2016年北京市高考数学试卷（文科）

参考答案与试题解析

一、选择题（共8小题，每小题5分，满分40分）

1．（5分）已知集合 $A=\{x|2<x<4\}$，$B=\{x|x<3或x>5\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．$\{x|2<x<5\}$　B．$\{x|x<4或x>5\}$　C．$\{x|2<x<3\}$　D．$\{x|x<2或x>5\}$

【考点】1E：交集及其运算．

【专题】11：计算题；35：转化思想；49：综合法；5J：集合．

【分析】由已知条件利用交集的定义能求出 $A\cap B$．

【解答】解：∵集合 $A=\{x|2<x<4\}$，$B=\{x|x<3或x>5\}$，

∴$A\cap B=\{x|2<x<3\}$．

故选：C．

【点评】本题考查交集的求法，是基础题，解题时要认真审题，注意交集的定义的合理运用．

2．（5分）复数 $\frac{1+2i}{2-i}=$（　　）

A．i　B．1+i　C．﹣i　D．1﹣i

【考点】A5：复数的运算．

【专题】11：计算题；35：转化思想；5N：数系的扩充和复数．

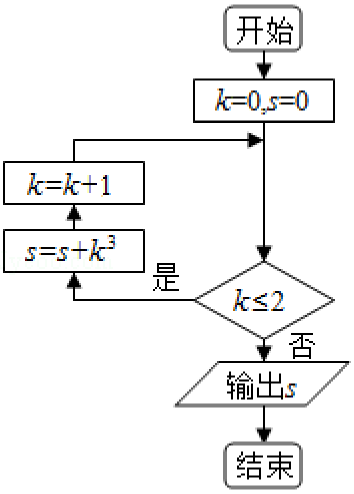
【分析】将分子分线同乘2+i，整理可得答案．

【解答】解：$\frac{1+2i}{2-i}=\frac{(1+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{5i}{5}=i$，

