2001年江西高考理科数学真题及答案

第Ⅰ卷（选择题共60分）

参考公式：

如果事件A、B互斥，那么

P（A+B）=P（A）+P（B）

如果事件A、B相互独立，那么

P（A•B）=P（A）•P（B）

如果事件A在一次试验中发生的概率是P，那么n次独立重复试验中恰好发生k次的概率

$P_n(k)=C_n^kP^k(1-P)^{n-k}$

正棱锥、圆锥的侧面积公式

$S_{锥侧}=\frac{1}{2}cl$

其中c表示底面周长，l表示斜高或母线长.

棱锥、圆锥的体积公式

$V_{锥体}=\frac{1}{3}sh$

其中s表示底面积，h表示高.

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

（1）函数$y=3\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3})$的周期、振幅依次是

（A）4π、3　　（B）4π、－3　　（C）π、3　　（D）π、－3

（2）若S_n是数列$\{a_n\}$的前n项和，且$S_n=n^2$，则$\{a_n\}$是

（A）等比数列，但不是等差数列　　（B）等差数列，但不是等比数列

（C）等差数列，而且也是等比数列　　（D）既非等比数列又非等差数列

（3）过点A（1，－1）、B（－1，1）且圆心在直线$x+y-2=0$上的圆的方程是

（A）$(x-3)^2+(y+1)^2=4$　　（B）$(x+3)^2+(y-1)^2=4$

（C）$(x-1)^2+(y-1)^2=4$　　（D）$(x+1)^2+(y+1)^2=4$

（4）若定义在区间（-1，0）内的函数$f(x)=\log_{2a}(x+1)$满足$f(x)>0$，则a的取值范围是

（A）$(0,\frac{1}{2})$　　（B）$(0,\frac{1}{2}]$　　（C）$(\frac{1}{2},+\infty)$　　（D）$(0,+\infty)$

（5）若向量a=（1，1），b=（1，－1），c=（－1，2），则c=

（A）$-\frac{1}{2}$a+$\frac{3}{2}$b　　（B）$\frac{1}{2}$a－$\frac{3}{2}$b　　（C）$\frac{3}{2}$a－$\frac{1}{2}$b　　（D）－$\frac{3}{2}$a＋$\frac{1}{2}$b

（6）若A、B是x轴上的两点，点P的横坐标为2且|PA|=|PB|．若直线PA的方程为$x-y+1=0$，则直线PB的方程是

（A）$x+y-5=0$　　（B）$2x-y-1=0$

（C）$2y-x-4=0$　　（D）$2x+y-7=0$

（7）若$0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{4},\sin\alpha+\cos\alpha=a,\sin\beta+\cos\beta=b$，则

（A） $a<b$　　（B） $a>b$　　（C） $ab<1$　　（D） $ab>2$

（8）函数 $y=1+3x-x^3$ 有

（A）极小值－1，极大值 1　　（B）极小值－2，极大值 3

（C）极小值－2，极大值 2　　（D）极小值－1，极大值 3

（9）某赛季足球比赛的计分规则是：胜一场，得 3 分；平一场，得 1 分；负一场，得 0 分，一球队打完 15 场，积 33 分，若不考虑顺序，该队胜、负、平的情况共有

（A）3 种　　（B）4 种　　（C）5 种　　（D）6 种

（10）设坐标原点为 0，抛物线 $y^2=2x$ 与过焦点的直线交于 A、B 两点，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$

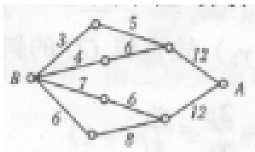
（A） $\frac{3}{4}$　　（B） $-\frac{3}{4}$　　（C）3　　（D）－3

（11）一间平房的屋顶有如图三种不同的盖法：①单向倾斜;②双向倾斜;③四向倾斜。记三种盖法屋顶面积分别为 P_1、P_2、P_3

若屋顶斜面与水平面所成的角都是 α，则

（A）$P_3>P_2>P_1$　　（B）$P_3>P_2=P_1$　　（C）$P_3=P_2>P_1$　　（D）$P_3=P_2=P_1$

（12） 如图，小圆圈表示网络的结点，结点之间的连线表示它们有网线相联，连线标注的数字表示该段网线单位时间内可以通过的最大信息量．现从结点 A 向结点 B 传递信息，信息可以分开沿不同的路线同时传递，则单位时间内传递的最大信息量为



