

# 1991年新疆高考理科数学真题及答案

一、选择题：本大题共15小题；每小题3分，共45分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。把所选项前的字母填在题后括号内。

(1) 已知 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ，并且 $\alpha$ 是第二象限的角，那么 $\operatorname{tg} \alpha$ 的值等于 ( )

- (A)  $-\frac{4}{3}$                       (B)  $-\frac{3}{4}$                       (C)  $\frac{3}{4}$                       (D)  $\frac{4}{3}$

(2) 焦点在 $(-1, 0)$ ，顶点在 $(1, 0)$ 的抛物线方程是 ( )

- (A)  $y^2=8(x+1)$                       (B)  $y^2=-8(x+1)$   
(C)  $y^2=8(x-1)$                       (D)  $y^2=-8(x-1)$

(3) 函数 $y=\cos^4 x - \sin^4 x$ 的最小正周期是 ( )

- (A)  $\frac{\pi}{2}$                       (B)  $\pi$                       (C)  $2\pi$                       (D)  $4\pi$

(4) 如果把两条异面直线看成“一对”，那么六棱锥的棱所在的12条直线中，异面直线共有 ( )

- (A) 12对                      (B) 24对                      (C) 36对                      (D) 48对

(5) 函数 $y=\sin(2x+\frac{5\pi}{2})$ 的图像的一条对称轴的方程是 ( )

- (A)  $x=-\frac{\pi}{2}$                       (B)  $x=-\frac{\pi}{4}$   
(C)  $x=\frac{\pi}{8}$                       (D)  $x=\frac{5\pi}{4}$

(6) 如果三棱锥 $S-ABC$ 的底面是不等边三角形，侧面与底面所成的二面角都相等，且顶点 $S$ 在底面的射影 $O$ 在 $\triangle ABC$ 内，那么 $O$ 是 $\triangle ABC$ 的 ( )

- (A) 垂心                      (B) 重心                      (C) 外心                      (D) 内心

(7) 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列，且 $a_n > 0$ ， $a_2 a_4 + 2 a_3 a_5 + a_4 a_6 = 25$ ，那么 $a_3 + a_5$ 的值等于 ( )

- (A) 5                      (B) 10                      (C) 15                      (D) 20

(8) 如果圆锥曲线的极坐标方程为 $\rho = \frac{16}{5-3\cos\theta}$ ，那么它的焦点的极坐标为 ( )

- (A)  $(0, 0), (6, \pi)$                       (B)  $(-3, 0), (3, 0)$   
(C)  $(0, 0), (3, 0)$                       (D)  $(0, 0), (6, 0)$

(9) 从4台甲型和5台乙型电视机中任意取出3台，其中至少要有甲型与乙型电视机各1台，则不同的取法共有 ( )

- (A) 140 种                      (B) 84 种                      (C) 70 种                      (D) 35 种

(10) 如果  $AC < 0$  且  $BC < 0$ , 那么直线  $Ax + By + C = 0$  不通过 ( )

- (A) 第一象限                      (B) 第二象限                      (C) 第三象限                      (D) 第四象限

(11) 设甲、乙、丙是三个命题. 如果甲是乙的必要条件; 丙是乙的充分条件但不是乙的必要条件, 那么 ( )

- (A) 丙是甲的充分条件, 但不是甲的必要条件  
(B) 丙是甲的必要条件, 但不是甲的充分条件  
(C) 丙是甲的充要条件  
(D) 丙不是甲的充分条件, 也不是甲的必要条件

(12)  $\lim_{n \rightarrow \infty} [n(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{5}) \cdots (1 - \frac{1}{n+2})]$  的值等于 ( )

- (A) 0                      (B) 1                      (C) 2                      (D) 3

(13) 如果奇函数  $f(x)$  在区间  $[3, 7]$  上是增函数且最小值为 5, 那么  $f(x)$  在区间  $[-7, -3]$  上是 ( )

- (A) 增函数且最小值为 -5                      (B) 增函数且最大值为 -5  
(C) 减函数且最小值为 -5                      (D) 减函数且最大值为 -5

(14) 圆  $x^2 + 2x + y^2 + 4y - 3 = 0$  上到直线  $x + y + 1 = 0$  的距离为  $\sqrt{2}$  的点共有 ( )

- (A) 1 个                      (B) 2 个                      (C) 3 个                      (D) 4 个

(15) 设全集为  $\mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin x$ ,  $g(x) = \cos x$ ,  $M = \{x | f(x) \neq 0\}$ ,  $N = \{x | g(x) \neq 0\}$ , 那么集合

$\{x | f(x)g(x) = 0\}$  等于 ( )

- (A)  $\overline{M} \cap \overline{N}$                       (B)  $\overline{M} \cup N$                       (C)  $M \cup \overline{N}$                       (D)  $\overline{M} \cup \overline{N}$

二、填空题: 本大题共 5 小题; 每小题 3 分, 共 15 分. 把答案填在题中横线上.

