

2012 福建数学试题（文史类）

第 I 卷（选择题 共 60 分）

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 复数 $(2+i)^2$ 等于

- A. $3+4i$ B. $5+4i$ C. $3+2i$ D. $5+2i$

2. 已知集合 $M=\{1, 2, 3, 4\}$, $N=\{-2, 2\}$, 下列结论成立的是

- A. $N \subseteq M$ B. $M \cup N = M$ C. $M \cap N = N$ D. $M \cap N = \{2\}$

3. 已知向量 $a = (x-1, 2)$, $b = (2, 1)$, 则 $a \perp b$ 的充要条件是

- A. $x = -\frac{1}{2}$ B. $x = 1$ C. $x = 5$ D. $x = 0$

4. 一个几何体的三视图形状都相同，大小均等，那么这个几何体不可以是

- A. 球 B. 三棱锥 C. 正方体 D. 圆柱

5. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{5} = 1$ 的右焦点为 $(3, 0)$, 则该双曲线的离心率等于

- A. $\frac{3\sqrt{14}}{14}$ B. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{4}{3}$

6. 阅读右图所示的程序框图，运行相应的程序，输出 s 值等于

- A. -3 B. -10 C. 0 D. -2

7. 直线 $x + \sqrt{3}y - 2 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 = 4$ 相交于 A, B 两点，则弦 AB 的长度等于

- A. $2\sqrt{5}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. 1

8. 函数 $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4})$ 的图像的一条对称轴是

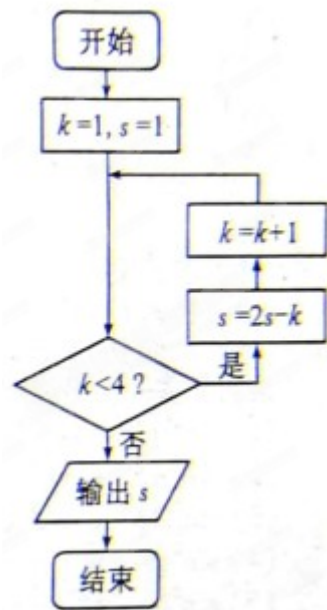
- A. $x = \frac{\pi}{4}$ B. $x = \frac{\pi}{2}$ C. $x = -\frac{\pi}{4}$ D. $x = -\frac{\pi}{2}$

9. 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$, 则 $f(g(\pi))$ 的

值为

- A. 1 B. 0 C. -1 D. π

10. 若直线 $y = 2x$ 上存在点 (x, y) 满足约束条件 $\begin{cases} x + y - 3 \leq 0 \\ x - 2y - 3 \leq 0 \\ x \geq m \end{cases}$, 则实数 m 的最大值为



- A.-1 B.1 C. $\frac{3}{2}$ D.2

11. 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = n \cos \frac{n\pi}{2}$ ，其前 n 项和为 S_n ，则 S_{2012} 等于
 A.100.6 B.2012 C.503 D.0

12. 已知 $f(x) = x^2 - 6x^2 + 9x - abc$ ， $a < b < c$ ，且 $f(a) = f(b) = f(c) = 0$. 现给出如下结论：
 ① $f(0) f(1) > 0$ ；② $f(0) f(1) < 0$ ；③ $f(0) f(3) > 0$ ；④ $f(0) f(3) < 0$.
 其中正确结论的序号是
 A.①③ B.①④ C.②③ D.②④

第 II 卷（非选择题共 90 分）

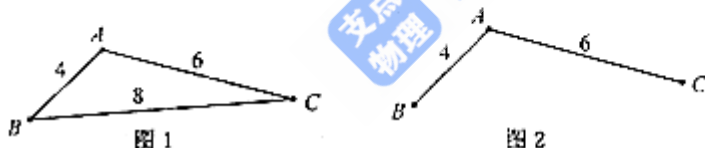
二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分。把答案填在答题卡的相应位置。

13. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle BAC = 60^\circ$ ， $\angle ABC = 45^\circ$ ， $BC = \sqrt{3}$ ，则 $AC =$ _____。

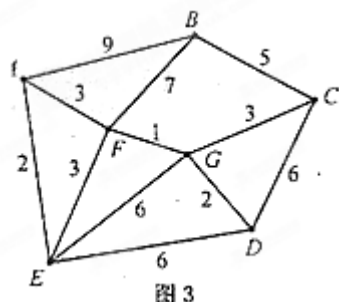
14. 一支田径队有男女运动员 98 人，其中男运动员有 56 人。按男女比例用分层抽样的方法，从全体运动员中抽出一个容量为 28 的样本，那么应抽取女运动员人数是_____。

