

2014年普通高等学校招生全国统一考试（广东卷）

数学（文科）试题及答案

本试卷共4页，21题，满分150分。考试用时120分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的姓名和考生号、试室号、座位号填写在答题卡上。用2B铅笔将试卷类型（A）填涂在答题卡相应位置上。将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
2. 选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡对应题目选项的答案信息点涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔盒涂改液。不按以上要求作答的答案无效。
4. 作答选做题时，请先用2B铅笔填涂选做题的题号对应的信息点，再作答。漏涂、错涂、多涂的，答案无效。
5. 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

参考公式：锥体的体积公式 $V = \frac{1}{3}Sh$ ，其中 S 为锥体的底面积， h 为锥体的高。

一组数据 x_1, x_2, \dots, x_n 的方差 $s^2 = \frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2]$ ，其中 \bar{x} 表示这组数据的平均数

一、选择题：本大题共10小题，每小题5分，满分50分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M = \{2, 3, 4\}$ ， $N = \{0, 2, 3, 5\}$ ，则 $M \cap N =$ ()

- A. $\{0, 2\}$ B. $\{2, 3\}$ C. $\{3, 4\}$ D. $\{3, 5\}$

2. 已知复数 z 满足 $(3 - 4i)z = 25$ ，则 $z =$ ()

- A. $-3 - 4i$ B. $-3 + 4i$ C. $3 - 4i$ D. $3 + 4i$

3. 已知向量 $\vec{a} = (1, 2)$ ， $\vec{b} = (3, 1)$ 则 $\vec{b} - \vec{a} =$ ()

- A. $(-2, 1)$ B. $(2, -1)$ C. $(2, 0)$ D. $(4, 3)$

4. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + 2y \leq 8 \\ 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 3 \end{cases}$ ，则 $z = 2x + y$ 的最大值等于 ()

- A. 7 B. 8 C. 10 D. 11

5. 下列函数为奇函数的是 ()

- A. $2^x - \frac{1}{2^x}$ B. $x^3 \sin x$ C. $2\cos x + 1$ D. $x^2 + 2^x$

6. 为了解1000名学生的学习情况，采用系统抽样的方法，从中抽取容量为40的样本，则分段的间隔为 ()

- A. 50 B. 40 C. 25 D. 20

7. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对应的边分别为 a, b, c , 则“ $a \leq b$ ”是“ $\sin A \leq \sin B$ ”的 ()

- A. 充分必要条件 B. 充分非必要条件 C. 必要非充分条件 D. 非充分非必要条件

8. 若实数 k 满足 $0 < k < 5$, 则曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{5-k} = 1$ 与曲线 $\frac{x^2}{16-k} - \frac{y^2}{5} = 1$ 的 ()

- A. 实半轴长相等 B. 虚半轴长相等 C. 离心率相等 D. 焦距相等

9. 若空间中四条两两不同的直线 l_1, l_2, l_3, l_4 , 满足 $l_1 \perp l_2, l_2 \parallel l_3, l_3 \perp l_4$, 则下列结论一定正确的是 ()

- A. $l_1 \perp l_4$ B. $l_1 \parallel l_4$ C. l_1 与 l_4 既不垂直也不平行 D. l_1 与 l_4 的位置关系不确定

10. 对任意复数 w_1, w_2 , 定义 $w_1 * w_2 = w_1 \overline{w_2}$, 其中 $\overline{w_2}$ 是 w_2 的共轭复数, 对任意复数 z_1, z_2, z_3 有如下四个命题:

① $(z_1 + z_2) * z_3 = (z_1 * z_3) + (z_2 * z_3)$; ② $z_1 * (z_2 + z_3) = (z_1 * z_2) + (z_1 * z_3)$;

③ $(z_1 * z_2) * z_3 = z_1 * (z_2 * z_3)$; ④ $z_1 * z_2 = z_2 * z_1$;

则真命题的个数是 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

二、填空题: 本大题共5小题, 考生作答4小题, 每小题5分, 满分20分。

(一) 必做题 (11-13题)

11. 曲线 $y = 5e^x + 3$ 在点 $(0, -2)$ 处的切线方程为_____.

12. 从字母 a, b, c, d, e 中任取两个不同字母, 则取字母 a 的概率为_____.

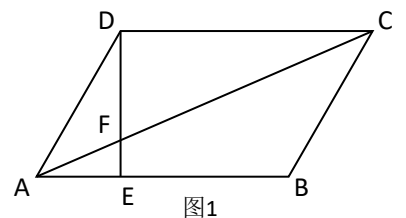
13. 等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 且 $a_1 a_5 = 4$, 则 $\log_2 a_1 + \log_2 a_2 + \log_2 a_3 + \log_2 a_4 + \log_2 a_5 =$ _____.

