

[总评]本套试题考查的比较到位，覆盖面广泛，试题从易到难梯度变化明显，在考查基础知识、基本方法、基本思想的同时又考查考生分析问题、解决问题的能力，考查推理论证能力、逻辑思维能力、空间想象能力、必然与或然的能力、运算能力，能够体现高考的特质；试题有既保留了以往传统的模式，又有创新变化的部分，创新部分题目综合性强、跨度大、对能力的要求较高.其中选择填空题注重基础知识、基本技能的考查，同时不失灵活性；解答题部分加大了对数学思想、数学方法和技能技巧的考查力度.比如第 16 题在求数列通项时化简转化的技巧、第 18 题是平面向量与概率的综合问题，在随机事件的列举方面体现了考查将两大知识体系相互融合的能力.后两道压轴题在综合能力考查方面又有所提升.

2013 年普通高等学校招生全国统一考试（江西卷）

文科数学真题解析

陕西省宝鸡市金台高中 晁群彦

一. 选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的

1. 若数 $z = i(-2 - i)$ (i 为虚数单位) 在复平面内所对应的点在

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

[答案]D

[解析] $\because z = -2i - i^2 = 1 - 2i$, \therefore 点 Z 的坐标为 $(1, -2)$, 因此选 D.

[学科网考点定位] 本题考查复数的概念、运算、复数与复平面内点的对应关系等基础知识，考查分析判断能力.

2. 若集合 $A = \{x \in R \mid ax^2 + ax + 1\}$ 中只有一个元素，则 $a = (\quad)$

- A. 4 B. 2 C. 0 D. 0 或 4

[答案]A

[解析] \because 集合 A 中只有一个元素, $\therefore \Delta = a^2 - 4a = 0$, $\therefore a = 0$ 或 4 . 又当 $a = 0$ 时集合 A 中无元素, 故选 A.

[学科网考点定位] 该题主要考查集合的概念、集合的表示以及集合与一元二次方程的联系.

3. 若 $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\cos \alpha =$ ()

- A. $-\frac{2}{3}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

[答案]C

[解析] $\because \cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - 2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$... 选C.

[学科网考点定位]此题主要考查三角恒等变换里面的二倍角余弦公式、三角函数求值问题.

4. 若集合 $A = \{2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, 从 A, B 中各任意取一个数, 则这两数之和等于 4 的概率是

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{6}$

[答案]C

[解析] \because 从集合 A, B 中各任取一数所有结果为 (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3) 共 6 种, 其中两数和为 4 的有 2 种, 因此所求概率为 $P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ 选 C.

[学科网考点定位]本题主要考查古典概型的概率的概念和运算, 考查分析问题、解决问题的能力.

5. 总体由编号 01, , 02, ..., 19, 20 的 20 个个体组成. 利用下面的随机数表选取 5 个个体, 选取方法是随机数表第 1 行的第 5 列和第 6 列数字开始由左到右依次选取两个数字, 则选出来的第 5 个个体的编号为

7816	6572	0802	6314	0702	4369	9728	0198
3204	9234	4935	8200	3623	4869	6938	7481

- A. 08 B. 07 C. 02 D. 01

[答案]D

[解析]从第一行的第 5 列和第 6 列起由左向右读数划去大于 20 的数分别为：08, 02, 14, 07, 01，所以第 5 个个体是 01，选 D.

[学科网考点定位]此题主要考查抽样方法的概念、抽样方法中随机数表法，考查学习能力和运用能力.

6. 下列选项中，使 $x < \frac{1}{x} < x^2$ 成立的 x 的取值范围是 ()

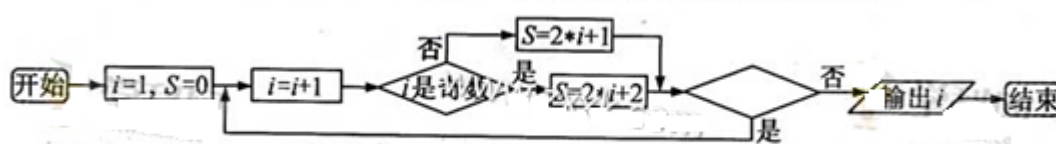
- A. $(-\infty, -1)$ B. $(-1, 0)$ C. $(0, 1)$ D. $(1, +\infty)$

