绝密★启用前

2005年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）

数学试卷（理工农医类）

（满分150分，考试时间120分钟）

考生注意

1. 本场考试时间120分钟，试卷共4页，满分150分，答题纸共2页.

2. 作答前，在答题纸正面填写姓名、准考证号，反面填写姓名，将核对后的条形码贴在答题纸指定位置.

3. 所有作答务必填涂或书写在答题纸上与试卷题号对应的区域，不得错位. 在试卷上作答一律不得分.

4. 用2B铅笔作答选择题，用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答非选择题.

一、填空题（$4\times12=48$）

1.函数 $f\left(x\right)=\log_4\left(x+1\right)$ 的反函数 $f^{-1}\left(x\right)=$______________

2.方程 $4^x+2^x-2=0$ 的解是________________

3.直角坐标平面 xOy 中，若定点 $A\left(1,2\right)$ 与动点 $P\left(x,y\right)$ 满足 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=4$，则点P的轨迹方程是____________

4.在 $\left(x-a\right)^{10}$ 的展开式中，x^7 的系数是15，则实数 $a=$____________

5.若双曲线的渐近线方程为 $y=\pm3x$，它的一个焦点是 $\left(\sqrt{10},0\right)$，则双曲线的方程是____

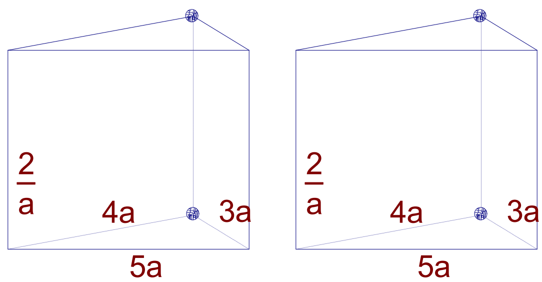
6.将参数方程 $\begin{cases}x=1+2\cos\theta\\ y=2\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）化为普通方程，所得方程是______

7.计算：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+1}-2^n}{3^n+2^{n+1}}=$____________

8.某班有50名学生，其15人选修A课程，另外35人选修B课程从班级中任选两名学生，他们是选修不同课程的学生的概率是__________（结果用分数表示）

9.在 ΔABC 中，若 $\angle A=120^\circ$，$AB=5$，$BC=7$，则 ΔABC 的面积S=________

10.函数 $f\left(x\right)=\sin x+2\left|\sin x\right|$　$x\in\left[0,2\pi\right]$ 的图像与直线 $y=k$ 又且仅有两个不同的交点，则 k 的取值范围是__________



11.有两个相同的直三棱柱，高为 $\dfrac{2}{a}$，底面三角形的三边长分别为 $3a$ 、$4a$ 、$5a$ $\left(a>0\right)$ 用它们拼成一个三棱柱或四棱柱，在所有可能的情形中，全面积最小的一个是四棱柱，则 a 的取值范围是______

12.用n个不同的实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 可得到 $n!$ 个不同的排列，每个排列为一行写成一个 $n!$ 行的数阵对第 i 行 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}$，记 $b_i=-a_{i1}+2a_{i2}-3a_{i3}+\cdots+\left(-1\right)^n na_{in}$ $\left(i=1,2,3,\cdots,n!\right)$ 例如：用1，2，3可得数阵如下，由于此数阵中每一列各数之

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\\2&1&3\\2&3&1\\3&1&2\\3&2&1\end{pmatrix}$$

和都是12，所以，$b_1+b_2+\cdots+b_6=-12+2\times12-3\times12=-24$ 那么，在用1，2，3，4，5形成的数阵中，$b_1+b_2+\cdots+b_{120}=$ ______________

二、选择题（$4\times4=16$）

13.若函数 $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2^x+1}$，则该函数在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上是

(A)单调递减无最小值　(B)单调递减有最小值

(C)单调递增无最大值　(D)单调递增有最大值

14.已知集合 $M=\left\{x\middle||x-1|\le2,x\in R\right\}$，$P=\left\{x\middle|\dfrac{5}{x+1}\ge1,x\in Z\right\}$，则 $M\cap P$ 等于