(16)  $\arctg \frac{1}{3} + \arctg \frac{1}{2}$  的值是\_\_\_\_\_.

(17) 不等式  $6^{x^2+x-2} < 1$  的解集是\_\_\_\_\_.

(18) 已知正三棱台上底面边长为 2, 下底面边长为 4, 且侧棱与底面所成的角是  $45^\circ$ , 那么这个正三棱台的体积等于\_\_\_\_\_.

(19)  $(ax+1)^7$ 的展开式中,  $x^3$ 的系数是 $x^2$ 的系数与 $x^4$ 的系数的等差中项. 若实数 $a>1$ , 那么 $a=$ \_\_\_\_\_.

(20) 在球面上有四个点 $P, A, B, C$ , 如果 $PA, PB, PC$ 两两互相垂直, 且 $PA=PB=PC=a$ . 那么这个球面的面积是\_\_\_\_\_.

三、解答题: 本大题共6小题; 共60分.

(21) (本小题满分8分)

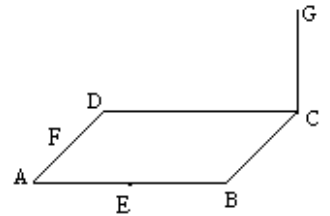
求函数 $y=\sin^2x+2\sin x\cos x+3\cos^2x$ 的最小值, 并写出使函数 $y$ 取最小值的 $x$ 的集合.

(22) (本小题满分8分)

已知复数 $z=1+i$ , 求复数 $\frac{z^2-3z+6}{z+1}$ 的模和辐角的主值.

(23) (本小题满分10分)

已知 $ABCD$ 是边长为4的正方形,  $E, F$ 分别是 $AB, AD$ 的中点,  $GC$ 垂直于 $ABCD$ 所在的平面, 且 $GC=2$ . 求点 $B$ 到平面 $EFB$ 的距离.



(24) (本小题满分10分)

根据函数单调性的定义, 证明函数 $f(x)=-x^3+1$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数.

(25) (本小题满分12分)

已知 $n$ 为自然数, 实数 $a>1$ , 解关于 $x$ 的不等式

$$\log_a x - \log_{a^2} x + 12 \log_{a^3} x + \dots + n(n-2)^{n-1} \log_{a^n} x > \frac{1-(-2)^n}{3} \log_a (x^2-a)$$

(26) (本小题满分12分)

双曲线的中心在坐标原点 $O$ , 焦点在 $x$ 轴上, 过双曲线右焦点且斜率为 $\sqrt{\frac{3}{5}}$ 的直线交双曲线于 $P, Q$ 两点. 若 $OP \perp OQ$ ,  $|PQ|=4$ , 求双曲线的方程.

参考答案

说明:

一、本解答指出了每题所要考查的主要知识和能力,并给出了一种或几种较为常见的解法,如果考生的解法与本解答不同,可根据试题的主要考查内容参照评分标准制定相应评分细则.

二、每题都要评阅到底,不要因为考生的解答中出现错误而中断对该题的评阅.当考生的解答在某一步出现错误,影响了后继部分时,如果该步以后的解答未改变这一题的内容和难度时,可视影响的程度决定后面部分的给分,但不得超过后面部分应给分数的一半;如果这一步以后的解答有较严重的错误,就不给分.

三、为了阅卷方便,本试题解答中的推导步骤写得较为详细,允许考生在解题过程中合理省略非关键性的推导步骤.

四、解答右端所注分数,表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

五、只给整数分数.

一、选择题. 本题考查基本知识和基本运算. 每小题 3 分, 满分 45 分.

- (1)A            (2)D            (3)B            (4)B            (5)A            (6) D            (7)A            (8)D  
(9)C            (10)C            (11)A            (12)C            (13) B            (14)C            (15)D

二、填空题. 本题考查基本知识和基本运算. 每小题 3 分, 满分 15 分.

- (16)  $\frac{\pi}{4}$             (17)  $\{x|-2 < x < 1\}$             (18)  $\frac{14}{3}$             (19)  $1 + \frac{\sqrt{10}}{5}$             (20)  $3\pi a^2$

三、解答题

(21) 本小题考查三角函数式的恒等变形及三角函数的性质. 满分8分.