[答案]A

[解析] ∵ 原不等式可化为 $\begin{cases} x < \frac{1}{x} \\ \frac{1}{x} < x^2 \end{cases}$ ∴ $\begin{cases} \frac{(x+1)(x-1)}{x} < 0 \\ \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x} > 0 \end{cases}$ ∴ $\begin{cases} x < -1, \text{或} 0 < x < 1 \\ x > 1, \text{或} x < 0 \end{cases}$ ∴ $x < -1$. 故选 A.

[学科网考点定位]该题主要考查不等式的解法，不等式的性质以及计算能力.

7. 阅读如下程序框图，如果输出 $i = 4$ ，那么空白的判断框中应填入的条件是



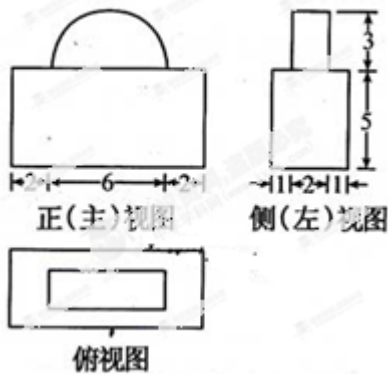
- A. $S < 8$ B. $S < 9$ C. $S < 10$ D. $S < 11$

[答案]B

[解析]由程序框图知前 3 次运算结果：1. $i = 2, s = 5$; 2. $i = 3, s = 8$; 3. $i = 4, s = 9$. 因此终止条件为 $s < 9$ ，故选 B.

[学科网考点定位]本题主要考查算法的基本思想、算法的结构和功能，考查抽象思维能力和逻辑推理能力.

8. 一几何体的三视图如右图所示，则该几何体的体积为 ()



- A. $200+9\pi$ B. $200+18\pi$ C. $140+9\pi$ D. $140+18\pi$

[答案]A

[解析]由三视图知该几何体的体积为 $V = \frac{1}{2} \times \pi \times 3^2 \times 2 + 10 \times 4 \times 5 = 200 + 9\pi$. 故选 A.

[学科网考点定位]本题主要考查空间几何体的三视图、直观图、体积的计算.

9. 已知点 $A(2,0)$, 抛物线 $C: x^2 = 4y$ 的焦点 F . 射线 FA 与抛物线 C 相交于点 M , 与其准线相交于点 N , 则 $|FM|:|MN| = (\quad)$

- A. $2:\sqrt{5}$ B. $1:2$ C. $1:\sqrt{5}$ D. $1:3$

9. 已知点 $A(2,0)$, 抛物线 $C: x^2 = 4y$ 的焦点 F . 射线 FA 与抛物线 C 相交于点 M , 与其准线相交于点 N , 则 $|FM|:|MN| = (\quad)$

- A. $2:\sqrt{5}$ B. $1:2$ C. $1:\sqrt{5}$ D. $1:3$

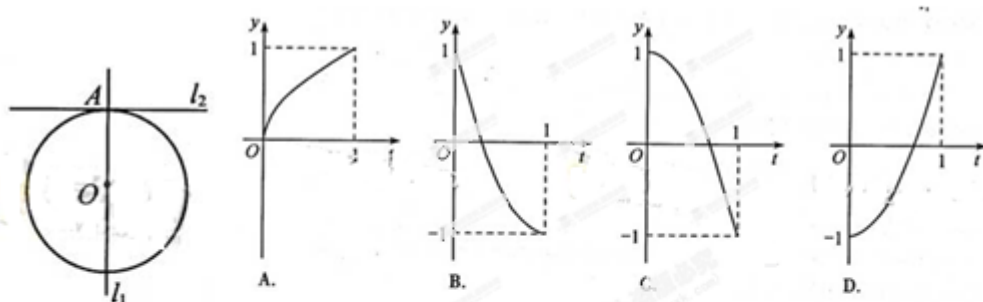
[答案]C

[解析] $\because |FA| = |AN| = \sqrt{5}$, 则 $\frac{MN}{FN} = \frac{FM}{FN}$, $\therefore MN = 2\sqrt{5} - FM, FN = 2\sqrt{5}, \therefore FM = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$,
 $MN = \frac{5\sqrt{5} - 5}{2}, \therefore |FM|:|MN| = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} : \frac{5\sqrt{5} - 5}{2} = 1:\sqrt{5}$ 故选 C.

