \sin \left(\frac{2\pi}{3} - x \right).$$

因为 $y = AB + BC + AC$,

$$\text{所以 } y = 4 \sin x + 4 \sin \left(\frac{2\pi}{3} - x \right) + 2\sqrt{3} \left(0 < x < \frac{2\pi}{3} \right),$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ 因为 } y &= 4 \left(\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \right) + 2\sqrt{3} \\ &= 4\sqrt{3} \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) + 2\sqrt{3} \left(\frac{\pi}{6} < x + \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6} \right), \end{aligned}$$

所以, 当 $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 即 $x = \frac{\pi}{3}$ 时, y 取得最大值 $6\sqrt{3}$.

18. 解: (1) 记 A_0 表示事件“取出的 2 件产品中无二等品”,

A_1 表示事件“取出的 2 件产品中恰有 1 件二等品”.

则 A_0, A_1 互斥, 且 $A = A_0 + A_1$, 故

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_0 + A_1) \\ &= P(A_0) + P(A_1) \\ &= (1-p)^2 + C_2^1 p(1-p) \\ &= 1-p^2 \end{aligned}$$

于是 $0.96 = 1 - p^2$.

解得 $p_1 = 0.2, p_2 = -0.2$ (舍去).

(2) ξ 的可能取值为 0, 1, 2.

若该批产品共 100 件, 由 (1) 知其二等品有 $100 \times 0.2 = 20$ 件, 故

$$P(\xi = 0) = \frac{C_{80}^2}{C_{100}^2} = \frac{316}{495}.$$

$$P(\xi = 1) = \frac{C_{80}^1 C_{20}^1}{C_{100}^2} = \frac{160}{495}.$$

$$P(\xi = 2) = \frac{C_{20}^2}{C_{100}^2} = \frac{19}{495}.$$

所以 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2
P	$\frac{316}{495}$	$\frac{160}{495}$	$\frac{19}{495}$

19. 解法一:

(1) 作 $FG \parallel DC$ 交 SD 于点 G , 则 G 为 SD 的中点.

连结 AG , $FG \parallel \frac{1}{2}CD$, 又 $CD \parallel AB$,

故 $FG \parallel AE$, $AEFG$ 为平行四边形.

$EF \parallel AG$, 又 $AG \subset$ 平面 SAD , $EF \not\subset$ 平面 SAD .

所以 $EF \parallel$ 平面 SAD .

(2) 不妨设 $DC = 2$, 则 $SD = 4$, $DG = 2$, $\triangle ADG$ 为等腰直角三角形.

取 AG 中点 H , 连结 DH , 则 $DH \perp AG$.

又 $AB \perp$ 平面 SAD , 所以 $AB \perp DH$, 而 $AB \cap AG = A$, 所以 $DH \perp$ 面 AEF .

取 EF 中点 M , 连结 MH , 则 $HM \perp EF$.

连结 DM , 则 $DM \perp EF$.

故 $\angle DMH$ 为二面角 $A-EF-D$ 的平面角

$$\tan \angle DMH = \frac{DH}{HM} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}.$$

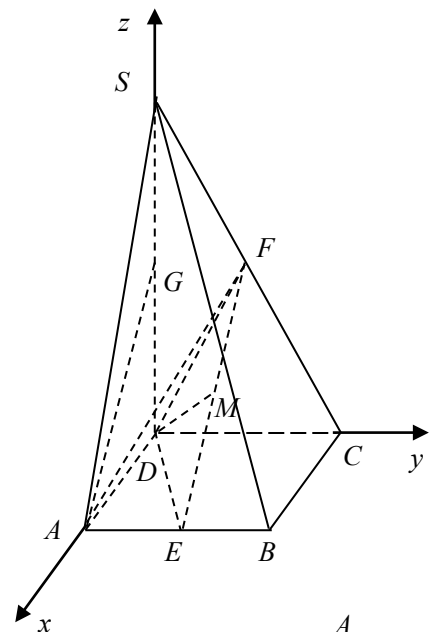
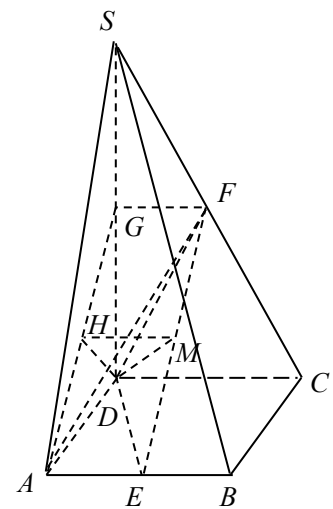
所以二面角 $A-EF-D$ 的大小为 $\arctan \sqrt{2}$.

解法二: (1) 如图, 建立空间直角坐标系 $D-xyz$.

设 $A(a, 0, 0)$, $S(0, 0, b)$, 则 $B(a, a, 0)$, $C(0, a, 0)$,

$$E\left(a, \frac{a}{2}, 0\right), F\left(0, \frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right),$$

$$\overrightarrow{EF} = \left(-a, 0, \frac{b}{2}\right).$$



取 SD 的中点 $G\left(0,0,\frac{b}{2}\right)$, 则 $\overrightarrow{AG} = \left(-a,0,\frac{b}{2}\right)$.

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AG}$, $EF \parallel AG$, $AG \subset$ 平面 SAD , $EF \not\subset$ 平面 SAD ,
所以 $EF \parallel$ 平面 SAD .

(2) 不妨设 $A(1,0,0)$, 则 $B(1,1,0)$, $C(0,1,0)$, $S(0,0,2)$, $E\left(1,\frac{1}{2},0\right)$, $F\left(0,\frac{1}{2},1\right)$.