（A）26　　（B）24　　（C）20　　（D）19

第 II 卷(非选择题共 90 分)

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分，把答案填在题中横线上．

（13）若复数 $z=\sqrt{2}+\sqrt{6}i$，则 $\arg\frac{1}{z}$ 等于____________.

（14） 一个袋子里装有大小相同的 3 个红球和 2 个黄球．从中同时取出 2 个，则其中含红球个数的数学期望为________________.（用数字作答）

（15）在空间中，

①若四点不共面，则这四点中任何三点都不共线．

②若两条直线没有共点，则这两条直线是异面直线．

以上两个命题中，逆命题为真命题的是________.

（把符合要求的命题序号都填上）

（15） 设｛a_n｝是公比为 q 的等比数列，S_n 是它的前 n 项和，若｛S_n｝是等差数列，

则 q= ____________.

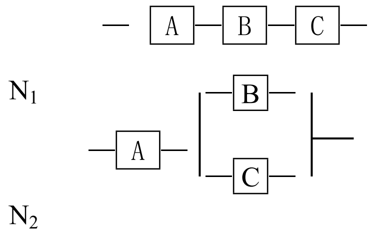
三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

（17）（本小题满分 12 分）

解关于 x 的不等式 $\dfrac{x-a}{x-a^2}<0(a\in R).$

（18）（本小题满分 12 分）

如图，用 A、B、C 三类不同的无件连接成两个系统 N_1、N_2．当元件 A、B、C 都正常工作时，系统 N_1 正常工作；当元件 A 正常工作且元件 B、C 至少有一个正常工作时，系统 N_2 正常工作．已知元件 A、B、C 正常工作的概率依次为 0.80, 0.90, 0.90．分别求系统 N_1、N_2 正常工作的概率 P_1、P_2．



（19）（本小题满分 12 分）

设$a>0, f(x)=\frac{e^x}{a}+\frac{a}{e^x}$是 R 上的偶函数.

（Ⅰ）求 a 的值；

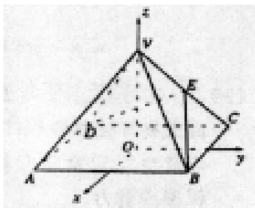
（Ⅱ）证明 f（x）在（0，+∞）上是增函数.

注意：考生在（20 甲）、（20 乙）两题中选一题作答，如果两题都答，只以（20 甲）计分.

（20 甲）（本小题满分 12 分）如图，以正四棱锥 V—ABCD 底面中心 O 为坐标原点建立空间直角坐标系 O—xyz，其中 Ox//BC，Oy//AB. E 为 VC 中点，正四棱锥底面边长为 2a，高为 h.

（Ⅰ）求 $\cos < \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{DE} >$;

（Ⅱ）记面 BCV 为α，面 DCV 为β，若∠BED 是二面角α—VC—β的平面角，求∠BED.



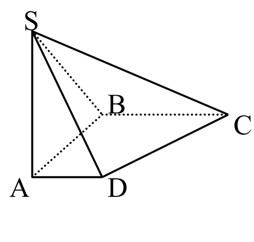
（20 乙）本小题满分 12 分）如图，在底面是直角梯形的四棱锥 S—ABCD 中，

$\angle ABC = 90°, SA \perp$ 面 ABCD，

SA=AB=BC=1，AD=$\frac{1}{2}$.

（Ⅰ）求四棱锥 S—ABCD 的体积；

（Ⅱ）求面 SCD 与面 SBA 所成的二面角的正切值.