[学科网考点定位]本题主要考查抛物线的概念、标准方程、直线与抛物线相交的基础知识, 考查几何能力.

10. 如图, 已知 $l_1 \perp l_2$, 圆心在 l_1 上, 半径为 1cm 的圆 O 在 $t=0$ 时与 l_2 相切于点 A , 圆 O 沿 l_1 以 1m/s 的速度匀速向上移动, 圆被直线 l_2 所截上方圆弧长记为 x , 令 $y = \cos x$, 则

y 与时间 $t(0 < t < 1, \text{单位: s})$ 的函数 $y = f(t)$ 的图像大致为 ()



[答案] B

[解析] 因为 t 时刻时圆心角 $\alpha = x$ ，所以在弦心距、半径和弦长一半围成的直角三角形中 $\cos \frac{x}{2} = \frac{t}{1}$ ， $\therefore y = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = 2t^2 - 1, \because 0 \leq t \leq 1, \therefore$ 选项 B 正确。

[学科网考点定位] 本题综合考查函数、三角函数的实际应用，考查数学能力和素养。

二. 填空题

11. 若曲线 $y = x^\alpha (\alpha \in \mathbb{R})$ 在点 $(1, 2)$ 处的切线经过坐标原点，则 $\alpha =$

[答案] $\alpha = 2$

[解析] $\because y = x^\alpha (\alpha \in \mathbb{R}), \therefore y' = \alpha x^{\alpha-1}, \therefore k = y'|_{x=1} = \alpha, \therefore$ 切线 $y - 2 = \alpha(x - 1)$ 过原点， $\therefore \alpha = 2$.

【学科网考点定位】 此题考查导数的几何意义，函数与导数，导数的应用，考查运算能力。

12. 某住宅小区计划植树不少于 100 棵，若第一天植 2 棵，以后每天植树的棵树是前一天的 2 倍，则需要的最少天数 $n(n \in \mathbb{N}_+)$ 等于_____。

[答案] 6

[解析]

依题意该小区每天所植树棵树成等比数列， $\therefore \frac{2 \times (1 - 2^n)}{1 - 2} \geq 100, \therefore 2^n \geq 51, \therefore n > 5, n$ 最小 = 6.

【学科网考点定位】 本题主要考查等比数列的概念、前 n 项和及其应用。

13. 设 $f(x) = \sqrt{3} \sin 3x + \cos 3x$ ，若对任意实数 x 都有 $|f(x)| \leq a$ ，则实数 a 的取值范围是_____。

[答案] $a \geq 2$

[解析] $\because f(x) = 2\sin(3x + \frac{\pi}{6})$, $\therefore |f(x)| = 2|\sin(3x + \frac{\pi}{6})|$, $\therefore \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq 2$, $\therefore a \geq 2$.

【学科网考点定位】此题主要考查三角函数的最值、最值问题的应用（恒成立问题），考查分析问题和解决问题的能力。

14. 若圆 C 经过坐标原点和点 (4, 0)，且与直线 $y=1$ 相切，则圆 C 的方程是

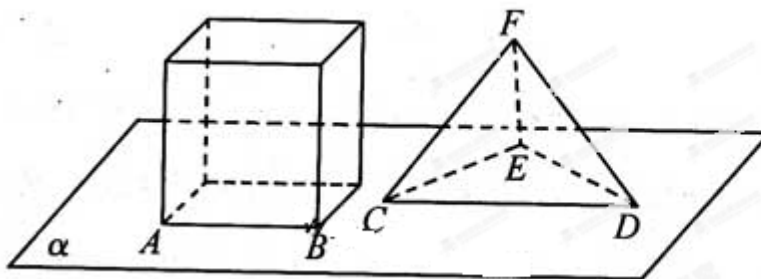
[答案] $(x-2)^2 + (y + \frac{3}{2})^2 = \frac{25}{4}$.

