

2018年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标Ⅲ）

参考答案与试题解析

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. （5分）已知集合 $A = \{x | x - 1 \geq 0\}$ ， $B = \{0, 1, 2\}$ ，则 $A \cap B =$ （ ）
- A. $\{0\}$ B. $\{1\}$ C. $\{1, 2\}$ D. $\{0, 1, 2\}$

【考点】1E：交集及其运算.

【专题】37：集合思想；4A：数学模型法；5J：集合.

【分析】求解不等式化简集合A，再由交集的运算性质得答案.

【解答】解： $\because A = \{x | x - 1 \geq 0\} = \{x | x \geq 1\}$ ， $B = \{0, 1, 2\}$ ，

$\therefore A \cap B = \{x | x \geq 1\} \cap \{0, 1, 2\} = \{1, 2\}$.

故选：C.

【点评】本题考查了交集及其运算，是基础题.

2. （5分） $(1+i)(2-i) =$ （ ）
- A. $-3-i$ B. $-3+i$ C. $3-i$ D. $3+i$

【考点】A5：复数的运算.

【专题】38：对应思想；4A：数学模型法；5N：数系的扩充和复数.

【分析】直接利用复数代数形式的乘除运算化简得答案.

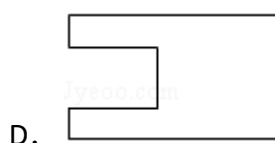
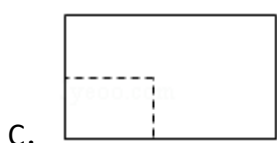
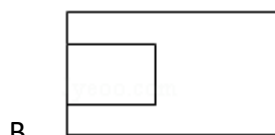
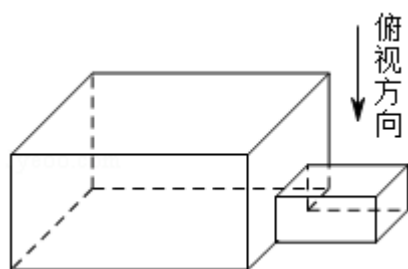
【解答】解： $(1+i)(2-i) = 3+i$.

故选：D.

【点评】本题考查了复数代数形式的乘除运算，是基础题.

3. （5分）中国古建筑借助榫卯将木构件连接起来. 构件的凸出部分叫榫头，凹进部分叫卯眼，图中木构件右边的小长方体是榫头. 若如图摆放的木构件与某一带卯眼的木构件咬合成长方体，则咬合时带卯眼的木构件的俯视图可

以是 ()



【考点】 L7: 简单空间图形的三视图.

【专题】 11: 计算题; 35: 转化思想; 49: 综合法; 5F: 空间位置关系与距离

【分析】 直接利用空间几何体的三视图的画法, 判断选项的正误即可.

【解答】 解: 由题意可知, 如图摆放的木构件与某一带卯眼的木构件咬合成长方体, 小的长方体, 是榫头, 从图形看出, 轮廓是长方形, 内含一个长方形, 并且一条边重合, 另外3边是虚线, 所以木构件的俯视图是A.



故选: A.

【点评】 本题看出简单几何体的三视图的画法, 是基本知识的考查.

4. (5分) 若 $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, 则 $\cos 2\alpha =$ ()

A. $\frac{8}{9}$

B. $\frac{7}{9}$

C. $-\frac{7}{9}$

D. $-\frac{8}{9}$

【考点】 GS: 二倍角的三角函数.

【专题】11：计算题；34：方程思想；40：定义法；56：三角函数的求值.

【分析】 $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ ，由此能求出结果.

【解答】解：∵ $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ ，

$$\therefore \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2 \times \frac{1}{9} = \frac{7}{9}.$$

故选：B.

【点评】本题考查二倍角的余弦值的求法，考查二倍角公式等基础知识，考查运算求解能力，考查函数与方程思想，是基础题.

5. (5分) $(x^2 + \frac{2}{x})^5$ 的展开式中 x^4 的系数为 ()

- A. 10 B. 20 C. 40 D. 80

【考点】DA：二项式定理.

【专题】11：计算题；34：方程思想；40：定义法；5P：二项式定理.

【分析】由二项式定理得 $(x^2 + \frac{2}{x})^5$ 的展开式的通项为： $T_{r+1} = C_5^r (x^2)^{5-r} (\frac{2}{x})^r$
 $= 2^r C_5^r x^{10-3r}$ ，由 $10 - 3r = 4$ ，解得 $r = 2$ ，由此能求出 $(x^2 + \frac{2}{x})^5$ 的展开式中 x^4 的系数.

【解答】解：由二项式定理得 $(x^2 + \frac{2}{x})^5$ 的展开式的通项为：

$$T_{r+1} = C_5^r (x^2)^{5-r} (\frac{2}{x})^r = 2^r C_5^r x^{10-3r},$$

由 $10 - 3r = 4$ ，解得 $r = 2$ ，

$$\therefore (x^2 + \frac{2}{x})^5 \text{的展开式中} x^4 \text{的系数为 } 2^2 C_5^2 = 40.$$

故选：C.

【点评】本题考查二项展开式中 x^4 的系数的求法，考查二项式定理、通项公式等基础知识，考查运算求解能力，考查函数与方程思想，是基础题.

6. (5分) 直线 $x + y + 2 = 0$ 分别与 x 轴， y 轴交于A，B两点，点P在圆 $(x - 2)^2 + y^2 = 2$ 上，则 $\triangle ABP$ 面积的取值范围是 ()

- A. [2, 6] B. [4, 8] C. $[\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$ D. $[2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$

【考点】J9: 直线与圆的位置关系.

【专题】11: 计算题; 34: 方程思想; 49: 综合法; 5B: 直线与圆.

【分析】求出A(-2, 0), B(0, -2), $|AB|=2\sqrt{2}$, 设P($2+\sqrt{2}\cos\theta$, $\sqrt{2}\sin\theta$), 点P到直线 $x+y+2=0$ 的距离: $d=\frac{|2+\sqrt{2}\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta+2|}{\sqrt{2}}=\frac{|2\sin(\theta+\frac{\pi}{4})+4|}{\sqrt{2}}\in[\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$, 由此能求出 $\triangle ABP$ 面积的取值范围.