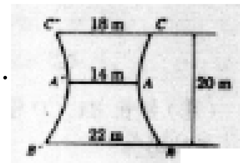


（21）（本小题满分 12 分）

某电厂冷却塔的外形是如图所示双曲线的一部分绕其中轴（即双曲线的虚轴）旋转所成的曲面，其中 A、A′ 是双曲线的顶点，C、C′ 是冷却塔上口直径的两个端点，B、B′ 是下底直径的两个端点，已知 AA′=14m，CC′=18m，BB′=22m，塔高 20m.

（Ⅰ）建立坐标系并写出该双曲线方程；

（Ⅱ）求冷却塔的容积（精确到 $10m^3$，塔壁厚度不计，π 取 3.14）.



（22）（本小题满分 14 分）

设$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$,曲线$x^2\sin\theta+y^2\cos\theta=1$和$x^2\cos\theta-y^2\sin\theta=1$有 4 个不同的交点.

（Ⅰ）求 θ 的取值范围；

（Ⅱ）证明这 4 个交点共圆，并求圆半径的取值范围.

参 考 答 案

一、选择题：本题考查基本知识和基本运算

（1）A （2）B （3）C （4）A （5）B （6）A （7）A （8）D （9）A （10）B （11）D （12）D

二、填空题：本题考查基本知识和基本运算

（13）$\frac{5\pi}{3}$ （14）1.2 （15）② （16）1

三、解答题

（17）本小题主要考查分式不等式的解法，考查分类讨论的数学思想.

解：原不等式的解集是下面不等式组（Ⅰ）、（Ⅱ）的解集的并集：

（Ⅰ）$\begin{cases} x-a=0, \\ x-a^2<0; \end{cases}$ （Ⅱ）$\begin{cases} x-a<0, \\ x-a^2>0; \end{cases}$

分情况讨论

（i）当 a＜0 或 a＞1 时，有 a＜a^2，此时不等式组（I）的解集为$\{x\,|\,a<x<a^2\}$,不等式组（II）的解集为空集φ；

（ii）当$0<a<1$时，有 a^2＜a，此时，不等式组（I）的解集为空集φ，不等式组（II）的解集为$\{x\,|\,a^2<x<a\}$;

（iii）当 a=0 或 a=1 时，原不等式无解.

综上，当 a＜0 或 a＞1 时时，原不等式的解集为$\{x\,|\,a<x<a^2\}$,当$0<a<1$时，原不等式的解集为$\{x\,|\,a^2<x<a\}$;当 a=0 或 a=1 时，原不等式的解集为φ.

（18）本小题考查相互独立事件同时发生或互斥事件有一个发生的概率的计算方法，考查运用概率知识解决实际问题的能力。

解：分别记元件 A、B、C 正常工作为事件 A、B、C，由已知条件

P（A）=0.80, P(B)=0.90, P(C)=0.90.

（I）因为事件 A、B、C 是相互独立的，所以，系统 N_1 正常工作的概率

P_1=P（A•B•C）=P（A）•P（B）•P（C）=0.80×0.90×0.90=0.648.

故系统 N_1 正常工作的概率为 0.648.

（II）系统 N_2 正常工作的概率

$P_2=P(A)\cdot 1-P(\overline{B}\cdot\overline{C})]=P(A)\cdot[1-P(\overline{B})\cdot P(\overline{C})]$,

$\because P(\overline{B})=1-P(B)=1-0.90=0.10, P(\overline{C})=1-P(C)=1-0.90=0.10,$

$\because P_2=0.80\times[1-0.10\times0.10]=0.80\times0.99=0.792.$

故系统 N_2 正常工作的概率为 0.792.

（19）本小题主要考查函数的奇偶性和单调性等基本性质，指数函数和不等式的基本性质和运算，以及综合分析问题的能力.

（I） 解：依题意，对一切$x\in R$有$f(x)=f(-x)$，即$\frac{e^x}{a}+\frac{a}{e^x}=\frac{1}{ae^x}+ae^x$,

所以$(a-\frac{1}{a})(e^x-\frac{1}{e^x})=0$对一切$x\in R$成立.

由此得到$a-\frac{1}{a}=0,$即 a^2=1. 又因为 a＞0，所以 a=1.