解:  $y = \sin^2 x + 2\sin x \cos x + 3\cos^2 x$

$= (\sin^2 x + \cos^2 x) + 2\sin x \cos x + 2\cos^2 x$             ——1

分

$= 1\sin 2x(1 + \cos 2x)$             ——3

分

$$=2+\sin 2x+\cos 2x$$

$$=2+\sqrt{2} \sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right). \quad \text{---5分}$$

$$\text{当}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-1\text{时}y\text{取得最小值}2-\sqrt{2}. \quad \text{---6分}$$

$$\text{使}y\text{取最小值的}x\text{的集合为}\left\{x\mid x=k\pi-\frac{3}{8}\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}. \quad \text{---8分}$$

(22) 本小题考查复数基本概念和运算能力. 满分8分.

$$\begin{aligned} \text{解: } \frac{z^2-3z+6}{z+1} &= \frac{(1+i)^2-3(1+i)+6}{1+i+1} \\ &= \frac{3-i}{2+i} \quad \text{---2分} \\ &= 1-i. \quad \text{---4分} \end{aligned}$$

$$1-i\text{的模}r=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}.$$

因为 $1-i$ 对应的点在第四象限且辐角的正切 $\operatorname{tg}\theta=-1$ , 所以辐角的主值

$$\theta=\frac{7}{4}\pi. \quad \text{---8分}$$

(23) 本小题考查直线与直线, 直线与平面, 平面与平面的位置关系, 以及逻辑推理和空间想象能力. 满分10分.

解 如图, 连结 $EG$ 、 $FG$ 、 $EF$ 、 $BD$ 、 $AC$ 、 $EF$ 、 $BD$ 分别交 $AC$ 于 $H$ 、 $O$ . 因为 $ABCD$ 是正方形,  $E$ 、 $F$ 分别为 $AB$ 和 $AD$ 的中点, 故 $EF\parallel BD$ ,  $H$ 为 $AO$ 的中点.

$BD$ 不在平面 $EFG$ 上. 否则, 平面 $EFG$ 和平面 $ABCD$ 重合, 从而点 $G$ 在平面的 $ABCD$ 上, 与题设矛盾.

由直线和平面平行的判定定理知 $BD\parallel$ 平面 $EFG$ , 所以 $BD$ 和平面 $EFG$ 的距离就是点 $B$ 到平面 $EFG$ 的距离. ---4分

$$\because BD\perp AC,$$

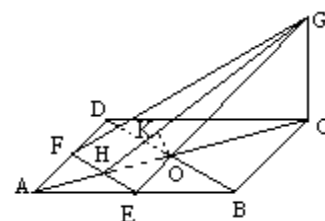
$$\therefore EF\perp HC.$$

$$\because GC\perp\text{平面}ABCD,$$

$$\therefore EF\perp GC,$$

$$\therefore EF\perp\text{平面}HCG.$$

$$\therefore \text{平面}EFG\perp\text{平面}HCG, HG\text{是这两个垂直平面的交线.}$$



---6分

作 $OK\perp HG$ 交 $HG$ 于点 $K$ , 由两平面垂直的性质定理知 $OK\perp$ 平面 $EFG$ , 所以线段 $OK$ 的长就

是点B到平面EFG的距离.

——8分

∵ 正方形ABCD的边长为4, GC=2,

$$\therefore AC=4\sqrt{2}, HO=\sqrt{2}, HC=3\sqrt{2}.$$

$$\therefore \text{在Rt}\triangle HCG\text{中, } HG=\sqrt{(3\sqrt{2})^2+2^2}=\sqrt{22}.$$

由于Rt△HKO和Rt△HCG有一个锐角是公共的, 故Rt△HKO~△HCG.

$$\therefore OK=\frac{HO \cdot GC}{HG}=\frac{\sqrt{2} \times 2}{\sqrt{22}}=\frac{2\sqrt{11}}{11}.$$

$$\text{即点B到平面EFG的距离为}\frac{2\sqrt{11}}{11}.$$

——10分

注: 未证明“BD不在平面EFG上”不扣分.

(24) 本小题考查函数单调性的概念, 不等式的证明, 以及逻辑推理能力. 满分10分.

证法一: 在 $(-\infty, +\infty)$ 上任取 $x_1, x_2$ 且 $x_1 < x_2$

——1分

$$\text{则 } f(x_2) - f(x_1) = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$$

——3分

∵  $x_1 < x_2$ ,

∴  $x_1 - x_2 < 0$ .