【解答】解: \because 直线 $x+y+2=0$ 分别与x轴, y轴交于A, B两点,

\therefore 令 $x=0$, 得 $y=-2$, 令 $y=0$, 得 $x=-2$,

\therefore A(-2, 0), B(0, -2), $|AB|=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$,

\because 点P在圆 $(x-2)^2+y^2=2$ 上, \therefore 设P($2+\sqrt{2}\cos\theta$, $\sqrt{2}\sin\theta$),

\therefore 点P到直线 $x+y+2=0$ 的距离:

$$d=\frac{|2+\sqrt{2}\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta+2|}{\sqrt{2}}=\frac{|2\sin(\theta+\frac{\pi}{4})+4|}{\sqrt{2}},$$

$$\because \sin(\theta+\frac{\pi}{4})\in[-1, 1], \therefore d=\frac{|2\sin(\theta+\frac{\pi}{4})+4|}{\sqrt{2}}\in[\sqrt{2}, 3\sqrt{2}],$$

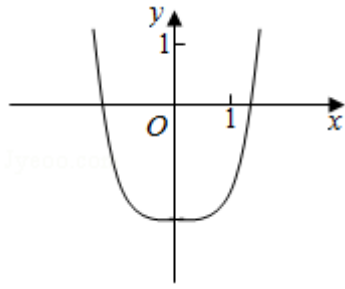
\therefore $\triangle ABP$ 面积的取值范围是:

$$[\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{2}, \frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}]=[2, 6].$$

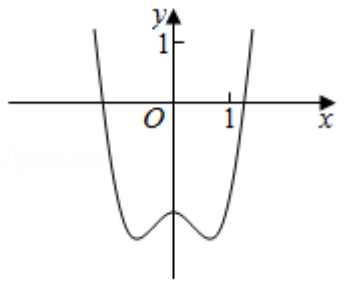
故选: A.

【点评】本题考查三角形面积的取值范围的求法, 考查直线方程、点到直线的距离公式、圆的参数方程、三角函数关系等基础知识, 考查运算求解能力, 考查函数与方程思想, 是中档题.

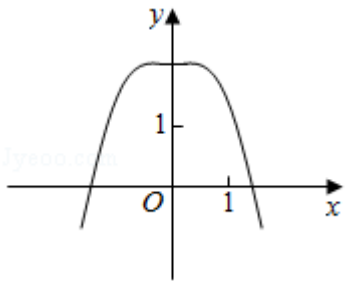
7. (5分) 函数 $y=-x^4+x^2+2$ 的图象大致为 ()



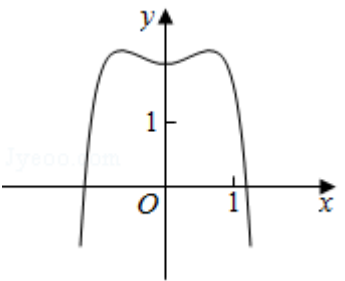
A.



B.



C.



D.

【考点】 3A: 函数的图象与图象的变换.

【专题】 38: 对应思想; 4R: 转化法; 51: 函数的性质及应用.

【分析】 根据函数图象的特点, 求函数的导数利用函数的单调性进行判断即可

【解答】 解: 函数过定点 $(0, 2)$, 排除A, B.

函数的导数 $f'(x) = -4x^3 + 2x = -2x(2x^2 - 1)$,

由 $f'(x) > 0$ 得 $2x(2x^2 - 1) < 0$,

得 $x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$, 此时函数单调递增,

由 $f'(x) < 0$ 得 $2x(2x^2 - 1) > 0$,

得 $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 0$, 此时函数单调递减, 排除C,

也可以利用 $f(1) = -1 + 1 + 2 = 2 > 0$, 排除A, B,

故选: D.

【点评】 本题主要考查函数的图象的识别和判断, 利用函数过定点以及判断函数的单调性是解决本题的关键.

8. (5分) 某群体中的每位成员使用移动支付的概率都为 p , 各成员的支付方式相互独立. 设 X 为该群体的10位成员中使用移动支付的人数, $DX=2.4$, $P(X=4) < P(X=6)$, 则 $p=$ ()

- A. 0.7 B. 0.6 C. 0.4 D. 0.3

【考点】 CH: 离散型随机变量的期望与方差.

【专题】 11: 计算题; 34: 方程思想; 35: 转化思想; 49: 综合法; 51: 概率与统计.

【分析】 利用已知条件, 转化为二项分布, 利用方差转化求解即可.

【解答】 解: 某群体中的每位成员使用移动支付的概率都为 p , 看做是独立重复事件, 满足 $X \sim B(10, p)$,

$P(X=4) < P(X=6)$, 可得 $C_{10}^4 p^4 (1-p)^6 < C_{10}^6 p^6 (1-p)^4$, 可得 $1 - 2p < 0$. 即

$$p > \frac{1}{2}.$$

因为 $DX=2.4$, 可得 $10p(1-p)=2.4$, 解得 $p=0.6$ 或 $p=0.4$ (舍去).

故选: B.

【点评】 本题考查离散型离散型随机变量的期望与方差的求法, 独立重复事件的应用, 考查转化思想以及计算能力.

9. (5分) $\triangle ABC$ 的内角A, B, C的对边分别为a, b, c. 若 $\triangle ABC$ 的面积为

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{4}, \text{ 则 } C = (\quad)$$

- A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{6}$

【考点】HR: 余弦定理.

【专题】11: 计算题; 35: 转化思想; 49: 综合法; 58: 解三角形.

【分析】推导出 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{a^2+b^2-c^2}{4}$, 从而 $\sin C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \cos C$, 由此能求出结果.

【解答】解: $\because \triangle ABC$ 的内角A, B, C的对边分别为a, b, c.

$$\begin{aligned} \triangle ABC \text{的面积为} & \frac{a^2+b^2-c^2}{4}, \\ \therefore S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{a^2+b^2-c^2}{4}, \\ \therefore \sin C &= \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \cos C, \\ \therefore 0 < C < \pi, & \therefore C = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

故选: C.

【点评】本题考查三角形内角的求法, 考查余弦定理、三角形面积公式等基础知识, 考查运算求解能力, 考查函数与方程思想, 是基础题.