（II）证明一：设 0＜x_1＜x_2,

$$f(x_1)-f(x_2)-e^{x_1}-e^{x_2}+\frac{1}{e^{x_1}}-\frac{1}{e^{x_2}}=(e^{x_2}-e^{x_1})(\frac{1}{e^{x_1+x_2}}-1)$$

$$=e^{x_1}(e^{x_2-x_1}-1)\cdot\frac{1-e^{x_2+x_1}}{e^{x_2+x_1}},$$

由 $x_1>0,x_2>0,x_2-x_1>0,$ 得 $x_1+x_2>0,\ e^{x_2-x_1}-1>0,1-e^{x_2+x_1}<0.$

$\therefore f(x_1)-f(x_2)<0,$ 即 f（x）在（0，+∞）上是增函数.

证明二：由 $f(x)=e^x+e^{-x}$ 得 $f'(x)=e^x-e^{-x}=e^{-x}(e^{2x}-1).$

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，有 $e^{-x}>0,e^{2x}-1>0,$ 此时 $f'(x)>0.$

所以 f（x）在（0，+∞）上是增函数.

注意：考生在（20 甲）、（20 乙）两题中选一题作答，如果两题都答，只以（20 甲）计分.

（20 甲）本小题主要考查空间直角坐标的概念、空间点和向量的坐标表示以及两个向量夹角的计算方法；考查运用向量研究空间图形的数学思想方法.

解：（I）由题意知 B（a，a，0），C（—a，a，0），D（—a，—a，0），E$(-\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{h}{2}),$

由此得 $\overrightarrow{BE}=(-\frac{3a}{2},-\frac{a}{2},\frac{h}{2}),\overrightarrow{DE}=(\frac{a}{2},\frac{3a}{2},\frac{h}{2}),$

$\therefore\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{DE}=(-\frac{3a}{2}\cdot\frac{a}{2})+(-\frac{a}{2}\cdot\frac{3a}{2})+\frac{h}{2}\cdot\frac{h}{2}=-\frac{3a^2}{2}+\frac{h^2}{4},$

$|\overrightarrow{BE}|=|\overrightarrow{DE}|=\sqrt{(-\frac{3a}{2})^2+(-\frac{a}{2})^2+(\frac{h}{2})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{10a^2+h^2}.$

由向量的数量积公式有

$$\cos<\overrightarrow{BE},\overrightarrow{DE}>=\frac{\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{DE}}{|\overrightarrow{BE}|\cdot|\overrightarrow{DE}|}=\frac{-\frac{3a^2}{2}+\frac{h^2}{4}}{\frac{1}{2}\sqrt{10a\backslash+2+h^2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{10a^2+h^2}}=\frac{-6a^2+h^2}{10a^2+h^2}.$$

（II）若∠BED 是二面角 α—VC—β 的平面角，则 $\overrightarrow{BE}\perp\overrightarrow{CV}$，即有 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CV}$=0.

又由 C（—a，a，0），V（0，0，h），有 $\overrightarrow{CV}=(a,-a,h)$ 且 $\overrightarrow{BE}=(-\frac{3a}{2},-\frac{a}{2},\frac{h}{2}),$

$\therefore\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CV}=-\frac{3a^2}{2}+\frac{a^2}{2}+\frac{h^2}{2}=0,$ 即 $h=\sqrt{2}a,$ 这时有

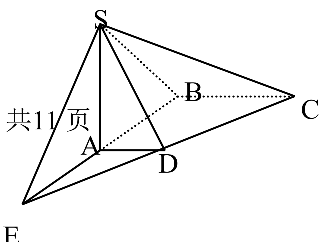
$$\cos<\overrightarrow{BE},\overrightarrow{DE}>=\frac{-6a^2+h^2}{10a^2+h^2}=\frac{-6a^2+(\sqrt{2}a)^2}{10a^2+(\sqrt{2}a)^2}=-\frac{1}{3}.$$

$$\therefore\angle BED=<\overrightarrow{BE},\overrightarrow{DE}>=\arccos(-\frac{1}{3})=\pi-\arccos\frac{1}{3}.$$

（20 乙）本小题主要考查线面关系和棱锥体积计算，以及空间想象能力和逻辑推理能力．满分 12 分.