15. 已知关于 x 的不等式 $x^2 - ax + 2a > 0$ 在 \mathbb{R} 上恒成立，则实数 a 的取值范围是_____。

16. 某地区规划道路建设，考虑道路铺设方案，方案设计图中，求表示城市，两点之间连线表示两城市间可铺设道路，连线上数据表示两城市间铺设道路的费用，要求从任一城市都能到达其余各城市，并且铺设道路的总费用最小。例如：在三个城市道路设计中，若城市间可铺设道路的线路图如图 1，则最优设计方案如图 2，此时铺设道路的最小总费用为 10。



现给出该地区可铺设道路的线路图如图 3，则铺设道路的最小总费用为_____。



三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 12 分)

在等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 中， $a_1 = b_1 = 1$ ， $b_4 = 8$ ， $\{a_n\}$ 的前 10 项和 $S_{10} = 55$.

- (I) 求 a_n 和 b_n ；
 (II) 现分别从 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 3 项中各随机抽取一项，写出相应的基本事件，并求这两项的值相等的概率。

18.(本题满分 12 分)

某工厂为了对新研发的一种产品进行合理定价，将该产品按事先拟定的价格进行试销，得到如下数据：

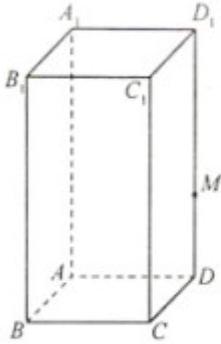
单价 x (元)	8	8.2	8.4	8.6	8.8	9
销量 y (件)	90	84	83	80	75	68

(I) 求回归直线方程 $\hat{y}=bx+a$ ，其中 $b=-20$ ， $a=\hat{y}-b\bar{x}$ ；

(II) 预计在今后的销售中，销量与单价仍然服从 (I) 中的关系，且该产品的成本是 4 元/件，为使工厂获得最大利润，该产品的单价应定为多少元？(利润=销售收入-成本)

19. (本小题满分 12 分)

如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=AD=1$ ， $AA_1=2$ ， M 为棱 DD_1 上的一点。



I 求三棱锥 $A-MCC_1$ 的体积；

II 当 A_1M+MC 取得最小值时，求证： $B_1M \perp$ 平面 MAC 。

20. (本小题满分 13 分)

某同学在一次研究性学习中发现，以下五个式子的值都等于同一个常数。

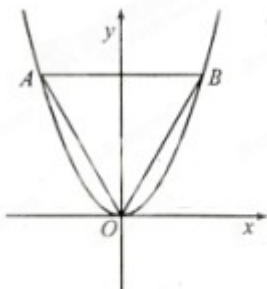
- (1) $\sin^2 13^\circ + \cos^2 17^\circ - \sin 13^\circ \cos 17^\circ$
- (2) $\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ - \sin 15^\circ \cos 15^\circ$
- (3) $\sin^2 18^\circ + \cos^2 12^\circ - \sin 18^\circ \cos 12^\circ$
- (4) $\sin^2 (-18^\circ) + \cos^2 48^\circ - \sin (-18^\circ) \cos 48^\circ$
- (5) $\sin^2 (-25^\circ) + \cos^2 55^\circ - \sin (-25^\circ) \cos 55^\circ$

I 试从上述五个式子中选择一个，求出这个常数

II 根据 (I) 的计算结果，将该同学的发现推广为三角恒等式，并证明你的结论。

21. (本小题满分 12 分)

如图，等边三角形 OAB 的边长为 $8\sqrt{3}$ ，且其三个顶点均在抛物线 $E: x^2=2py$ ($p>0$) 上。



- (1) 求抛物线 E 的方程；
(2) 设动直线 l 与抛物线 E 相切于点 P，与直线 $y=-1$ 相交于点 Q。证明以 PQ 为直径的圆恒过 y 轴上某定点。

22. (本小题满分 14 分)

已知函数 $f(x) = ax \sin x - \frac{3}{2}$ ($a \in \mathbb{R}$), 且在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为 $\frac{\pi-3}{2}$,

- (1) 求函数 $f(x)$ 的解析式；
(2) 判断函数 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 内的零点个数，并加以证明。