10. (5分) 设A, B, C, D是同一个半径为4的球的球面上四点, $\triangle ABC$ 为等边三角形且面积为 $9\sqrt{3}$, 则三棱锥D - ABC体积的最大值为 ()
- A. $12\sqrt{3}$ B. $18\sqrt{3}$ C. $24\sqrt{3}$ D. $54\sqrt{3}$

【考点】LF: 棱柱、棱锥、棱台的体积; LG: 球的体积和表面积.

【专题】11: 计算题; 31: 数形结合; 34: 方程思想; 35: 转化思想; 49: 综合法; 5F: 空间位置关系与距离.

【分析】求出, $\triangle ABC$ 为等边三角形的边长, 画出图形, 判断D的位置, 然后求解即可.

【解答】解: $\triangle ABC$ 为等边三角形且面积为 $9\sqrt{3}$, 可得 $\frac{\sqrt{3}}{4} \times AB^2 = 9\sqrt{3}$, 解得 $AB = 6$,

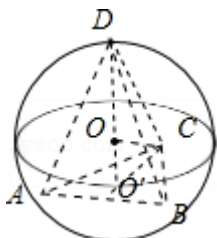
球心为O, 三角形ABC的外心为O', 显然D在O'O的延长线与球的交点如图:

$$O'C = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 2\sqrt{3}, \quad OO' = \sqrt{4^2 - (2\sqrt{3})^2} = 2,$$

则三棱锥D - ABC高的最大值为：6，

$$\text{则三棱锥D - ABC体积的最大值为：} \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^3 = 18\sqrt{3}.$$

故选：B.



【点评】 本题考查球的内接多面体，棱锥的体积的求法，考查空间想象能力以及计算能力.

11. (5分) 设 F_1, F_2 是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左, 右焦点, O

是坐标原点. 过 F_2 作 C 的一条渐近线的垂线, 垂足为 P , 若 $|PF_1| = \sqrt{6}|OP|$, 则 C 的离心率为 ()

A. $\sqrt{5}$

B. 2

C. $\sqrt{3}$

D. $\sqrt{2}$

【考点】 KC: 双曲线的性质.

【专题】 11: 计算题; 38: 对应思想; 4R: 转化法; 5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】 先根据点到直线的距离求出 $|PF_2| = b$, 再求出 $|OP| = a$, 在三角形 F_1PF_2 中, 由余弦定理可得 $|PF_1|^2 = |PF_2|^2 + |F_1F_2|^2 - 2|PF_2| \cdot |F_1F_2| \cos \angle PF_2O$, 代值化简整理可得 $\sqrt{3}a = c$, 问题得以解决.

【解答】 解: 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线方程为 $y = \frac{b}{a}x$,

$$\therefore \text{点} F_2 \text{到渐近线的距离} d = \frac{bc}{\sqrt{a^2 + b^2}} = b, \text{ 即 } |PF_2| = b,$$

$$\therefore |OP| = \sqrt{|OF_2|^2 - |PF_2|^2} = \sqrt{c^2 - b^2} = a, \quad \cos \angle PF_2O = \frac{b}{c},$$

$$\therefore |PF_1| = \sqrt{6}|OP|,$$

$$\therefore |PF_1| = \sqrt{6}a,$$

在三角形 F_1PF_2 中, 由余弦定理可得 $|PF_1|^2 = |PF_2|^2 + |F_1F_2|^2 - 2|PF_2| \cdot |F_1F_2| \cos \angle PF_2O$,

$$\therefore 6a^2 = b^2 + 4c^2 - 2 \times b \times 2c \times \frac{b}{c} = 4c^2 - 3b^2 = 4c^2 - 3(c^2 - a^2),$$

$$\text{即 } 3a^2 = c^2,$$

$$\text{即 } \sqrt{3}a = c,$$

$$\therefore e = \frac{c}{a} = \sqrt{3},$$

故选: C.

【点评】 本题考查了双曲线的简单性质, 点到直线的距离公式, 余弦定理, 离心率, 属于中档题.

12. (5分) 设 $a = \log_{0.2} 0.3$, $b = \log_2 0.3$, 则 ()

- A. $a+b < ab < 0$ B. $ab < a+b < 0$ C. $a+b < 0 < ab$ D. $ab < 0 < a+b$

【考点】 4M: 对数值大小的比较.

【专题】 33: 函数思想; 48: 分析法; 51: 函数的性质及应用.

【分析】 直接利用对数的运算性质化简即可得答案.

【解答】 解: $\because a = \log_{0.2} 0.3 = \frac{\lg 0.3}{-\lg 5}$, $b = \log_2 0.3 = \frac{\lg 0.3}{\lg 2}$,

$$\therefore a+b = \frac{\lg 0.3}{\lg 2} - \frac{\lg 0.3}{\lg 5} = \frac{\lg 0.3(\lg 5 - \lg 2)}{\lg 2 \lg 5} = \frac{\lg 0.3 \lg \frac{5}{2}}{\lg 2 \lg 5},$$

$$ab = -\frac{\lg 0.3}{\lg 2} \cdot \frac{\lg 0.3}{\lg 5} = \frac{\lg 0.3 \cdot \lg \frac{10}{3}}{\lg 2 \lg 5},$$

$$\because \lg \frac{10}{3} > \lg \frac{5}{2}, \quad \frac{\lg 0.3}{\lg 2 \lg 5} < 0,$$

$$\therefore ab < a+b < 0.$$

故选: B.

【点评】 本题考查了对数值大小的比较, 考查了对数的运算性质, 是中档题.