解：（Ⅰ）直角梯形 ABCD 的面积是

$M_{底面}=\frac{1}{2}(BC+AD)\cdot AB=\frac{1+0.5}{2}\times1=\frac{3}{4},$



∴四棱锥S—ABCD的体积是

$$V=\frac{1}{3}\times SA\times M_{底面}$$

$$=\frac{1}{3}\times 1\times\frac{3}{4}$$

$$=\frac{1}{4}.$$

（Ⅱ）延长BA、CD相交于点E，连结SE，则SE是所求二面角的棱.

∵AD∥BC, BC=2AD,

∴EA=AB=SA, ∴SE⊥SB，

∴ SA⊥面ABCD，得面SEB⊥面EBC，EB是交线，又BC⊥EB，∴BC⊥面SEB，故SE是CS在面SEB上的射影，∴ CS⊥SE，所以∠BSC是所求二面角的平面角.

$\because SB=\sqrt{SA^2+AB^2}=\sqrt{2}, BC=1, BC\perp SB, \therefore \tan\angle BSC=\frac{BC}{SB}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

即所求二面角的正切值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

（21）本小题考查选择适当的坐标系建立曲线方程和解方程组等基础知识，考查应用所学积分知识、思想和方法解决实际问题的能力.

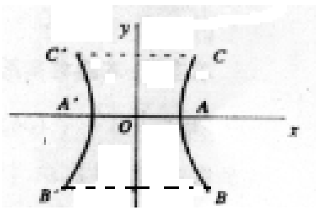
解：（I）如图建立直角坐标系xOy，AA′在x轴上，AA′的中点为坐标原点O，CC′与BB′平行于x轴.

设双曲线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，则$a=\frac{1}{2}AA'=7.$

又设B（11，y_1），C（9，y_2），因为点B、C在双曲线上，所以有

$\frac{11^2}{7^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1,$ ①

$\frac{9^2}{7^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1,$ ②



由题意知

$y_2-y_1=20.$ ③

由①、②、③得$y_1=-12, y_2=8, b=7\sqrt{2}.$

故双曲线方程为$\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{98}=1.$

（II）由双曲线方程得$x^2=\frac{1}{2}y^2+49.$

设冷却塔的容积为V（m³），则$V=\pi\int_{y_1}^{y_2}x^2dy=\pi\int_{-12}^{8}(\frac{1}{2}y^2+49)dy$

$=\pi(\frac{1}{6}y^3+49y)\Big|_{-12}^{8}$，经计算得$V\approx 4.25\times 10^3(m^3).$

答：冷却塔的容积为$4.25\times 10^3(m^3).$

（22）本小题主要考查坐标法、曲线的交点和三角函数性质等基础知识，以及逻辑推理能力和运算能力.

解：（I）两曲线的交点坐标（x，y）满足方程组

$$\begin{cases}x^2\sin\theta+y^2\cos\theta=1,\\ x^2\cos\theta-y^2\sin\theta=1,\end{cases}\text{即}\begin{cases}x^2=\sin\theta+\cos\theta,\\ y^2=\cos\theta-\sin\theta.\end{cases}$$

有 4 个不同交点等价于 $x^2>0,$ 且 $y^2>0,$ 即 $\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta>0,\\ \cos\theta-\sin\theta>0.\end{cases}$

又因为 $0<\theta<\frac{\pi}{2},$ 所以得 θ 的取值范围为（0，$\frac{\pi}{4}$).

（II）由（I）的推理知 4 个交点的坐标（x，y）满足方程

$x^2+y^2=2\cos\theta(0<\theta<\frac{\pi}{4}),$

即得 4 个交点共圆，该圆的圆心在原点，半径为 $r=\sqrt{2\cos\theta}(0<\theta<\frac{\pi}{4}).$

因为 $\cos\theta$ 在 $(0,\frac{\pi}{4})$ 上是减函数，所以由 $\cos 0=1,\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

知 r 的取值范围是 $(\sqrt[4]{2},\sqrt{2}).$