(A) $\left\{x\middle|0<x\le3,x\in Z\right\}$　(B) $\left\{x\middle|0\le x\le3,x\in Z\right\}$

(C) $\left\{x\middle|-1\le x\le0,x\in Z\right\}$　(D) $\left\{x\middle|-1\le x<0,x\in Z\right\}$

15.过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点作一条直线与抛物线相交于A、B两点，它们的横坐标之和等于5，则这样的直线

(A)又且仅有一条　(B)有且仅有两条

(C)有无穷多条　(D)不存在

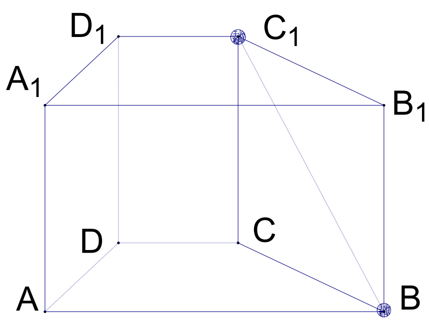
16.设定义域为为R的函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\left|\lg|x-1|\right|, & x\ne1\\ 0, & x=1\end{cases}$，则关于 x 的方程 $f^2\left(x\right)+bf\left(x\right)+c=0$ 有7个不同的实数解得充要条件是

(A) $b<0$ 且 $c>0$　(B) $b>0$ 且 $c<0$

(C) $b<0$ 且 $c=0$　(D) $b\ge0$ 且 $c=0$

三、解答题

17.已知直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=2$，底面 $ABCD$ 是直角梯形，$\angle A=90^\circ$，$AB//CD$，$AB=4$，$AD=2$，$DC=1$，求异面直线 BC_1 与 DC 所成的角的大小（结果用反三角函数表示）

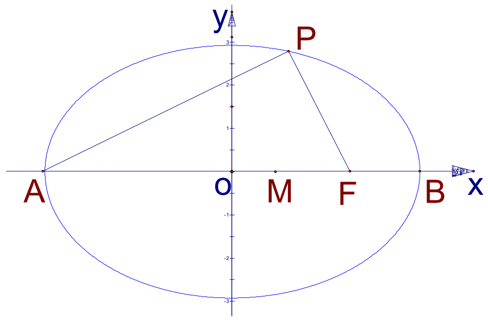


18.证明：在复数范围内，方程 $|z|^2+\left(1-i\right)\bar{z}-\left(1+i\right)z=\dfrac{5-5i}{2+i}$（$i$ 为虚数单位）无解

19.点A、B分别是椭圆 $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{20}=1$ 长轴的左、右焦点，点F是椭圆的右焦点点P在椭圆上，且位于x轴上方，$PA\perp PF$

（1）求P点的坐标；

（2）设M是椭圆长轴AB上的一点，M到直线AP的距离等于$|MB|$，求椭圆上的点到点M的距离d的最小值



20.假设某市2004年新建住房400万平方米，其中有250万平方米是中低价房预计在今后的若干年内，该市每年新建住房面积平均比上一年增长8%，另外，每年新建住房中，中低价房的面积均比上一年增加50万平方米那么，到那一年底，

（1）该市历年所建中低价房的累计面积（以2004年为累计的第一年）将首次不少于4750万平方米？

（2）当年建造的中低价房的面积占该年建造住房面积的比例首次大于85%？

21.（本题满分18分）本题共有3个小题，第1小题满分4分，第2小题满分8分，第3小题满分6分

对定义域是$D_f.D_g$的函数$y=f(x).y=g(x)$，

规定：函数$h(x)=\begin{cases} f(x)g(x), & 当x\in D_f且x\in D_g \\ f(x), & 当x\in D_f且x\notin D_g \\ g(x), & 当x\notin D_f且x\in D_g \end{cases}$