故选：A．

【点评】本题考查的知识点是复数代数形式的加减运算，共轭复数的定义，难度不大，属于基础题．

3．（5 分）执行如图所示的程序框图，输出 s 的值为（　　）



A．8　　　　　　B．9　　　　　　C．27　　　　　　D．36

【考点】EF：程序框图．

【专题】11：计算题；28：操作型；5K：算法和程序框图．

【分析】根据已知的程序框图可得，该程序的功能是利用循环结构计算并输出变量 S 的值，模拟程序的运行过程，可得答案．

【解答】解：当 k=0 时，满足进行循环的条件，故 S=0，k=1，

当 k=1 时，满足进行循环的条件，故 S=1，k=2，

当 k=2 时，满足进行循环的条件，故 S=9，k=3，

当 k=3 时，不满足进行循环的条件，

故输出的 S 值为 9，

故选：B．

【点评】本题考查的知识点是程序框图，当循环次数不多，或有规律可循时，可采用模拟程序法进行解答．

4．（5 分）下列函数中，在区间（﹣1，1）上为减函数的是（　　）

A．$y=\frac{1}{1-x}$　　　　B．y=cosx　　　　C．y=ln（x+1）　　　　D．$y=2^{-x}$

【考点】3E：函数单调性的性质与判断．

【专题】33：函数思想；49：综合法；51：函数的性质及应用．

【分析】根据函数单调性的定义，余弦函数单调性，以及指数函数的单调性便可判断每个选项函数在（﹣1，1）上的单调性，从而找出正确选项．

【解答】解：A．x 增大时，﹣x 减小，1﹣x 减小，∴$\frac{1}{1-x}$增大；

∴函数 $y=\frac{1}{1-x}$在（﹣1，1）上为增函数，即该选项错误；

B．y=cosx 在（﹣1，1）上没有单调性，∴该选项错误；

C．x 增大时，x+1 增大，ln（x+1）增大，∴y=ln（x+1）在（﹣1，1）上为增函数，即该选项错误；

D．$y=2^{-x}=(\frac{1}{2})^{x}$；

∴根据指数函数单调性知，该函数在（﹣1，1）上为减函数，∴该选项正确．

故选：D．

【点评】考查根据单调性定义判断函数在一区间上的单调性的方法，以及余弦函数和指数函数的单调性，指数式的运算．

5．（5 分）圆（x+1）^{2}+y^2=2 的圆心到直线 y=x+3 的距离为（　　）

A．1　　B．2　　C．$\sqrt{2}$　　D．$2\sqrt{2}$

【考点】IT：点到直线的距离公式；J1：圆的标准方程．

【专题】11：计算题；35：转化思想；49：综合法；5B：直线与圆．

【分析】先求出圆（x+1）^{2}+y^2=2 的圆心，再利用点到到直线 y=x+3 的距离公式求解．

【解答】解：∵圆（x+1）^{2}+y^2=2 的圆心为（﹣1，0），

∴圆（x+1）^{2}+y^2=2 的圆心到直线 y=x+3 的距离为：

$d=\frac{|-1+3|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$．

故选：C．

【点评】本题考查圆心到直线的距离的求法，是基础题，解题时要认真审题，注意点到直线的距离公式和圆的性质的合理运用．

6．（5 分）从甲、乙等 5 名学生中随机选出 2 人，则甲被选中的概率为（　　）

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{2}{5}$　　C. $\frac{8}{25}$　　D. $\frac{9}{25}$

【考点】CB：古典概型及其概率计算公式．

【专题】5I：概率与统计．

【分析】从甲、乙等5名学生中随机选出2人，先求出基本事件总数，再求出甲被选中包含的基本事件的个数，同此能求出甲被选中的概率．

【解答】解：从甲、乙等5名学生中随机选出2人，

基本事件总数 $n=C_5^2=10$，

甲被选中包含的基本事件的个数 $m=C_1^1C_4^1=4$，

∴甲被选中的概率 $p=\frac{m}{n}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$．

故选：B．

【点评】本题考查概率的求法，是基础题，解题时要认真审题，注意等可能事件概率计算公式的合理运用．

7．（5分）已知A（2，5），B（4，1）．若点P（x，y）在线段AB上，则2x﹣y的最大值为（　　）

A．﹣1　　B．3　　C．7　　D．8

【考点】7C：简单线性规划．

【专题】11：计算题；29：规律型；31：数形结合；35：转化思想；5T：不等式．

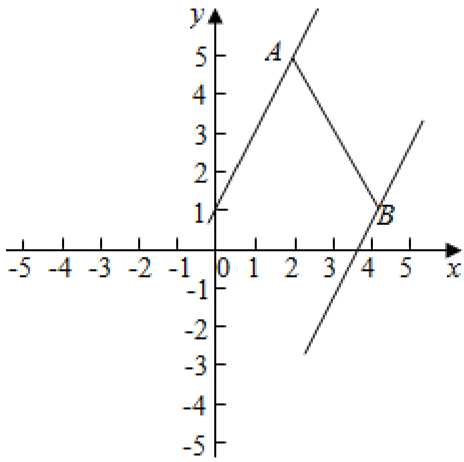
【分析】平行直线z=2x﹣y，判断取得最值的位置，求解即可．

【解答】解：如图A（2，5），B（4，1）．若点P（x，y）在线段AB上，

令z=2x﹣y，则平行y=2x﹣z当直线经过B时截距最小，Z取得最大值，

可得2x﹣y的最大值为：2×4﹣1=7．

故选：C．



【点评】本题考查线性规划的简单应用，判断目标函数经过的点，是解题的关键．

8．（5 分）某学校运动会的立定跳远和 30 秒跳绳两个单项比赛分成预赛和决赛两个阶段，表中为 10 名学生的预赛成绩，其中有三个数据模糊．

学生序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
立定跳远（单位：米）	1.96	1.92	1.82	1.80	1.78	1.76	1.74	1.72	1.68	1.60
30 秒跳绳（单位：次）	63	a	75	60	63	72	70	a﹣1	b	65