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. (5分) 已知向量 $\vec{a} = (1, 2)$ ， $\vec{b} = (2, -2)$ ， $\vec{c} = (1, \lambda)$ 。若 $\vec{c} \parallel (2\vec{a} + \vec{b})$ ，则 $\lambda = \underline{-\frac{1}{2}}$ 。

【考点】96：平行向量（共线）；9J：平面向量的坐标运算。

【专题】11：计算题；34：方程思想；40：定义法；5A：平面向量及应用。

【分析】利用向量坐标运算法则求出 $2\vec{a} + \vec{b} = (4, 2)$ ，再由向量平行的性质能求出 λ 的值。

【解答】解： \because 向量 $\vec{a} = (1, 2)$ ， $\vec{b} = (2, -2)$ ，

$$\therefore 2\vec{a} + \vec{b} = (4, 2),$$

$$\because \vec{c} = (1, \lambda), \vec{c} \parallel (2\vec{a} + \vec{b}),$$

$$\therefore \frac{1}{4} = \frac{\lambda}{2},$$

$$\text{解得 } \lambda = \frac{1}{2}.$$

故答案为： $\frac{1}{2}$ 。

【点评】本题考查实数值的求法，考查向量坐标运算法则、向量平行的性质等基础知识，考查运算求解能力，考查函数与方程思想，是基础题。

14. (5分) 曲线 $y = (ax+1)e^x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线的斜率为 -2 ，则 $a = \underline{-3}$ 。

【考点】6H：利用导数研究曲线上某点切线方程。

【专题】11：计算题；34：方程思想；49：综合法；53：导数的综合应用。

【分析】求函数的导数，利用切线的斜率列出方程求解即可。

【解答】解：曲线 $y = (ax+1)e^x$ ，可得 $y' = ae^{x+1} + (ax+1)e^x$ ，

曲线 $y = (ax+1)e^x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线的斜率为 -2 ，

可得： $a+1 = -2$ ，解得 $a = -3$ 。

故答案为： -3 。

【点评】 本题考查函数的导数的应用切线的斜率的求法，考查转化思想以及计算能力。

15. (5分) 函数 $f(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$ 在 $[0, \pi]$ 的零点个数为 3。

【考点】 51: 函数的零点.

【专题】 11: 计算题; 38: 对应思想; 40: 定义法; 57: 三角函数的图像与性质.

【分析】 由题意可得 $f(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$ ，可得 $3x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ，即 $x = \frac{\pi}{9} + \frac{1}{3}k\pi$ ，即可求出。

【解答】 解： $\because f(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$ ，

$$\therefore 3x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{9} + \frac{1}{3}k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{当 } k=0 \text{ 时, } x = \frac{\pi}{9},$$

$$\text{当 } k=1 \text{ 时, } x = \frac{4}{9}\pi,$$

$$\text{当 } k=2 \text{ 时, } x = \frac{7}{9}\pi,$$

$$\text{当 } k=3 \text{ 时, } x = \frac{10}{9}\pi,$$

$$\therefore x \in [0, \pi],$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{9}, \text{ 或 } x = \frac{4}{9}\pi, \text{ 或 } x = \frac{7}{9}\pi,$$

故零点的个数为3，

故答案为： 3

【点评】 本题考查了余弦函数的图象和性质以及函数零点的问题，属于基础题

16. (5分) 已知点M (-1, 1) 和抛物线C: $y^2=4x$, 过C的焦点且斜率为k的直线与C交于A, B两点. 若 $\angle AMB=90^\circ$, 则k=2.

【考点】K8: 抛物线的性质; KN: 直线与抛物线的综合.

【专题】11: 计算题; 34: 方程思想; 35: 转化思想; 49: 综合法; 5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】由已知可求过A, B两点的直线方程为 $y=k(x-1)$, 然后联立直线与抛物线方程组可得, $k^2x^2 - 2(2+k^2)x + k^2 = 0$, 可表示 x_1+x_2 , x_1x_2 , y_1+y_2 , y_1y_2 , 由 $\angle AMB=90^\circ$, 向量的数量积为0, 代入整理可求k.

【解答】解: \because 抛物线C: $y^2=4x$ 的焦点F (1, 0),

\therefore 过A, B两点的直线方程为 $y=k(x-1)$,

$$\text{联立} \begin{cases} y^2=4x \\ y=k(x-1) \end{cases} \text{ 可得, } k^2x^2 - 2(2+k^2)x + k^2 = 0,$$

设A (x_1, y_1), B (x_2, y_2),

$$\text{则 } x_1+x_2 = \frac{4+2k^2}{k^2}, \quad x_1x_2 = 1,$$

$$\therefore y_1+y_2 = k(x_1+x_2 - 2) = \frac{4}{k}, \quad y_1y_2 = k^2(x_1-1)(x_2-1) = k^2[x_1x_2 - (x_1+x_2) + 1] = -4,$$

\because M (-1, 1),

$$\therefore \overrightarrow{MA} = (x_1+1, y_1-1), \quad \overrightarrow{MB} = (x_2+1, y_2-1),$$

$$\because \angle AMB = 90^\circ, \therefore \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

$$\therefore (x_1+1)(x_2+1) + (y_1-1)(y_2-1) = 0,$$

$$\text{整理可得, } x_1x_2 + (x_1+x_2) + y_1y_2 - (y_1+y_2) + 2 = 0,$$

$$\therefore 1+2+\frac{4}{k^2} - 4 - \frac{4}{k} + 2 = 0,$$

$$\text{即 } k^2 - 4k + 4 = 0,$$

$$\therefore k = 2.$$

故答案为: 2

【点评】 本题主要考查了直线与圆锥曲线的相交关系的应用，解题的难点是本题具有较大的计算量。

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17~21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题，考生根据要求作答。（一）必考题：共60分。

17. (12分) 等比数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1=1$ ， $a_5=4a_3$ 。

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和。若 $S_m=63$ ，求 m 。

【考点】 89：等比数列的前 n 项和。

【专题】 11：计算题；35：转化思想；49：综合法；54：等差数列与等比数列

【分析】 (1) 利用等比数列通项公式列出方程，求出公比 $q=\pm 2$ ，由此能求出 $\{a_n\}$ 的通项公式。

(2) 当 $a_1=1$ ， $q=-2$ 时， $S_n=\frac{1-(-2)^n}{3}$ ，由 $S_m=63$ ，得 $S_m=\frac{1-(-2)^m}{3}=63$ ， $m\in\mathbb{N}$ ，