（1）若函数$f(x)=\dfrac{1}{x-1}$，$g(x)=x^2$，写出函数$h(x)$的解析式；

（2）求问题（1）中函数$h(x)$的值域；

（3）若$g(x)=f(x+\alpha)$，其中α是常数，且$\alpha\in[0,\pi]$，请设计一个定义域为R的函数$y=f(x)$，及一个α的值，使得$h(x)=\cos 4x$，并予以证明

22.在直角坐标平面中，已知点$P_1\left(1,2\right)$，$P_2\left(2,2^2\right)$，$P_3\left(3,2^3\right)$，$\cdots,P_n\left(n,2^n\right)$，其中n是正整数对平面上任一点$A_0$，记$A_1$为$A_0$关于点$P_1$的对称点，$A_2$为$A_1$关于点$P_2$的对称点，$\cdots$, A_n为A_{n-1}关于点P_n的对称点

（1）求向量$\overrightarrow{A_0A_2}$的坐标；

（2）当点A_0在曲线C上移动时，点A_2的轨迹是函数$y=f\left(x\right)$的图像，其中$f\left(x\right)$是以3位周期的周期函数，且当$x\in\left(0,3\right]$时，$f\left(x\right)=\lg x$求以曲线C为图像的函数在$\left(1,4\right]$上的解析式；

（3）对任意偶数n，用n表示向量$\overrightarrow{A_0A_n}$的坐标

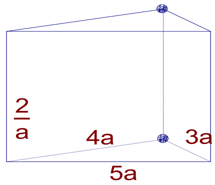
2005年高考理科数学·上海卷·试题及答案

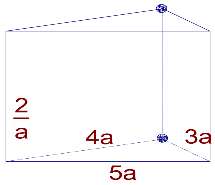
参考答案

1. 4^x-1　　2. $x=0$　　3. $x+2y-4=0$　　4. $-\frac{1}{2}$　　5. $x^2-\frac{y^2}{9}=1$

6. $(x-1)^2+y^2=4$　　7. 3　　8. $\frac{3}{7}$　　9. $\frac{15\sqrt{3}}{4}$　　10. $1<k<3$

11. $0<a<\frac{\sqrt{15}}{3}$





解析：①拼成一个三棱柱时，只有一种一种情况，就是将上下底面对接，其全面积为

$$S_{三棱柱表面}=2\times\frac{1}{2}\times3a\times4a+(3a+4a+5a)\times\frac{4}{a}=12a^2+$$

②拼成一个四棱柱，有三种情况，就是分别让边长为$3a,4a,5a$所在的侧面重合，其上下底面积之和都是$2\times2\times\frac{1}{2}\times3a\times4a=24a^2$，但侧面积分别为：

$$2(4a+5a)\times\frac{2}{a}=36,2(3a+5a)\times\frac{2}{a}=32,2(3a+4a)\times\frac{2}{a}=28,$$

显然，三个是四棱柱中全面积最小的值为：

$$S_{四棱柱表面}=2\times2\times\frac{1}{2}\times3a\times4a+2(3a+4a)\times\frac{2}{a}=24a^2+28$$

由题意，得

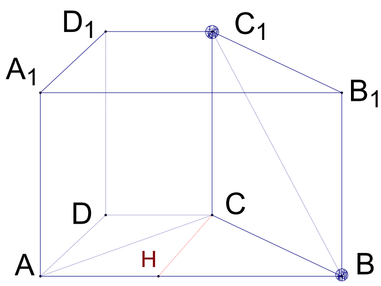
$$24a^2+28\le12a^2+48$$

解得　　$0<a<\frac{\sqrt{15}}{3}$

12. －1080

13. A　　14. B　　15. B　　16. C

17. [解]由题意$AB//CD$, ∴$\angle C_1BA$是异面直线BC_1与DC所成的角. 连结AC_1与AC, 在$Rt\triangle ADC$中, 可得$AC=\sqrt{5}$.



又在$Rt\triangle ACC_1$中, 可得$AC_1=3$.