[解析] 由题意得圆心坐标为 $(2, y)$ ，半径 $r=1-y$ ，则有 $(1-y)^2 = 2^2 + y^2$, $\therefore y = -\frac{3}{2}$, $\therefore r = \frac{5}{2}$.

则圆 C 的方程是 $(x-2)^2 + (y + \frac{3}{2})^2 = \frac{25}{4}$.

【学科网考点定位】该题主要考查圆和圆的方程、直线和圆的位置关系以及应用。

15. 如图，正方体的底面与正四面体的底面在同一平面 α 上，且 $AB \parallel CD$ ，则直线 EF 与正方体的六个面所在的平面相交的平面个数为_____.



[答案] 4

[解析] 因为过 EF 做垂直于 CD (AB) 的平面 α 垂直平分 CD，所以该平面与过 AB 中点并与 AB 垂直的平面 β 平行，平面 β 和正方体的 4 个侧面相交，由于 EF 和正方体的侧棱不平行，所以它与正方体的六个面所在的平面相交的平面个数为 4.

【学科网考点定位】该题主要考查空间点、线、面的位置关系，考查空间直线与平面的平行与相交，考查空间想象能力和逻辑思维能力。

三. 解答题

16. 正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n^2 - (2n-1)a_n - 2n = 0$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 通项公式 a_n .

(2) 令 $b_n = \frac{1}{(n+1)a_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 前 n 项的和 T_n .

【答案】 (1) $a_n = 2n$ (2) $T_n = \frac{n}{2(n+1)}$

【解析】 (1) $\because a_n^2 - (2n-1)a_n - 2n = 0, \therefore (a_n - 2n)(a_n + 1) = 0, \because a_n > 0, \therefore a_n = 2n$.

(2) 将 (1) 代入得:

$$b_n = \frac{1}{(n+1) \cdot 2n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right), \therefore T_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{n}{2(n+1)}.$$

【学科网考点定位】 本题主要考查数列的概念、通项公式、前 n 项和, 考查逻辑思维能力.

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 已知 $\sin A \sin B + \sin B \sin C + \cos 2B = 1$.

(1) 求证: a, b, c 成等差数列;

(2) 若 $C = \frac{2}{3}\pi$, 求 $\frac{a}{b}$ 的值.

【答案】 (1) 等差; (2) $\frac{3}{5}$

【解析】 由正弦定理化角为边, 化简后确定 a, b, c 的大小关系.

$\because \sin B(\sin A + \sin C) + 1 - 2\sin^2 B = 1, \therefore \sin B(\sin A + \sin C - 2\sin B) = 0, \therefore \sin A + \sin C - 2\sin B = 0$,
由正弦定理得: $a + c - 2b = 0$, 即 $a + c = 2b, \therefore a, b, c$ 成等差数列.

(2) 在三角形 ABC 中由余弦定理得: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \frac{2\pi}{3}, \therefore (2b - a)^2 = a^2 + b^2 + ab$.

展开化简得: $3b^2 = 5ab, \therefore \frac{a}{b} = \frac{3}{5}$. 通过余弦定理确定了边长的大小关系, 化简后求值.

【学科网考点定位】 本题主要考查三角函数的化简、求值, 解三角形, 考查推理论证能力、计算能力等.

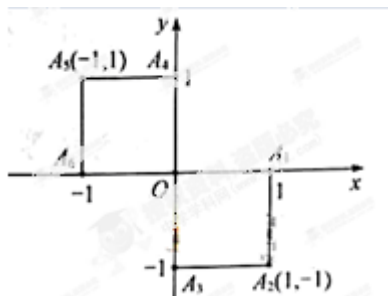
18. (本小题满分 12 分)

小波以游戏方式决定是去打球、唱歌还是去下棋。游戏规则为: 以 0 为起点, 再从

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ (如图) 这六个点中任取两点分别为终点得到两个向量, 记这两个向