EF 中点 $M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{MD} = \left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{EF} = (-1,0,1)$, $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$, $MD \perp EF$

又 $\overrightarrow{EA} = \left(0,-\frac{1}{2},0\right)$, $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$, $EA \perp EF$,

所以向量 \overrightarrow{MD} 和 \overrightarrow{EA} 的夹角等于二面角 $A-EF-D$ 的平面角.

$$\cos \langle \overrightarrow{MD}, \overrightarrow{EA} \rangle = \frac{\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{EA}}{|\overrightarrow{MD}| \cdot |\overrightarrow{EA}|} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

所以二面角 $A-EF-D$ 的大小为 $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$.

20. 解: (1) 依题设, 圆 O 的半径 r 等于原点 O 到直线 $x - \sqrt{3}y = 4$ 的距离,

$$\text{即 } r = \frac{4}{\sqrt{1+3}} = 2.$$

得圆 O 的方程为 $x^2 + y^2 = 4$.

(2) 不妨设 $A(x_1,0)$, $B(x_2,0)$, $x_1 < x_2$. 由 $x^2 = 4$ 即得

$$A(-2,0), B(2,0).$$

设 $P(x, y)$, 由 $|PA|, |PO|, |PB|$ 成等比数列, 得

$$\sqrt{(x+2)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = x^2 + y^2,$$

$$\text{即 } x^2 - y^2 = 2.$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} &= (-2-x, -y) \cdot (2-x, -y) \\ &= x^2 - 4 + y^2 \\ &= 2(y^2 - 1). \end{aligned}$$

由于点 P 在圆 O 内, 故 $\begin{cases} x^2 + y^2 < 4, \\ x^2 - y^2 = 2. \end{cases}$

由此得 $y^2 < 1$.

所以 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的取值范围为 $[-2, 0)$.

21. 解: (1) 由 $a_n = \frac{3-a_{n-1}}{2}$, $n = 2, 3, 4, \dots$,

整理得 $1-a_n = -\frac{1}{2}(1-a_{n-1})$.

又 $1-a_1 \neq 0$, 所以 $\{1-a_n\}$ 是首项为 $1-a_1$, 公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列, 得

$$a_n = 1 - (1-a_1) \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(2) 方法一:

由 (1) 可知 $0 < a_n < \frac{3}{2}$, 故 $b_n > 0$.

那么, $b_{n+1}^2 - b_n^2$

$$\begin{aligned} &= a_{n+1}^2(3-2a_{n+1}) - a_n^2(3-2a_n) \\ &= \left(\frac{3-a_n}{2}\right)^2 \left(3-2 \times \frac{3-a_n}{2}\right) - a_n^2(3-2a_n) \\ &= \frac{9a_n}{4}(a_n-1)^2. \end{aligned}$$

又由 (1) 知 $a_n > 0$ 且 $a_n \neq 1$, 故 $b_{n+1}^2 - b_n^2 > 0$,

因此 $b_n < b_{n+1}$, n 为正整数.

方法二:

由 (1) 可知 $0 < a_n < \frac{3}{2}$, $a_n \neq 1$,

因为 $a_{n+1} = \frac{3-a_n}{2}$,

所以 $b_{n+1} = a_{n+1} \sqrt{3-2a_{n+1}} = \frac{(3-a_n)\sqrt{a_n}}{2}$.

由 $a_n \neq 1$ 可得 $a_n(3-2a_n) < \left(\frac{3-a_n}{2}\right)^3$,

即 $a_n^2(3-2a_n) < \left(\frac{3-a_n}{2}\right)^2 \cdot a_n$

两边开平方得 $a_n \sqrt{3-2a_n} < \frac{3-a_n}{2} \cdot \sqrt{a_n}$.

即 $b_n < b_{n+1}$, n 为正整数.

22. 解: (1) 求函数 $f(x)$ 的导数: $f'(x) = 3x^2 - 1$.

曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(t, f(t))$ 处的切线方程为:

$$y - f(t) = f'(t)(x - t),$$

即 $y = (3t^2 - 1)x - 2t^3$.

(2) 如果有一条切线过点 (a, b) , 则存在 t , 使

$$b = (3t^2 - 1)a - 2t^3.$$

于是, 若过点 (a, b) 可作曲线 $y = f(x)$ 的三条切线, 则方程

$$2t^3 - 3at^2 + a + b = 0$$

有三个相异的实数根.

记 $g(t) = 2t^3 - 3at^2 + a + b$,

则 $g'(t) = 6t^2 - 6at$

$$= 6t(t - a).$$

当 t 变化时, $g(t)$, $g'(t)$ 变化情况如下表:

t	$(-\infty, 0)$	0	$(0, a)$	a	$(a, +\infty)$
$g'(t)$	+	0	-	0	+
$g(t)$	↗	极大值 $a+b$	↘	极小值 $b-f(a)$	↗

由 $g(t)$ 的单调性, 当极大值 $a+b < 0$ 或极小值 $b-f(a) > 0$ 时, 方程 $g(t) = 0$ 最多有一个实数根;

当 $a+b = 0$ 时, 解方程 $g(t) = 0$ 得 $t = 0$, $t = \frac{3a}{2}$, 即方程 $g(t) = 0$ 只有两个相异的实数根;

当 $b-f(a) = 0$ 时, 解方程 $g(t) = 0$ 得 $t = -\frac{a}{2}$, $t = a$, 即方程 $g(t) = 0$ 只有两个相异的实数根.

综上，如果过 (a, b) 可作曲线 $y = f(x)$ 三条切线，即 $g(t) = 0$ 有三个相异的实数根，

$$\text{则} \begin{cases} a + b > 0, \\ b - f(a) < 0. \end{cases}$$

$$\text{即} \quad -a < b < f(a).$$