(二) 选做题 (14 - 15题, 考生只能从中选做一题)

14. (坐标系与参数方程选做题) 在极坐标系中, 曲线 C_1 和 C_2 的方程分别为 $2\rho \cos^2 \theta = \sin \theta$ 和 $\rho \cos \theta = 1$, 以极点为平面直角坐标系的原点, 极轴为 x 轴的正半轴, 建立直角坐标系, 则曲线 C_1 与 C_2 交点的直角坐标为_____.

15. (几何证明选讲选做题) 如图1, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 点 E 在 AB 上,

且 $EB = 2AE$, AC 与 DE 交于点 F , 则 $\frac{\triangle CDF \text{ 的周长}}{\triangle AEF \text{ 的周长}} =$ _____.



三. 解答题. 本大题共6小题, 满分80分. 解答需写出文字说明、证明过程和演算步骤。

16. (本小题满分12分)

已知函数 $f(x) = A \sin(x + \frac{\pi}{3})$, $x \in R$, 且 $f(\frac{5\pi}{12}) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

(1) 求 A 的值;

(2) 若 $f(\theta) + f(-\theta) = \sqrt{3}$, $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 求 $f(\frac{\pi}{6} - \theta)$.

17. (本小题满分13分)

某车间20名工人年龄数据如下表:

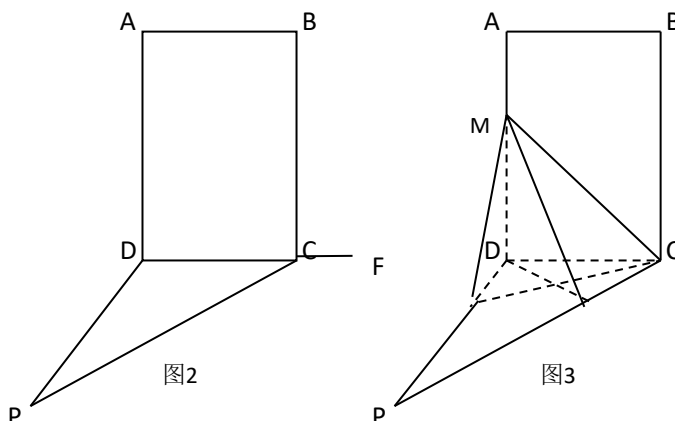
年龄(岁)	工人数(人)
19	1
28	3
29	3
30	5
31	4
32	3
40	1
合计	20

- (1) 求这20名工人年龄的众数与极差;
- (2) 以十位数为茎, 个位数为叶, 作出这20名工人年龄的茎叶图;
- (3) 求这20名工人年龄的方差. 学科网

18. (本小题满分13分)

如图2, 四边形ABCD为矩形, $PD \perp$ 平面ABCD, $AB=1, BC=PC=2$, 作如图3折叠, 折痕 $EF \parallel DC$. 其中点E, F分别在线段PD, PC上, 沿EF折叠后点P在线段AD上的点记为M, 并且 $MF \perp CF$.

- (1) 证明: $CF \perp$ 平面MDF
- (2) 求三棱锥M-CDE的体积.



19. (本小题满分14分)

设各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 S_n 满足 $S_n^2 - (n^2 + n - 3)S_n - 3(n^2 + n) = 0, n \in N^*$.

(1) 求 a_1 的值；

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(3) 证明：对一切正整数 n ，有 $\frac{1}{a_1(a_1+1)} + \frac{1}{a_2(a_2+1)} + \cdots + \frac{1}{a_n(a_n+1)} < \frac{1}{3}$.

20. (本小题满分14分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个焦点为 $(\sqrt{5}, 0)$ ，离心率 $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ，且椭圆 C 上的点到 $Q(0, 2)$ 的距离的最大值为 3.

(1) 求椭圆 C 的标准方程；

(2) 若动点 $P(x_0, y_0)$ 为椭圆 C 外一点，且点 P 到椭圆 C 的两条切线相互垂直，求点 P 的轨迹方程。

21. (本小题满分14分)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + ax + 1 (a \in R)$

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 当 $a < 0$ 时，试讨论是否存在 $x_0 \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$ ，使得 $f(x_0) = f(\frac{1}{2})$

2014年广东高考数学文科参考答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
选项	B	D	B	C	A	C	A	D	D	B