在这 10 名学生中，进入立定跳远决赛的有 8 人，同时进入立定跳远决赛和 30 秒跳绳决赛的有 6 人，则（　　）

A．2 号学生进入 30 秒跳绳决赛　　B．5 号学生进入 30 秒跳绳决赛

C．8 号学生进入 30 秒跳绳决赛　　D．9 号学生进入 30 秒跳绳决赛

【考点】2K：命题的真假判断与应用．

【专题】2A：探究型；5L：简易逻辑；5M：推理和证明．

【分析】根据已知中这 10 名学生中，进入立定跳远决赛的有 8 人，同时进入立定跳远决赛和 30 秒跳绳决赛的有 6 人，逐一分析四个答案的正误，可得结论．

【解答】解：∵这 10 名学生中，进入立定跳远决赛的有 8 人，

故编号为 1，2，3，4，5，6，7，8 的学生进入立定跳远决赛，

又由同时进入立定跳远决赛和 30 秒跳绳决赛的有 6 人，

则 3，6，7 号同学必进入 30 秒跳绳决赛，

剩下 1，2，4，5，8 号同学的成绩分别为：63，a，60，63，a﹣1 有且只有 3 人进入 30 秒跳绳决赛，

故成绩为 63 的同学必进入 30 秒跳绳决赛，

故选：B．

【点评】本题考查的知识点是推理与证明，正确利用已知条件得到合理的逻辑推理过程，是解答的关键．

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）

9．（5 分）已知向量$\vec{a}$=（1，$\sqrt{3}$），$\vec{b}$=（$\sqrt{3}$，1），则$\vec{a}$与$\vec{b}$夹角的大小为__$\frac{\pi}{6}$__．

【考点】9S：数量积表示两个向量的夹角．

【专题】11：计算题；4O：定义法；5A：平面向量及应用．

【分析】根据已知中向量的坐标，代入向量夹角公式，可得答案．

【解答】解：∵向量$\vec{a}$=（1，$\sqrt{3}$），$\vec{b}$=（$\sqrt{3}$，1），

∴$\vec{a}$与$\vec{b}$夹角 θ 满足：

$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{2\sqrt{3}}{2\times2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

又∵θ∈[0，π]，

∴$\theta=\frac{\pi}{6}$，

故答案为：$\frac{\pi}{6}$．

【点评】本题考查的知识点是平面向量的夹角公式，熟练掌握平面向量的夹角公式，是解答的关键．

10．（5 分）函数 f（x）=$\frac{x}{x-1}$（x≥2）的最大值为__2__．

【考点】34：函数的值域．

【专题】11：计算题；33：函数思想；49：综合法；51：函数的性质及应用．

【分析】分离常数便可得到$f(x)=1+\frac{1}{x-1}$，根据反比例函数的单调性便可判断该函数在[2，+∞）上为减函数，从而 x=2 时 f（x）取最大值，并可求出该最大值．

【解答】解：$f(x)=\frac{x}{x-1}=\frac{x-1+1}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}$；