——4分

当 $x_1x_2 < 0$ 时, 有 $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - x_1x_2 > 0$ ;

——6分

当 $x_1x_2 \geq 0$ 时, 有 $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 > 0$ ;

$$\therefore f(x_2) - f(x_1) = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) < 0.$$

$$\text{即 } f(x_2) < f(x_1)$$

——8分

所以, 函数 $f(x) = -x^3 + 1$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数.

——10分

分

证法二: 在 $(-\infty, +\infty)$ 上任取 $x_1, x_2$ , 且 $x_1 < x_2$ ,

——1分

$$\text{则 } f(x_2) - f(x_1) = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2).$$

$$\text{即 } f(x_2) < f(x_1)$$

——3分

$$\because x_1 < x_2,$$

$$\therefore x_1 - x_2 < 0.$$

——4分

$\because x_1, x_2$  不同时为零,

$$\therefore x_1^2 + x_2^2 > 0.$$

$$\text{又 } \because x_1^2 + x_2^2 > \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \geq |x_1 x_2| \geq -x_1 x_2$$

$$\therefore x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 > 0,$$

$$\therefore f(x_2) - f(x_1) = (x_1 - x_2)$$

$$(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) < 0. \quad \text{——8分}$$

$$\text{即 } f(x_2) < f(x_1).$$

所以, 函数  $f(x) = -x^3 + 1$  在  $(-\infty, +\infty)$  上是减函数.

——10

分

(25) 本小题考查对数、数列、解不等式等基本知识, 以及分析问题的能力. 满分12分.

解: 利用对数换底公式, 原不等式左端化为

$$\begin{aligned} & \log_a x - 4 \cdot \frac{\log_a x}{\log_a a^2} + 12 \cdot \frac{\log_a x}{\log_a a^3} + \cdots + n(-2)^{n-1} \cdot \frac{\log_a x}{\log_a a^n} \\ &= [1 - 2 + 4 + \cdots + (-2)^{n-1}] \log_a x \\ &= \frac{1 - (-2)^n}{3} \log_a x \end{aligned}$$

$$\text{故原不等式可化为 } \frac{1 - (-2)^n}{3} \log_a x > \frac{1 - (-2)^n}{3} \log_a (x^2 - a). \quad \textcircled{1}$$

当  $n$  为奇数时,  $\frac{1 - (-2)^n}{3} > 0$ , 不等式①等价于

$$\log_a x > \log_a (x^2 - a). \quad \textcircled{2}$$

因为  $a > 1$ , ②式等价于

$$\begin{cases} x > 0 \\ x^2 - a > 0 \\ x > x^2 - a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ |x| > \sqrt{a} \\ x^2 - x - a < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \sqrt{a} \\ \frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2} \end{cases} \quad \text{---6分}$$

$$\text{因为 } \frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2} < 0, \quad \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2} > \frac{\sqrt{4a}}{2} = \sqrt{a},$$

$$\text{所以, 不等式②的解集为 } \{x \mid \sqrt{a} < x < \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}\}. \quad \text{---8分}$$

当 $n$ 为偶数时,  $\frac{1 - (-2)^n}{3} < 0$ , 不等式①等价于

$$\log_a x > \log_a (x^2 - a). \quad \text{③}$$

因为 $a > 1$ , ③式等价于

$$\begin{cases} x > 0 \\ x^2 - a > 0 \\ x < x^2 - a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ |x| > \sqrt{a} \\ x^2 - x - a > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \sqrt{a} \\ x < \frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2} \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x > \sqrt{a} \\ x > \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2} \end{cases} \quad \text{---10分}$$

$$\text{因为 } \frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2} < 0, \quad \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2} > \frac{\sqrt{4a}}{2} = \sqrt{a}, \quad \text{---12分}$$

$$\text{所以, 不等式③的解集为 } \{x \mid x > \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}\}.$$

综合得: 当 $n$ 为奇数时, 原不等式的解集是  $\{x \mid \sqrt{a} < x < \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}\}$ ;

当 $n$ 为偶数时, 原不等式的解集是  $\{x \mid x > \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}\}$

(26) 本小题考查双曲线性质，两点距离公式，两直线垂直条件，代数二次方程等基本知识，以及综合分析能力。满分12分。

解法一：设双曲线的方程为  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 。

依题意知，点  $P, Q$  的坐标满足方程组

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 & \text{①} \\ y = \sqrt{\frac{3}{5}}(x-c) \quad (\text{其中 } c = \sqrt{a^2 + b^2}) & \text{②} \end{cases}$$