无解；当 $a_1=1$ ， $q=2$ 时， $S_n=2^n-1$ ，由此能求出 m 。

【解答】 解：(1) \because 等比数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1=1$ ， $a_5=4a_3$ 。

$$\therefore 1 \times q^4 = 4 \times (1 \times q^2),$$

解得 $q=\pm 2$ ，

当 $q=2$ 时， $a_n=2^{n-1}$ ，

当 $q=-2$ 时， $a_n=(-2)^{n-1}$ ，

$\therefore \{a_n\}$ 的通项公式为， $a_n=2^{n-1}$ ，或 $a_n=(-2)^{n-1}$ 。

(2) 记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和。

$$\text{当 } a_1=1, q=-2 \text{ 时, } S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{1-(-2)^n}{1-(-2)} = \frac{1-(-2)^n}{3},$$

由 $S_m=63$ ，得 $S_m=\frac{1-(-2)^m}{3}=63$ ， $m\in\mathbb{N}$ ，无解；

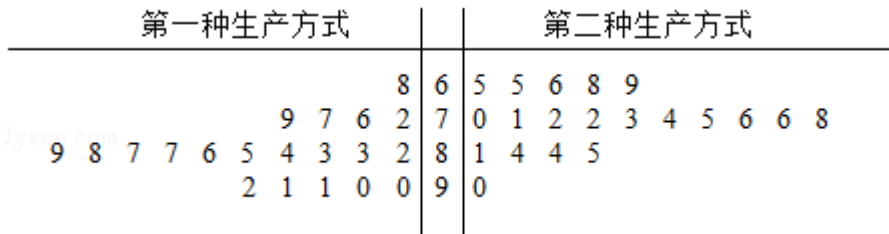
$$\text{当 } a_1=1, q=2 \text{ 时, } S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1,$$

由 $S_m=63$ ，得 $S_m=2^m - 1=63$ ， $m \in \mathbb{N}$ ，

解得 $m=6$ 。

【点评】 本题考查等比数列的通项公式的求法，考查等比数列的性质等基础知识，考查运算求解能力，考查函数与方程思想，是基础题。

18. (12分) 某工厂为提高生产效率，开展技术创新活动，提出了完成某项生产任务的两种新的生产方式. 为比较两种生产方式的效率，选取40名工人，将他们随机分成两组，每组20人. 第一组工人用第一种生产方式，第二组工人用第二种生产方式. 根据工人完成生产任务的工作时间(单位: min)绘制了如下茎叶图:



- (1) 根据茎叶图判断哪种生产方式的效率更高? 并说明理由;
- (2) 求40名工人完成生产任务所需时间的中位数 m ，并将完成生产任务所需时间超过 m 和不超过 m 的工人数填入下面的列联表:

	超过 m	不超过 m
第一种生产方式		
第二种生产方式		

- (3) 根据(2)中的列联表，能否有99%的把握认为两种生产方式的效率有差异?

附: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,

P ($K^2 \geq k$)	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

【考点】 BL: 独立性检验.

【专题】 38: 对应思想; 4A: 数学模型法; 5I: 概率与统计.

【分析】 (1) 根据茎叶图中的数据判断第二种生产方式的工作时间较少些，效

率更高；

(2) 根据茎叶图中的数据计算它们的中位数，再填写列联表；

(3) 列联表中的数据计算观测值，对照临界值得出结论.

【解答】解：(1) 根据茎叶图中的数据知，

第一种生产方式的工作时间主要集中在72~92之间，

第二种生产方式的工作时间主要集中在65~85之间，

所以第二种生产方式的工作时间较少些，效率更高；

(2) 这40名工人完成生产任务所需时间按从小到大的顺序排列后，

排在中间的两个数据是79和81，计算它们的中位数为 $m = \frac{79+81}{2} = 80$ ；

由此填写列联表如下：

	超过m	不超过m	总计
第一种生产方式	15	5	20
第二种生产方式	5	15	20
总计	20	20	40

(3) 根据(2)中的列联表，计算

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{40 \times (15 \times 15 - 5 \times 5)^2}{20 \times 20 \times 20 \times 20} = 10 > 6.635,$$

∴能有99%的把握认为两种生产方式的效率有差异.

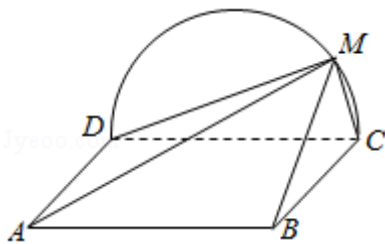
【点评】本题考查了列联表与独立性检验的应用问题，是基础题.

19. (12分) 如图，边长为2的正方形ABCD所在的平面与半圆弧 \widehat{CD} 所在平面垂直，

M是 \widehat{CD} 上异于C, D的点.

(1) 证明：平面AMD⊥平面BMC；

(2) 当三棱锥M - ABC体积最大时，求面MAB与面MCD所成二面角的正弦值.



【考点】LY：平面与平面垂直；MJ：二面角的平面角及求法.

【专题】35：转化思想；4R：转化法；5F：空间位置关系与距离；5H：空间向量及应用.

【分析】（1）根据面面垂直的判定定理证明 $MC \perp$ 平面ADM即可.

（2）根据三棱锥的体积最大，确定M的位置，建立空间直角坐标系，求出点的坐标，利用向量法进行求解即可.

【解答】解：（1）证明：在半圆中， $DM \perp MC$,

\because 正方形ABCD所在的平面与半圆弧 \widehat{CD} 所在平面垂直，

$\therefore AD \perp$ 平面DCM，则 $AD \perp MC$,

$\because AD \cap DM = D$,

$\therefore MC \perp$ 平面ADM，

$\because MC \subset$ 平面MBC，

\therefore 平面AMD \perp 平面BMC.