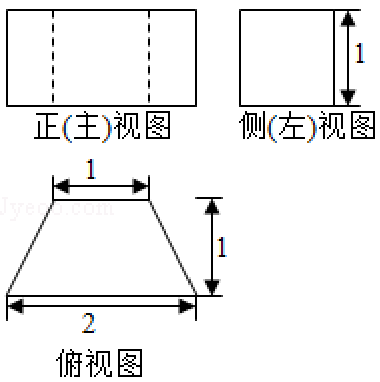
∴f（x）在[2，+∞）上单调递减；

∴x=2 时，f（x）取最大值 2．

故答案为：2．

【点评】考查函数最大值的概念及求法，分离常数法的运用，以及反比例函数的单调性，根据函数单调性求最值的方法．

11．（5 分）某四棱柱的三视图如图所示，则该四棱柱的体积为__$\frac{3}{2}$__．



【考点】L!：由三视图求面积、体积．

【专题】11：计算题；5F：空间位置关系与距离；5Q：立体几何．

【分析】由已知中的三视图可得：该几何体上部是一个以俯视图为底面四棱柱，进而可得答案．

【解答】解：由已知中的三视图可得：该几何体上部是一个以俯视图为底面四棱柱，

棱柱的底面面积 $S=\frac{1}{2}\times$（1+2）$\times 1=\frac{3}{2}$，

棱柱的高为 1，

故棱柱的体积 V=$\frac{3}{2}$，

故答案为：$\frac{3}{2}$

【点评】本题考查的知识点是由三视图，求体积和表面积，根据已知的三视图，判断几何体的形状是解答的关键．

12．（5 分）已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0，b＞0）的一条渐近线为 2x+y=0，一个焦点为（$\sqrt{5}$，0），则 a=__1__，b=__2__．

【考点】KC：双曲线的性质．

【专题】11：计算题；35：转化思想；49：综合法；5D：圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】由双曲的一条渐近线为 2x+y=0，一个焦点为（$\sqrt{5}$，0），列出方程组，由此能出 a，b．

【解答】解：∵双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0，b＞0）的一条渐近线为 2x+y=0，一个焦点为（$\sqrt{5}$，0），

∴$\begin{cases}\frac{b}{a}=2\\ \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5}\end{cases}$，

解得 a=1，b=2．

故答案为：1，2．

【点评】本题考查双曲线中实数值的求法，是基础题，解题时要认真审题，注意双曲线的性质的合理运用．

13．（5 分）在△ABC 中，∠A=$\frac{2\pi}{3}$，a=$\sqrt{3}$c，则$\frac{b}{c}$=__1__．

【考点】HP：正弦定理．

【专题】11：计算题；29：规律型；35：转化思想；58：解三角形．

【分析】利用正弦定理求出 C 的大小，然后求出 B，然后判断三角形的形状，求解比值即可．

【解答】解：在△ABC 中，$\angle A=\frac{2\pi}{3}$，$a=\sqrt{3}c$，

由正弦定理可得：$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，

$\frac{\sqrt{3}c}{\sin\frac{2\pi}{3}}=\frac{c}{\sin C}$，$\sin C=\frac{1}{2}$，$C=\frac{\pi}{6}$，则 $B=\pi-\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$．

三角形是等腰三角形，B=C，则 b=c，

则$\frac{b}{c}=1$．

故答案为：1．

【点评】本题考查正弦定理的应用，三角形的判断，考查计算能力．

14．（5 分）某网店统计了连续三天售出商品的种类情况：第一天售出 19 种商品，第二天售出 13 种商品，第三天售出 18 种商品；前两天都售出的商品有 3 种，后两天都售出的商品有 4 种，则该网店

①第一天售出但第二天未售出的商品有 16 种；

②这三天售出的商品最少有 29 种．

【考点】^7：容斥原理；18：集合的包含关系判断及应用．

【专题】11：计算题；35：转化思想；49：综合法；5J：集合．

【分析】①由题意画出图形得答案；②求出前两天所受商品的种数，由特殊情况得到三天售出的商品最少种数．

【解答】解：①设第一天售出商品的种类集为 A，第二天售出商品的种类集为 B，第三天售出商品的种类集为 C，

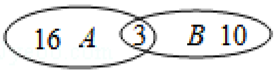
如图，

则第一天售出但第二天未售出的商品有 19﹣3=16 种；

②由①知，前两天售出的商品种类为 19+13﹣3=29 种，第三天售出但第二天未售出的商品有 18﹣4=14 种，当这 14 种

商品第一天售出但第二天未售出的 16 种商品中时，即第三天没有售出前两天的商品时，这三天售出的商品种类最少为 29 种.

故答案为：①16；②29.



【点评】本题考查集合的包含关系及其应用，考查了集合中元素的个数判断，考查学生的逻辑思维能力，是中档题.