将②式代入①式，整理得

$$(5b^2 - 3a^2)x^2 + 6a^2cx - (3a^2c^2 + 5a^2b^2) = 0. \quad \text{③} \quad \text{---3分}$$

设方程③的两个根为  $x_1, x_2$ ，若  $5b^2 - 3a^2 = 0$ ，则  $\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{3}{5}}$ ，即直线②与双曲线①的两条渐近线中的一条平行，故与双曲线只能有一个交点同，与题设矛盾，所以  $5b^2 - 3a^2 \neq 0$ 。

根据根与系数的关系，有

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{6a^2c}{5b^2 - 3a^2} & \text{④} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1x_2 = -\frac{3a^2c^2 + 5a^2b^2}{5b^2 - 3a^2} & \text{⑤} \end{cases} \quad \text{---6分}$$

由于  $P, Q$  在直线  $y = \sqrt{\frac{3}{5}}(x-c)$  上，可记为

$$P(x_1, \sqrt{\frac{3}{5}}(x_1 - c)), \quad Q(x_2, \sqrt{\frac{3}{5}}(x_2 - c)).$$

$$\text{由 } OP \perp OQ \text{ 得 } \frac{\sqrt{\frac{3}{5}}(x_1 - c)}{x_1} \cdot \frac{\sqrt{\frac{3}{5}}(x_2 - c)}{x_2} = -1,$$

$$\text{整理得 } 3c(x_1 + x_2) - 8x_1x_2 - 3c^2 = 0. \quad \text{⑥}$$

将④、⑤式及  $c^2 = a^2 + b^2$  代入⑥式，并整理得

$$3a^4 + 8a^2b^2 - 3b^4 = 0,$$

$$(a^2 + 3b^2)(3a^2 - b^2) = 0.$$

因为  $a^2+3b^2 \neq 0$ , 解得  $b^2=3a^2$ ,

所以  $c=\sqrt{a^2+b^2}=2a$ . ——8分

由  $|PQ|=4$ , 得  $(x_2-x_1)^2=[\sqrt{\frac{3}{5}}(x_2-c)-\sqrt{\frac{3}{5}}(x_1-c)]^2=4^2$ .

整理得  $(x_1+x_2)^2-4x_1x_2-10=0$ . ⑦

将④, ⑤式及  $b^2=3a^2$ ,  $c=2a$ 代入⑦式, 解得  $a^2=1$ . ——10分

将  $a^2=1$ 代入  $b^2=3a^2$ 得  $b^2=3$ .

故所求双曲线方程为  $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ . ——12分

解法二: ④式以上同解法一. ——4分

解方程③得  $x_1=\frac{-3a^2c+\sqrt{40ab^2}}{5b^2-3a^2}$ ,  $x_2=\frac{-3a^2c-\sqrt{40ab^2}}{5b^2-3a^2}$  ④ ——6分

由于  $P, Q$ 在直线  $y=\sqrt{\frac{3}{5}}(x-c)$ 上, 可记为  $P(x_1, \sqrt{\frac{3}{5}}(x_1-c))$ ,  $Q(x_2, \sqrt{\frac{3}{5}}(x_2-c))$ .

由  $OP \perp OQ$ , 得  $x_1x_2 + \sqrt{\frac{3}{5}}(x_1-c) \cdot \sqrt{\frac{3}{5}}(x_2-c)=0$ . ⑤

将④式及  $c^2=a^2b^2$ 代入⑤式并整理得  $3a^4+8a^2b^2-3b^4=0$ ,

即  $(a^2+3b^2)(3a^2-b^2)=0$ .

因  $a^2+3b^2 \neq 0$ , 解得  $b^2=3a^2$ . ——8分

由  $|PQ|=4$ , 得  $(x_2-x_1)^2+[\sqrt{\frac{3}{5}}(x_2-c)-\sqrt{\frac{3}{5}}(x_1-c)]^2=4^2$ .

即  $(x^2-x^1)2=10$ . ⑥

将④式代入⑥式并整理得

$(5b^2-3a^2)^2-16a^2b^2=0$ . ——10分

将  $b^2=3a^2$ 代入上式, 得  $a^2=1$ ,

将  $a^2=1$ 代入  $b^2=3a^2$ 得  $b^2=3$ .

故所求双曲线方程为

$$x^2 - \frac{y^2}{3} = 1.$$

——12分