量的数量积为 X ，若 $X > 0$ 就去打球，若 $X = 0$ 就去唱歌，若 $X < 0$ 就去下棋。

- (1) 写出数量积 X 的所有可能值；
- (2) 分别求小波去下棋的概率和不去唱歌的概率。



[答案] (1) $-2, -1, 0, 1$; (2) $\frac{7}{15}, \frac{11}{15}$

[解析] (1) 依题意有

$\overrightarrow{OA_1} = (1, 0), \overrightarrow{OA_2} = (1, -1), \overrightarrow{OA_3} = (0, -1), \overrightarrow{OA_4} = (0, 1), \overrightarrow{OA_5} = (-1, 1), \overrightarrow{OA_6} = (-1, 0)$,
 $\therefore \overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OA_2} \cdot \overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{OA_4} \cdot \overrightarrow{OA_5} = \overrightarrow{OA_5} \cdot \overrightarrow{OA_6} = 1$ (4个), $\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OA_3} = \dots = \overrightarrow{OA_5} \cdot \overrightarrow{OA_6} = -1$ (6个),
 $\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OA_5} = \dots = \overrightarrow{OA_2} \cdot \overrightarrow{OA_6} = -2$ (1个), $\therefore X = -2, -1, 0, 1$.

(2) 由 (1) 知基本事件有 15 种，小波下棋有 7 种，所以其的概率为 $\frac{7}{15}$. 不唱歌的概率为

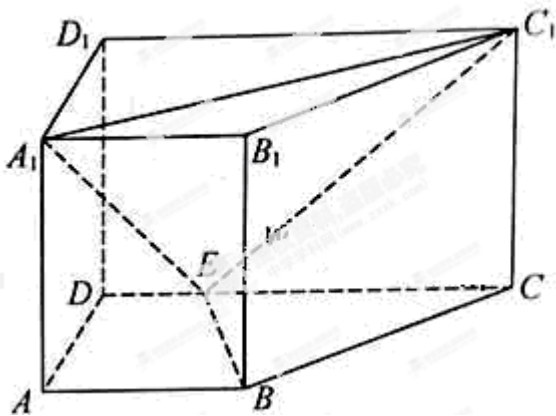
$P = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{4}{15} = \frac{11}{15}$. 把平面向量和概率综合在一起增加了解题的难度，所以通过计算向量的数量积，列举随机变量 X 的取值不能够轻视，同时计算相应取值的概率也是值得细心去做的。

[学科网考点定位] 本题主要考查互斥事件、互斥事件的概率、对立事件的概率，考查平面向量的概念和运算等基础知识和方法；考查综合分析、综合运用能力和计算能力。

19. (本小题满分 12 分)

如图，直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB \parallel CD$ ， $AD \perp AB$ ， $AB = 2$ ， $AD = \sqrt{2}$ ，

$AA_1 = 3$ ，E 为 CD 上一点， $DE = 1$ ， $EC = 3$



- (1) 证明： $BE \perp$ 平面 BB_1C_1C ；
- (2) 求点 B_1 到平面 EA_1C_1 的距离。

【答案】 (2) $\frac{\sqrt{10}}{5}$

【解析】 (1) 在直角梯形 $ABCD$ 中，先用勾股定理的逆定理计算并证明边的垂直关系，再用线面垂直的判定证明结果成立。

$$\because BE^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2 = 3, \quad BC^2 = (\sqrt{2})^2 + (3-1)^2 = 6, \quad \therefore EC = 3 \therefore EC^2 = BE^2 + BC^2, \\ \therefore BE \perp BC, \text{ 又 } \because BE \perp BB_1, \quad BB_1 \cap BC = B, \therefore BE \perp \text{平面 } BB_1C_1C.$$