三、解答题（共 6 小题，满分 80 分）

15．（13 分）已知$\{a_n\}$是等差数列，$\{b_n\}$是等比数列，且 $b_2=3$，$b_3=9$，$a_1=b_1$，$a_{14}=b_4$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设 $c_n=a_n+b_n$，求数列$\{c_n\}$的前 n 项和.

【考点】8M：等差数列与等比数列的综合.

【专题】34：方程思想；48：分析法；54：等差数列与等比数列.

【分析】（1）设$\{a_n\}$是公差为 d 的等差数列，$\{b_n\}$是公比为 q 的等比数列，运用通项公式可得 q=3，d=2，进而得到所求通项公式；

（2）求得 $c_n=a_n+b_n=2n-1+3^{n-1}$，再由数列的求和方法：分组求和，运用等差数列和等比数列的求和公式，计算即可得到所求和.

【解答】解：（1）设$\{a_n\}$是公差为 d 的等差数列，

$\{b_n\}$是公比为 q 的等比数列，

由 $b_2=3$，$b_3=9$，可得 $q=\frac{b_3}{b_2}=3$，

$b_n=b_2q^{n-2}=3\bullet 3^{n-2}=3^{n-1}$；

即有 $a_1=b_1=1$，$a_{14}=b_4=27$，

则 $d=\frac{a_{14}-a_1}{13}=2$，

则 $a_n=a_1+(n-1)d=1+2(n-1)=2n-1$；

（2）$c_n=a_n+b_n=2n-1+3^{n-1}$，

则数列$\{c_n\}$的前 n 项和为

（1+3+…+（2n﹣1））+（1+3+9+…+3^{n-1}）$=\frac{1}{2}n\bullet 2n+\frac{1-3^n}{1-3}$

$=n^2+\frac{3^n-1}{2}$.

【点评】本题考查等差数列和等比数列的通项公式和求和公式的运用，同时考查数列的求和方法：分组求和，考查运算能力，属于基础题．

16．（13 分）已知函数 f（x）=2sinωxcosωx+cos2ωx（ω＞0）的最小正周期为 π．

（1）求 ω 的值；

（2）求 f（x）的单调递增区间．

【考点】H1：三角函数的周期性；HM：复合三角函数的单调性．

【专题】11：计算题；33：函数思想；4A：数学模型法；57：三角函数的图像与性质．

【分析】（1）利用倍角公式结合两角和的正弦化积，再由周期公式列式求得 ω 的值；

（2）直接由相位在正弦函数的增区间内求解 x 的取值范围得 f（x）的单调递增区间．

【解答】解：（1）f（x）=2sinωxcosωx+cos2ωx

$=\sin 2\omega x+\cos 2\omega x=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\omega x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2\omega x)=\sqrt{2}\sin(2\omega x+\frac{\pi}{4})$.

由 $T=\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$，得 ω=1；

（2）由（1）得，f（x）$=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$.

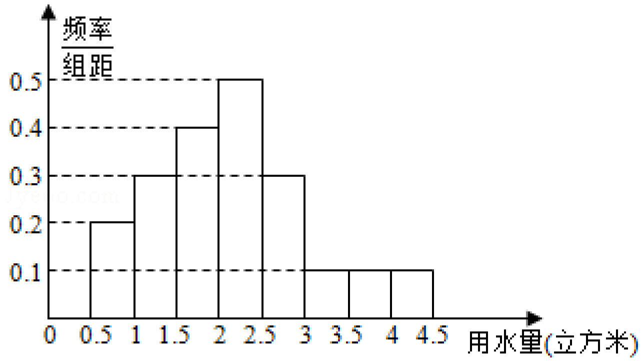
再由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$，得 $-\frac{3\pi}{8}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{8}+k\pi$，$k\in Z$.