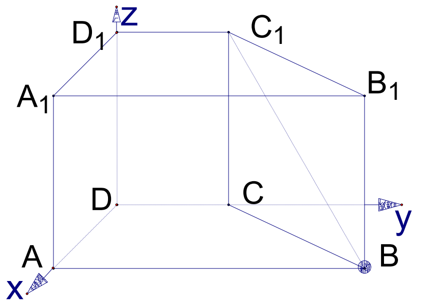
在梯形$ABCD$中, 过C作$CH//AD$交AB于H,

得$\angle CHB=90°$, $CH=2$, $HB=3$, ∴$CB=\sqrt{13}$.

又在$Rt\triangle CBC_1$中, 可得$BC_1=\sqrt{17}$,

在△ABC_1中，$\cos\angle C_1BA=\frac{3\sqrt{17}}{17}$，∴$\angle C_1BA=\arccos\frac{3\sqrt{17}}{17}$

异面直线BC_1与DC所成角的大小为$\arccos\frac{3\sqrt{17}}{17}$



另解：如图，以D为坐标原点，分别以DA、DC、DD_1所在直线为x、y、z轴建立直角坐标系.

则$C_1(0, 1, 2)$，$B(2, 4, 0)$，∴$\overrightarrow{BC_1}=(-2, -3, 2)$，

$\overrightarrow{CD}=(0, -1, 0)$，设$\overrightarrow{BC_1}$与$\overrightarrow{CD}$所成的角为θ，

则$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{BC_1}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{BC_1}|\cdot|\overrightarrow{CD}|}=\frac{3\sqrt{17}}{17}$，$\theta=\arccos\frac{3\sqrt{17}}{17}$.

异面直线BC_1与DC所成角的大小为$\arccos\frac{3\sqrt{17}}{17}$

18. [解] 原方程化简为$|z|^2+(z+\bar{z})i=1-i$，

设$z=x+yi$（x、$y\in$R），代入上述方程得 $x^2+y^2+2xi=1-i$，

∴$x^2+y^2=1$且$2x=-1$，解得$x=-\frac{1}{2}$且$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，

∴原方程的解是$z=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

19. [解]（1）由已知可得点$A(-6, 0)$，$F(0, 4)$

设点$P(x, y)$，则$\overrightarrow{AP}=\{x+6, y\}$，$\overrightarrow{FP}=\{x-4, y\}$，

由已知可得 $$\begin{cases}\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1\\(x+6)(x-4)+y^2=0\end{cases}$$

则$2x^2+9x-18=0$，解得$x=\frac{3}{2}$或$x=-6$.

由于$y>0$，只能$x=\frac{3}{2}$，于是$y=\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

∴点P的坐标是$(\frac{3}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2})$

(2) 直线AP的方程是$x-\sqrt{3}y+6=0$.

设点$M(m,0)$，则M到直线AP的距离是$\dfrac{|m+6|}{2}$.

于是$\dfrac{|m+6|}{2}=|m+6|$，又$-6\leqslant m\leqslant 6$，解得$m=2$.

椭圆上的点(x,y)到点M的距离d有

$d^2=(x-2)^2+y^2=x-4x^2+4+20-\dfrac{5}{9}x^2=\dfrac{4}{9}(x-\dfrac{9}{2})^2+15$,

由于$-6\leqslant m\leqslant 6$，∴当$x=\dfrac{9}{2}$时，d取得最小值$\sqrt{15}$

20. [解](1)设中低价房面积形成数列$\{a_n\}$，由题意可知$\{a_n\}$是等差数列，其中$a_1=250$, $d=50$,

则$S_n=250n+\dfrac{n(n-1)}{2}\times 50=25n^2+225n$,

令$25n^2+225n\geqslant 4750$，即$n^2+9n-190\geqslant 0$，而n是正整数，∴$n\geqslant 10$.

∴到2013年底，该市历年所建中低价房的累计面积将首次不少于4750万平方米.