二、填空题

11. $5x+y+2=0$ 12. $\frac{2}{5}$ 13. 5 14. (1, 2) 15. 3

三、解答题

16. (1)

$$\because f(x) = A \sin(x + \frac{\pi}{3}), \text{ 且 } f(\frac{5\pi}{12}) = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

$$\therefore f(\frac{5\pi}{12}) = A \sin(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{3}) = A \sin \frac{3\pi}{4} = A \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

$$\therefore A = 3.$$

(2)

$$\because f(x) = 3 \sin(x + \frac{\pi}{3}), \text{ 且 } f(\theta) - f(-\theta) = \sqrt{3}.$$

$$\therefore f(\theta) - f(-\theta) = 3 \sin(\theta + \frac{\pi}{3}) - 3 \sin(-\theta + \frac{\pi}{3})$$

$$= 3 \left[\left(\sin \theta \cos \frac{\pi}{3} + \cos \theta \sin \frac{\pi}{3} \right) - \left(\sin \frac{\pi}{3} \cos \theta - \cos \frac{\pi}{3} \sin \theta \right) \right]$$

$$= 3 \cdot 2 \sin \theta \cos \frac{\pi}{3} = 3 \sin \theta = \sqrt{3}.$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 且 } \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$$\therefore \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$\therefore f(\frac{\pi}{6} - \theta) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{6} - \theta + \frac{\pi}{3}\right) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 3 \cos \theta = \sqrt{6}$$

17. 解: (1) 由图可知, 众数为 30. 极差为: $40-19=21$.

1	9
2	8 8 8 9 9 9
3	0 0 0 0 1 1 1 1 2 2 2

(2) 根据表格可得:

$$\bar{x} = \frac{19 + 28 \times 3 + 29 \times 3 + 30 \times 5 + 31 \times 4 + 32 \times 3 + 40}{20} = 30$$

$$\begin{aligned} \therefore s^2 &= \frac{1}{20} \left[(19-30)^2 + 3(28-30)^2 + 3(29-30)^2 + 5(30-30)^2 + 4(31-30)^2 + (41-30)^2 \right] \\ &= 13.05 \end{aligned}$$

18.解: 证明: (1)

$\because PD \perp \text{面}ABCD, \text{且} PD \subseteq \text{面}PCD.$
 $\therefore \text{面}PCD \perp \text{面}ABCD, \text{交线为} CD.$
又 \because 四边形 $ABCD$ 为矩形, $AD \perp CD, AD \subseteq \text{面}ABCD$
 $\therefore MD \perp \text{面}PCD, \text{又由于} CF \subseteq \text{面}PCD$
 $\therefore MD \perp CF.$
 $\because MF \perp CF, \text{且} MD \cap MF = M$
 $\therefore CF \perp \text{面}MDF$

解:
(2)

$\because MD \perp \text{面}PCD$
 $\therefore V_{M-CDE} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle CDE} \cdot MD.$
 $\because CF \perp \text{面}MDF, DF \subseteq \text{面}MDF.$
 $\therefore CF \perp DF$
 \because 在 $RT\triangle PCD$ 中, $CD = 1, PC = 2$
 $\therefore \angle PCD = 60^\circ, \text{且} CD = 1$
 $\therefore CF = \frac{1}{2}, \text{故} PF = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$
 $\therefore MF = \frac{3}{2}.$

19.解: (1) 由

又 $\because CF \perp MF, \text{故利用勾股定理得: } CM = \frac{\sqrt{10}}{2}$
 \therefore 在 $RT\triangle MDC$ 中, $CM = \frac{\sqrt{10}}{2}, CD = 1, \text{得} DM = \frac{\sqrt{6}}{2}.$
又 $\because F$ 点位于 CP 的三分点, 且 $PD = \sqrt{3}$
 $\therefore E$ 为 PD 的三分点, 故 $DE = \frac{\sqrt{3}}{4}.$
 $\therefore S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2} CD \cdot DE = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{8}.$
 $\therefore V_{M-CDE} = \frac{1}{3} S_{\triangle CDE} DM = \frac{\sqrt{2}}{16}.$

$$S_n^2 - (n^2 + n - 3)S_n - 3(n^2 + n) = 0, n \in N^*, \text{ 令 } n=1, \text{ 得 } S_1^2 - (-1)S_1 - 6 = 0,$$

即 $a_1^2 + a_1 - 6 = 0$. 解得 $a_1 = 2$ 或 $a_1 = -3$, 由于数列 $\{a_n\}$ 为正项数列, 所以 $a_1 = 2$;

$$(2) \text{ 由 } S_n^2 - (n^2 + n - 3)S_n - 3(n^2 + n) = 0, n \in N^*, \text{ 因式分解得 } (S_n + 3)(S_n - n^2 - 2n) = 0$$