（2） $\because \triangle ABC$ 的面积为定值，

\therefore 要使三棱锥M - ABC体积最大，则三棱锥的高最大，此时M为圆弧的中点，

建立以O为坐标原点，如图所示的空间直角坐标系如图

\because 正方形ABCD的边长为2，

$\therefore A(2, -1, 0)$ ， $B(2, 1, 0)$ ， $M(0, 0, 1)$ ，

则平面MCD的法向量 $\vec{m} = (1, 0, 0)$ ，

设平面MAB的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$

则 $\vec{AB} = (0, 2, 0)$ ， $\vec{AM} = (-2, 1, 1)$ ，

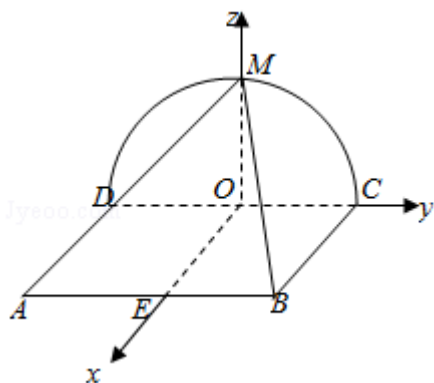
由 $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 2y = 0$ ， $\vec{n} \cdot \vec{AM} = -2x + y + z = 0$ ，

令 $x = 1$ ，

则 $y = 0$ ， $z = 2$ ，即 $\vec{n} = (1, 0, 2)$ ，

则 $\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{1}{1 \times \sqrt{1+4}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ，

则面MAB与面MCD所成二面角的正弦值 $\sin\alpha = \sqrt{1 - (\frac{1}{\sqrt{5}})^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.



【点评】 本题主要考查空间平面垂直的判定以及二面角的求解，利用相应的判定定理以及建立坐标系，利用向量法是解决本题的关键.

20. (12分) 已知斜率为 k 的直线 l 与椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 交于 A, B 两点，线段 AB

的中点为 $M(1, m)$ ($m > 0$).

(1) 证明: $k < -\frac{1}{2}$;

(2) 设 F 为 C 的右焦点, P 为 C 上一点, 且 $\vec{FP} + \vec{FA} + \vec{FB} = \vec{0}$. 证明: $|\vec{FA}|, |\vec{FP}|, |\vec{FB}|$ 成等差数列, 并求该数列的公差.

【考点】 K3: 椭圆的标准方程; KL: 直线与椭圆的综合.

【专题】 35: 转化思想; 49: 综合法; 5E: 圆锥曲线中的最值与范围问题.

【分析】 (1) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 利用点差法得 $6(x_1 - x_2) + 8m(y_1$

$$- y_2) = 0, k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{6}{8m} = -\frac{3}{4m}$$

又点 $M(1, m)$ 在椭圆内, 即 $\frac{1}{4} + \frac{m^2}{3} < 1, (m > 0)$, 解得 m 的取值范围, 即可得

$$k < -\frac{1}{2},$$

(2) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), P(x_3, y_3)$, 可得 $x_1 + x_2 = 2$

由 $\vec{FP} + \vec{FA} + \vec{FB} = \vec{0}$, 可得 $x_3 - 1 = 0$, 由椭圆的焦半径公式得则 $|\vec{FA}| = a - ex_1 = 2 - \frac{1}{2}x_1$

, $|FB|=2-\frac{1}{2}x_2$, $|FP|=2-\frac{1}{2}x_3=\frac{3}{2}$. 即可证明 $|FA|+|FB|=2|FP|$, 求得A, B坐标再求公差.

【解答】解: (1) 设A (x_1, y_1) , B (x_2, y_2) ,

\therefore 线段AB的中点为M $(1, m)$,

$\therefore x_1+x_2=2, y_1+y_2=2m$

将A, B代入椭圆C: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 中, 可得

$$\begin{cases} 3x_1^2+4y_1^2=12 \\ 3x_2^2+4y_2^2=12 \end{cases},$$

两式相减可得, $3(x_1+x_2)(x_1-x_2)+4(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0$,

即 $6(x_1-x_2)+8m(y_1-y_2)=0$,

$$\therefore k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{6}{8m}=-\frac{3}{4m}$$

点M $(1, m)$ 在椭圆内, 即 $\frac{1}{4}+\frac{m^2}{3}<1, (m>0)$,

解得 $0<m<\frac{3}{2}$

$$\therefore k=-\frac{3}{4m}<-\frac{1}{2}.$$

(2) 证明: 设A (x_1, y_1) , B (x_2, y_2) , P (x_3, y_3) ,

可得 $x_1+x_2=2$,

$\therefore \vec{FP}+\vec{FA}+\vec{FB}=\vec{0}$, F $(1, 0)$, $\therefore x_1-1+x_2-1+x_3-1=0, y_1+y_2+y_3=0$,

$\therefore x_3=1, y_3=-(y_1+y_2)=-2m$

$\therefore m>0$, 可得P在第四象限, 故 $y_3=-\frac{3}{2}, m=\frac{3}{4}, k=-1$

由椭圆的焦半径公式得则 $|FA|=a-ex_1=2-\frac{1}{2}x_1, |FB|=2-\frac{1}{2}x_2, |FP|=2-\frac{1}{2}x_3=\frac{3}{2}$

则 $|FA|+|FB|=4-\frac{1}{2}(x_1+x_2)=3, \therefore |FA|+|FB|=2|FP|$,

$$\text{联立} \begin{cases} y=-x+\frac{7}{4} \\ 3x^2+4y^2=12 \end{cases}, \text{ 可得 } |x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{3\sqrt{21}}{7}$$

所以该数列的公差 d 满足 $2d = \pm \frac{1}{2} |x_1 - x_2| = \pm \frac{3\sqrt{21}}{14}$,

\therefore 该数列的公差为 $\pm \frac{3\sqrt{21}}{28}$.

【点评】 本题考查直线与椭圆的位置关系的综合应用, 考查了点差法、焦半径公式, 考查分析问题解决问题的能力, 转化思想的应用与计算能力的考查. 属于中档题.

21. (12分) 已知函数 $f(x) = (2+x+ax^2) \ln(1+x) - 2x$.

(1) 若 $a=0$, 证明: 当 $-1 < x < 0$ 时, $f(x) < 0$; 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$;

(2) 若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点, 求 a .

【考点】 6D: 利用导数研究函数的极值.

【专题】 34: 方程思想; 35: 转化思想; 48: 分析法; 53: 导数的综合应用.

【分析】 (1) 对函数 $f(x)$ 两次求导数, 分别判断 $f'(x)$ 和 $f(x)$ 的单调性, 结合 $f(0) = 0$ 即可得出结论;

(2) 令 $h(x)$ 为 $f'(x)$ 的分子, 令 $h''(0)$ 计算 a , 讨论 a 的范围, 得出 $f(x)$ 的单调性, 从而得出 a 的值.