(2) 分别在直角三角形 AA_1E , ECC_1 , $A_1D_1C_1$ 中得

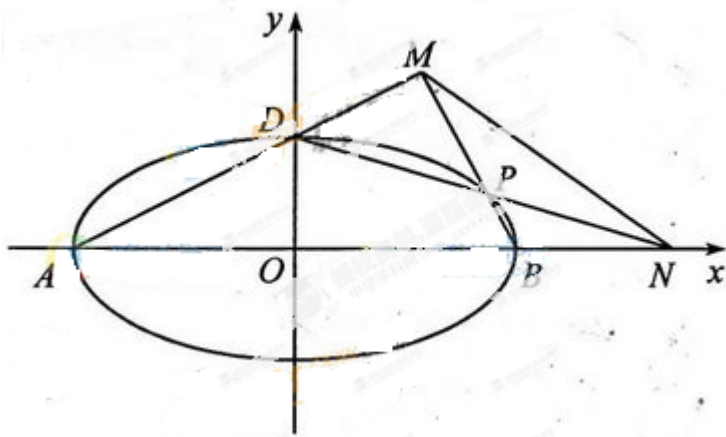
$$A_1E = 2\sqrt{3}, \quad EC_1 = A_1C_1 = 3\sqrt{2}, \therefore S_{\triangle A_1EC_1} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{15} = \sqrt{45}, \quad S_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{2} = \sqrt{2}, \\ \therefore V_{B_1-A_1EC_1} = V_{E-A_1B_1C_1}, \therefore \sqrt{45}h = \sqrt{2} \times 3, \therefore h = \frac{\sqrt{10}}{5} \text{ 即所求距离为 } \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

点到平面的距离在不能直接作出垂线的情况下，一般都是由等体积转化的方法解决的，本题也不例外。其中要注意已知条件下底面积和高的计算。

【学科网考点定位】 该题主要考查空间平行关系和垂直关系的概念、定理、点到平面的距离等基础知识，考查空间想象能力、推理论证能力、逻辑思维能力和计算能力。

20. (本小题满分 13 分)

椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $a + b = 3$.



(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 如图, A, B, D 是椭圆 C 的顶点, P 是椭圆 C 上除顶点外的任意一点, 直线 DP 交 x 轴于点 N , 直线 AD 交 BP 于点 M . 设 BP 的斜率为 k , MN 的斜率为 m . 证明: $2m - k$ 为定值.

【答案】 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

【解析】 (1) $\because e = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \therefore a^2 = 4b^2, a = 2b, \therefore a + b = 3, \therefore b = 1, a = 2, \therefore \frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$

(2) 由 (1) 知 $A(-2, 0), B(2, 0), D(0, 1)$, 则直线 AD 方程为: $x - 2y + 2 = 0$; 直线 BP

方程: $y = k(x - 2)$, 联立得 $\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ y = k(x - 2) \end{cases} \therefore \begin{cases} x = \frac{4k + 2}{2k - 1} \\ y = \frac{4k}{2k - 1} \end{cases} \therefore M(\frac{4k + 2}{2k - 1}, \frac{4k}{2k - 1})$. 直线 BP $y = k(x - 2)$ 和

椭圆联立方程组解得 P 点坐标为 $P(\frac{8k^2 - 2}{4k^2 + 1}, -\frac{4k}{4k^2 + 1})$, 因为 $D, N(x, 0), P$ 三点共线, 所以

有:

$$\frac{-\frac{4k}{4k^2+1}-1}{\frac{8k^2-2}{4k^2+1}} = \frac{0-1}{x-0}, \therefore MN \text{ 的斜率 } m = \frac{\frac{4k}{2k-1}-0}{\frac{4k+2}{2k-1}-\frac{4k-2}{2k+1}} = \frac{4k(2k+1)}{2(2k+1)^2-2(2k-1)^2} = \frac{2k+1}{4}.$$

$$\therefore 2m - k = \frac{2k+1}{2} - k = \frac{1}{2} \text{ (定值).}$$

先通过联立方程组求点的坐标，再计算斜率，化简后得到定值，其中三点共线是关键。本解法适用于一般的直线和圆锥曲线的关系问题。

【学科网考点定位】 本题考查椭圆的标准方程、简单的几何性质，考查直线和椭圆相交问题，定值问题，考查综合解决问题的能力。

21. (本小题满分 14 分)

$$\text{设函数 } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}x, & 0 \leq x \leq a. \\ \frac{1}{1-a}(1-x), & a < x \leq 1. \end{cases} \quad a \text{ 为常数且 } a \in (0, 1)$$