由数列 $\{a_n\}$ 为正项数列可得 $S_n - n^2 - 2n = 0$, 即 $S_n = n^2 + 2n$, 当 $n \geq 2$ 时,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 + 2n - [(n-1)^2 + 2(n-1)] = 2n, \text{ 由 } a_1 = 2 \text{ 可得, } \forall n \in N^*, a_n = 2n$$

(3) 由(2)可知 $\frac{1}{a_n(a_n+1)} = \frac{1}{2n(2n+1)}$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \frac{1}{a_n(a_n+1)} = \frac{1}{2n(2n+1)} < \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

当 $n=1$ 时, 显然有 $\frac{1}{a_1(a_1+1)} = \frac{1}{6} < \frac{1}{3}$;

$$\begin{aligned} \text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } & \frac{1}{a_1(a_1+1)} + \frac{1}{a_2(a_2+1)} + \cdots + \frac{1}{a_n(a_n+1)} \\ & < \frac{1}{2 \cdot (2+1)} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{3} \end{aligned}$$

所以, 对一切正整数 n , 有 $\frac{1}{a_1(a_1+1)} + \frac{1}{a_2(a_2+1)} + \cdots + \frac{1}{a_n(a_n+1)} < \frac{1}{3}$.

$$\text{由 } c = \sqrt{5}, e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3} \text{ 得: } a = 3, b = 2.$$

20.解: (1) 椭圆方程为: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

设两个切点分别为 A 、 B

(2) ①当两条切线中有一条斜率不存在时, 即 A 、 B 两点分别位于椭圆长轴与短轴的端点, P 点坐标为 $(\pm 3, \pm 2)$

②当两条切线斜率均存在时,

设椭圆切线斜率为 k , 过点 P 的椭圆切线方程为 $y - y_0 = k(x - x_0)$

$$\text{联立 } \begin{cases} y - y_0 = k(x - x_0) \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}, \text{ 得}$$

$$(9k^2 + 4)x^2 + (18ky_0 - 18k^2x_0)x + 9k^2x_0^2 - 18kx_0y_0 + 9y_0^2 - 36 = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow 9k^2 + 4 = (kx_0 - y_0)^2 \Rightarrow (x_0^2 - 9)k^2 - 2x_0y_0k + y_0^2 - 4 = 0$$

$$\text{设 } PA、PB \text{ 斜率分别为 } k_1、k_2, \text{ 则 } k_1 \cdot k_2 = \frac{y_0^2 - 4}{x_0^2 - 9}$$

$$\text{又 } PA、PB \text{ 互相垂直, } \therefore k_1 \cdot k_2 = \frac{y_0^2 - 4}{x_0^2 - 9} = -1$$

$$\text{化简得 } x_0^2 + y_0^2 = 13 (x_0 \neq \pm 3)$$

$$\text{又 } \because P(\pm 3, \pm 2) \text{ 在 } x_0^2 + y_0^2 = 13 \text{ 上}$$

\therefore 点 P 在圆 $x^2 + y^2 = 13$ 上.

21.解: (1) 由 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + ax + 1$, 求导得 $f'(x) = x^2 + 2x + a$, 令 $f'(x) = 0$

即 $x^2 + 2x + a = 0$, $\Delta = 4 - 4a$,

① 当 $\Delta \leq 0$, 即 $a \geq 1$ 时, $f'(x) \geq 0$ 恒成立, $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上单调递增;

② 当 $\Delta > 0$, 即 $a < 1$ 时, 方程 $x^2 + 2x + a = 0$ 的两根分别为:

$$x_1 = -1 + \sqrt{1-a}, \quad x_2 = -1 - \sqrt{1-a},$$

当 $x \in (-\infty, -1 - \sqrt{1-a})$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

当 $x \in (-1 - \sqrt{1-a}, -1 + \sqrt{1-a})$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (-1 + \sqrt{1-a}, +\infty)$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增。

(1) 当 $a < 0$ 时, 由 (1), 令 $x_1 = -1 + \sqrt{1-a} = 1$, 解得 $a = -3$.

① 当 $a < -3$ 时, $1 < -1 + \sqrt{1-a}$, 由 (1) 的讨论可知 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 止

$$x_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right), \text{ 使得 } f(x_0) = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

② 当 $-3 < a < 0$ 时, $1 > -1 + \sqrt{1-a}$, $f(x)$ 在 $(0, -1 + \sqrt{1-a})$ 递减, 在 $(-1 + \sqrt{1-a}$

$$f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}a + \frac{25}{24}, \text{ 依题意, 要 } f(x) \text{ 存在 } x_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right), \text{ 使得 } f(x_0)$$

只需 $f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}a + \frac{25}{24} > 0$, 解得 $a > -\frac{25}{12}$, 于是有 $-\frac{25}{12} < a < 0$ 即为所求。