【解答】 (1) 证明: 当 $a=0$ 时, $f(x) = (2+x) \ln(1+x) - 2x$, ($x > -1$).

$$f'(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}, \quad f''(x) = \frac{x}{(x+1)^2},$$

可得 $x \in (-1, 0)$ 时, $f''(x) \leq 0$, $x \in (0, +\infty)$ 时, $f''(x) \geq 0$

$\therefore f'(x)$ 在 $(-1, 0)$ 递减, 在 $(0, +\infty)$ 递增,

$\therefore f'(x) \geq f'(0) = 0$,

$\therefore f(x) = (2+x) \ln(1+x) - 2x$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增, 又 $f(0) = 0$.

\therefore 当 $-1 < x < 0$ 时, $f(x) < 0$; 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$.

(2) 解: 由 $f(x) = (2+x+ax^2) \ln(1+x) - 2x$, 得

$$f'(x) = (1+2ax) \ln(1+x) + \frac{2+x+ax^2}{x+1} - 2 = \frac{ax^2 - x + (1+2ax)(1+x) \ln(x+1)}{x+1},$$

令 $h(x) = ax^2 - x + (1+2ax)(1+x) \ln(x+1)$,

$h'(x) = 4ax + (4ax+2a+1) \ln(x+1)$.

当 $a \geq 0$, $x > 0$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增,

$\therefore h(x) > h(0) = 0$, 即 $f'(x) > 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极大值点, 不符合题意.

当 $a < 0$ 时, $h''(x) = 8a + 4a \ln(x+1) + \frac{1-2a}{x+1}$,

显然 $h''(x)$ 单调递减,

① 令 $h''(0) = 0$, 解得 $a = -\frac{1}{6}$.

\therefore 当 $-1 < x < 0$ 时, $h''(x) > 0$, 当 $x > 0$ 时, $h''(x) < 0$,

$\therefore h'(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递增, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

$\therefore h'(x) \leq h'(0) = 0$,

$\therefore h(x)$ 单调递减, 又 $h(0) = 0$,

\therefore 当 $-1 < x < 0$ 时, $h(x) > 0$, 即 $f'(x) > 0$,

当 $x > 0$ 时, $h(x) < 0$, 即 $f'(x) < 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递增, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

$\therefore x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点, 符合题意;

② 若 $-\frac{1}{6} < a < 0$, 则 $h''(0) = 1+6a > 0$, $h''(e^{\frac{1+6a}{4a}} - 1) = (2a-1)(1 - e^{\frac{1+6a}{4a}}) < 0$,

$\therefore h''(x) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上有唯一一个零点, 设为 x_0 ,

\therefore 当 $0 < x < x_0$ 时, $h''(x) > 0$, $h'(x)$ 单调递增,

$\therefore h'(x) > h'(0) = 0$, 即 $f'(x) > 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递增, 不符合题意;

③ 若 $a < -\frac{1}{6}$, 则 $h''(0) = 1+6a < 0$, $h''(\frac{1}{e^2} - 1) = (1-2a)e^2 > 0$,

$\therefore h''(x) = 0$ 在 $(-1, 0)$ 上有唯一一个零点, 设为 x_1 ,

\therefore 当 $x_1 < x < 0$ 时, $h''(x) < 0$, $h'(x)$ 单调递减,

$\therefore h'(x) > h'(0) = 0$, $\therefore h(x)$ 单调递增,

$\therefore h(x) < h(0) = 0$, 即 $f'(x) < 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(x_1, 0)$ 上单调递减, 不符合题意.

综上, $a = -\frac{1}{6}$.

【点评】 本题考查了导数与函数单调性的关系, 函数单调性与极值的计算, 零

点的存在性定理，属于难题.

(二) 选考题：共10分。请考生在第22、23题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。[选修4-4：坐标系与参数方程] (10分)

22. (10分) 在平面直角坐标系 xOy 中， $\odot O$ 的参数方程为 $\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$ ，(θ 为参数)，过点 $(0, -\sqrt{2})$ 且倾斜角为 α 的直线 l 与 $\odot O$ 交于A, B两点.

- (1) 求 α 的取值范围；
- (2) 求AB中点P的轨迹的参数方程.

【考点】 QK: 圆的参数方程.

【专题】 11: 计算题; 35: 转化思想; 49: 综合法; 55: 坐标系和参数方程.

【分析】 (1) $\odot O$ 的普通方程为 $x^2+y^2=1$ ，圆心为 $O(0, 0)$ ，半径 $r=1$ ，当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，直线 l 的方程为 $x=0$ ，成立；当 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$ 时，过点 $(0, -\sqrt{2})$ 且倾斜角为 α 的直线 l 的方程为 $y=\tan\alpha\cdot x+\sqrt{2}$ ，从而圆心 $O(0, 0)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{|\sqrt{2}|}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}<1$ ，进而求出 $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$ ，由此能求出 α 的取值范围.

(2) 设直线 l 的方程为 $x=m(y+\sqrt{2})$ ，联立 $\begin{cases} x=m(y+\sqrt{2}) \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ ，得 $(m^2+1)y^2+2\sqrt{2}m^2y+m^2-1=0$ ，由此利用韦达定理、中点坐标公式能求出AB中点P的轨迹的参数方程.

【解答】 解：(1) $\because \odot O$ 的参数方程为 $\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数)，

$\therefore \odot O$ 的普通方程为 $x^2+y^2=1$ ，圆心为 $O(0, 0)$ ，半径 $r=1$ ，

当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，过点 $(0, -\sqrt{2})$ 且倾斜角为 α 的直线 l 的方程为 $x=0$ ，成立；

当 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$ 时，过点 $(0, -\sqrt{2})$ 且倾斜角为 α 的直线 l 的方程为 $y=\tan\alpha\cdot x-\sqrt{2}$ ，

\therefore 倾斜角为 α 的直线 l 与 $\odot O$ 交于A, B两点，

\therefore 圆心 $O(0, 0)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{|\sqrt{2}|}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}<1$ ，

$$\therefore \tan^2 \alpha > 1, \therefore \tan \alpha > 1 \text{ 或 } \tan \alpha < -1,$$

$$\therefore \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ 或 } \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4},$$

综上 α 的取值范围是 $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$.