(1) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时，求 $f(f(\frac{1}{3}))$ ；

(2) 若 x_0 满足 $f(f(x_0)) = x_0$ ，但 $f(x) \neq 0$ ，则称 x_0 为 $f(x)$ 的二阶周期点。证明函数 $f(x)$

有且仅有两个二阶周期点，并求二阶周期点 x_1, x_2 ；

(3) 对于 (2) 中的 x_1, x_2 ，设 $A(x_1, f(f(x_1))), B(x_2, f(f(x_2))), C(a^2, 0)$ ，记 $\triangle ABC$ 的面积

为 $S(a)$ ，求 $S(a)$ 在区间 $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ 上的最大值和最小值。

【答案】 (1) $\frac{2}{3}$ (3)

【解析】 (1) \because 当 $a = \frac{1}{2}$ 时， $f(\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$ ， $\therefore f(f(\frac{1}{3})) = f(\frac{2}{3}) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \times (1 - \frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$ 。

$$(2) f(f(x)) = \begin{cases} \frac{1}{a^2}x, & 0 \leq x \leq a^2 \\ \frac{1}{a(1-a)}(a-x), & a^2 < x \leq a \\ \frac{1}{(1-a)^2}(x-a), & a < x < a^2 - a + 1 \\ \frac{1}{a(1-a)}(1-x), & a^2 - a + 1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

当 $0 \leq x \leq a^2$ 时, 由 $\frac{1}{a^2}x = x$ 得 $x = 0$. $\therefore f(0) = 0$, $\therefore x = 0$ 不是 $f(x)$ 的二阶周期点.

当 $a^2 < x \leq a$ 时, 由 $\frac{1}{a(1-a)}(a-x) = x$, $\therefore x = \frac{a}{-a^2+a+1} \in (a^2, a)$,

$$\therefore f\left(\frac{a}{-a^2+a+1}\right) = \frac{1}{a} \cdot \frac{a}{-a^2+a+1} = \frac{1}{-a^2+a+1} \neq \frac{a}{-a^2+a+1}$$

$\therefore x = \frac{a}{-a^2+a+1}$ 为 $f(x)$ 的二阶周期点.

当 $a < x < a^2 - a + 1$ 时, 由 $\frac{1}{(1-a)^2}(x-a) = x$ 得 $x = \frac{1}{2-a} \in (a, a^2 - a + 1)$,

$$\therefore f\left(\frac{1}{2-a}\right) = \frac{1}{1-a} \left(1 - \frac{1}{2-a}\right) = \frac{1}{2-a}, \therefore x = \frac{1}{2-a} \text{ 不是二阶周期点.}$$

当 $a^2 - a + 1 \leq x \leq 1$ 时, 由 $\frac{1}{a(1-a)}(1-x) = x$ 得 $x = \frac{1}{-a^2+a+1}$, $f\left(\frac{1}{-a^2+a+1}\right) = \frac{a}{-a^2+a+1} \neq \frac{1}{-a^2+a+1}$,

$\therefore x = \frac{1}{-a^2+a+1}$ 是 $f(x)$ 的二阶周期点.

因此 $f(x)$ 的二阶周期点有两个: $x = \frac{a}{-a^2+a+1}$, $x = \frac{1}{-a^2+a+1}$.

(3) 由 (2) 得 $A\left(\frac{a}{-a^2+a+1}, \frac{a}{-a^2+a+1}\right)$, $B\left(\frac{1}{-a^2+a+1}, \frac{1}{-a^2+a+1}\right)$,

$$\text{则 } S(a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2(1-a)}{-a^2+a+1}, S'(a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a(a^3-2a^2-2a+2)}{(-a^2+a+1)^2},$$

$$\because a \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right], \therefore a^2+a < 1, \therefore S'(a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a(a^3-2a^2-2a+2)}{(-a^2+a+1)^2} =$$

$$S'(a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a[(a+1)(a-1)^2 + (1-a^2-a)]}{(-a^2+a+1)^2} > 0.$$

【学科网考点定位】此题考查分段函数的概念、求值，考查理解能力和运用能力、考查运用能力以及函数与导数等数学能力.