(2)设新建住房面积形成数列$\{b_n\}$，由题意可知$\{b_n\}$是等比数列，其中$b_1=400$, $q=1.08$,

则$b_n=400\cdot(1.08)^{n-1}$.

由题意可知$a_n>0.85\,b_n$，有$250+(n-1)\cdot 50>400\cdot(1.08)^{n-1}\cdot 0.85$.

由计算器解得满足上述不等式的最小正整数n=6.

∴到2009年底，当年建造的中低价房的面积占该年建造住房面积的比例首次大于85%.

21. [解] (1) $h(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{x-1} & x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)\\ 1 & x=1\end{cases}$

(2) 当$x\neq 1$时，$h(x)=\dfrac{x^2}{x-1}=x-1+\dfrac{1}{x-1}+2$,

若$x>1$时，则$h(x)\geqslant 4$，其中等号当$x=2$时成立

若$x<1$时，则$h(x)\leqslant 0$，其中等号当$x=0$时成立

∴函数$h(x)$的值域是$(-\infty,0]\cup\{1\}\cup[4,+\infty)$

(3)令 $f(x)=\sin 2x+\cos 2x$，$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$

则$g(x)=f(x+\alpha)=\sin 2(x+\dfrac{\pi}{4})+\cos 2(x+\dfrac{\pi}{4})=\cos 2x-\sin 2x$,

于是$h(x)=f(x)\cdot f(x+\alpha)=(\sin 2x+co2sx)(\cos 2x-\sin 2x)=\cos 4x$.

另解令$f(x)=1+\sqrt{2}\sin 2x$，$\alpha=\dfrac{\pi}{2}$,

$g(x)=f(x+\alpha)=1+\sqrt{2}\sin 2(x+\pi)=1-\sqrt{2}\sin 2x$,

于是$h(x)=f(x)\cdot f(x+\alpha)=(1+\sqrt{2}\sin 2x)(1-\sqrt{2}\sin 2x)=\cos 4x$.

22. [解](1)设点$A_0(x,y)$，A_0为P_1关于点的对称点A_0的坐标为$(2-x,4-y)$,

A_1为P_2关于点的对称点A_2的坐标为$(2+x,4+y)$,

$\therefore \overrightarrow{A_0A_2}=\{2, 4\}$.

(2) $\because \overrightarrow{A_0A_2}=\{2, 4\}$,

$\therefore f(x)$的图象由曲线C向右平移2个单位,再向上平移4个单位得到.

因此,

曲线C是函数$y=g(x)$的图象,其中$g(x)$是以3为周期的周期函数,且当$x\in(-2, 1]$时,$g(x)=\lg(x+2)-4$. 于是,当$x\in(1, 4]$时,$g(x)=\lg(x-1)-4$.

另解设点$A_0(x, y)$, $A_2(x_2, y_2)$,于是$x_2-x=2$, $y_2-y=4$,

若$3< x_2\leqslant 6$,则$0< x_2-3\leqslant 3$,于是$f(x_2)=f(x_2-3)=\lg(x_2-3)$.

当$1< x\leqslant 4$时,则$3< x_2\leqslant 6$, $y+4=\lg(x-1)$.

$\therefore$当$x\in(1, 4]$时,$g(x)=\lg(x-1)-4$.

(3) $\overrightarrow{A_0A_n}=\overrightarrow{A_0A_2}+\overrightarrow{A_2A_4}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-2}A_n}$,

由于$\overrightarrow{A_{2k-2}A_{2k}}=2\overrightarrow{P_{2k-1}P_{2k}}$,得

$\overrightarrow{A_0A_n}=2(\overrightarrow{P_1P_2}+\overrightarrow{P_3P_4}+\cdots+\overrightarrow{P_{n-1}P_n})$

$$=2(\{1, 2\}+\{1, 2^3\}+\cdots+\{1, 2^{n-1}\})=2\{\frac{n}{2}, \frac{2(2^n-1)}{3}\}=\{n, \frac{4(2^n-1)}{3}\}$$