(2) 由(1)知直线 l 的斜率不为0, 设直线 l 的方程为 $x=m(y+\sqrt{2})$,

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $P(x_3, y_3)$,

$$\text{联立} \begin{cases} x=m(y+\sqrt{2}) \\ x^2+y^2=1 \end{cases}, \text{ 得 } (m^2+1)y^2+2\sqrt{2}m^2y+2m^2-1=0,$$

$$\begin{cases} y_1+y_2=-\frac{2\sqrt{2}m^2}{m^2+1} \\ y_1y_2=\frac{2m^2-1}{m^2+1} \end{cases},$$

$$x_1+x_2=m(y_1+\sqrt{2})+m(y_2+\sqrt{2})=-\frac{2\sqrt{2}m^3}{m^2+1}+2\sqrt{2}m,$$

$$x_3=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{\sqrt{2}m}{m^2+1}, \quad y_3=\frac{y_1+y_2}{2}=-\frac{\sqrt{2}m^2}{m^2+1},$$

$$\therefore AB \text{ 中点 } P \text{ 的轨迹的参数方程为 } \begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}m}{m^2+1} \\ y=-\frac{\sqrt{2}m^2}{m^2+1} \end{cases}, \quad (m \text{ 为参数}), \quad (-1 < m < 1).$$

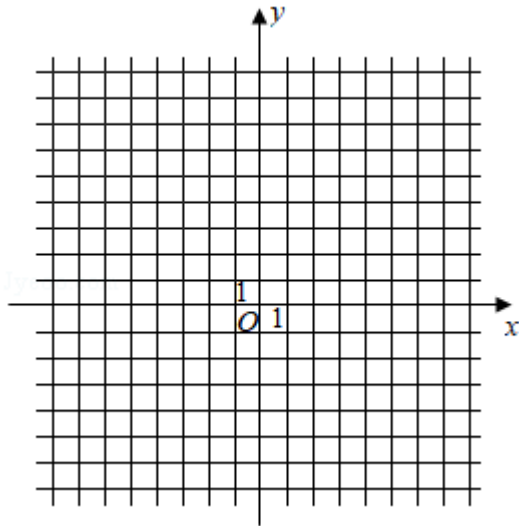
【点评】 本题考查直线的倾斜角的取值范围的求法, 考查线段的中点的参数方程的求法, 考查参数方程、直角坐标方程、韦达定理、中点坐标公式等基础知识, 考查数形结合思想的灵活运用, 考查运算求解能力, 考查函数与方程思想, 是中档题.

[选修4-5: 不等式选讲] (10分)

23. 设函数 $f(x) = |2x+1| + |x-1|$.

(1) 画出 $y=f(x)$ 的图象;

(2) 当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $f(x) \leq ax+b$, 求 $a+b$ 的最小值.



【考点】3B：分段函数的解析式求法及其图象的作法；5B：分段函数的应用。

【专题】31：数形结合；4R：转化法；51：函数的性质及应用；59：不等式的解法及应用。

【分析】（1）利用分段函数的性质将函数表示为分段函数形式进行作图即可。

（2）将不等式恒成立转化为图象关系进行求解即可。

【解答】解：（1）当 $x \leq -\frac{1}{2}$ 时， $f(x) = -(2x+1) - (x-1) = -3x$ ，

当 $-\frac{1}{2} < x < 1$ ， $f(x) = (2x+1) - (x-1) = x+2$ ，

当 $x \geq 1$ 时， $f(x) = (2x+1) + (x-1) = 3x$ ，

$$\text{则 } f(x) = \begin{cases} -3x, & x \leq -\frac{1}{2} \\ x+2, & -\frac{1}{2} < x < 1 \\ 3x, & x \geq 1 \end{cases} \text{ 对应的图象为:}$$

画出 $y=f(x)$ 的图象；

（2）当 $x \in [0, +\infty)$ 时， $f(x) \leq ax+b$ ，

当 $x=0$ 时， $f(0) = 2 \leq 0 \cdot a + b$ ， $\therefore b \geq 2$ ，

当 $x > 0$ 时，要使 $f(x) \leq ax+b$ 恒成立，

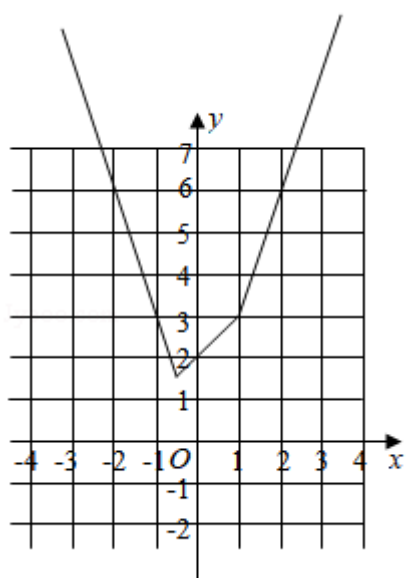
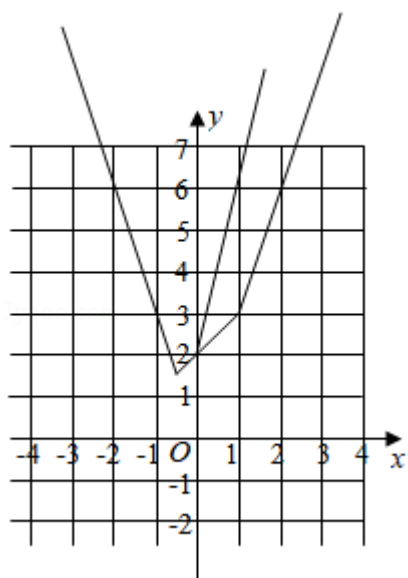
则函数 $f(x)$ 的图象都在直线 $y=ax+b$ 的下方或在直线上，

$\therefore f(x)$ 的图象与 y 轴的交点的纵坐标为 2，

且各部分直线的斜率的最大值为 3，

故当且仅当 $a \geq 3$ 且 $b \geq 2$ 时，不等式 $f(x) \leq ax+b$ 在 $[0, +\infty)$ 上成立，

即 $a+b$ 的最小值为5.



【点评】 本题主要考查分段函数的应用，利用不等式和函数之间的关系利用数形结合是解决本题的关键.