∴f（x）的单调递增区间为$[-\frac{3\pi}{8}+k\pi,\ \frac{\pi}{8}+k\pi]$（k∈Z）．

【点评】本题考查 y=Asin（ωx+φ）型函数的图象和性质，考查了两角和的正弦，属中档题．

17．（13 分）某市居民用水拟实行阶梯水价，每人月用水量中不超过 w 立方米的部分按 4 元/立方米收费，超出 w 立方米的部分按 10 元/立方米收费，从该市

随机调查了10000位居民，获得了他们某月的用水量数据，整理得到如图频率分布直方图：



（1）如果w为整数，那么根据此次调查，为使80%以上居民在该月的用水价格为4元/立方米，w至少定为多少？

（2）假设同组中的每个数据用该组区间的右端点值代替，当w=3时，估计该市居民该月的人均水费．

【考点】B2：简单随机抽样；B8：频率分布直方图．

【专题】11：计算题；35：转化思想；49：综合法；5I：概率与统计．

【分析】（1）由频率分布直方图得：用水量在[0.5，1）的频率为0.1，用水量在[1，1.5）的频率为0.15，用水量在[1.5，2）的频率为0.2，用水量在[2，2.5）的频率为0.25，用水量在[2.5，3）的频率为0.15，用水量在[3，3.5）的频率为0.05，用水量在[3.5，4）的频率为0.05，用水量在[4，4.5）的频率为0.05，由此能求出为使80%以上居民在该用的用水价为4元/立方米，w至少定为3立方米．

（2）当w=3时，利用频率分布直方图能求出该市居民的人均水费．

【解答】解：（1）由频率分布直方图得：

用水量在[0.5，1）的频率为0.1，

用水量在[1，1.5）的频率为0.15，

用水量在[1.5，2）的频率为0.2，

用水量在[2，2.5）的频率为0.25，

用水量在[2.5，3）的频率为0.15，

用水量在[3，3.5）的频率为0.05，

用水量在[3.5，4）的频率为 0.05，

用水量在[4，4.5）的频率为 0.05，

∵用水量小于等于 3 立方米的频率为 85%，

∴为使 80%以上居民在该用的用水价为 4 元/立方米，

∴w 至少定为 3 立方米．

（2）当 w=3 时，该市居民的人均水费为：

（0.1×1+0.15×1.5+0.2×2+0.25×2.5+0.15×3）×4+0.05×3×4+0.05×0.5×10+0.05×3×4+0.05×1×10+0.05×3×4+0.05×1.5×10=10.5，

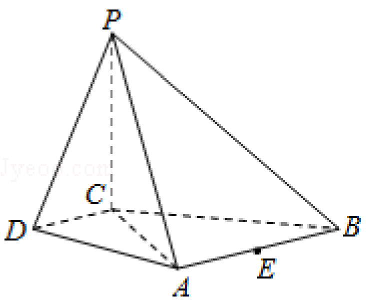
∴当 w=3 时，估计该市居民该月的人均水费为 10.5 元．

【点评】本题考查频率分布直方图的应用，考查当 w=3 时，该市居民该月的人均水费的估计的求法，是中档题，解题时要认真审题，注意频率分布直方图的合理运用．

18．（14 分）如图，在四棱锥 P﹣ABCD 中，PC⊥平面 ABCD，AB∥DC，DC⊥AC．

（1）求证：DC⊥平面 PAC；（2）求证：平面 PAB⊥平面 PAC；

（3）设点 E 为 AB 的中点，在棱 PB 上是否存在点 F，使得 PA∥平面 CEF？说明理由．



【考点】LP：空间中直线与平面之间的位置关系；LQ：平面与平面之间的位置关系．

【专题】15：综合题；35：转化思想；49：综合法；5Q：立体几何．

【分析】（1）利用线面垂直的判定定理证明 DC⊥平面 PAC；

（2）利用线面垂直的判定定理证明 AB⊥平面 PAC，即可证明平面 PAB⊥平面 PAC；

（3）在棱 PB 上存在中点 F，使得 PA∥平面 CEF．利用线面平行的判定定理证明．

【解答】（1）证明：∵PC⊥平面 ABCD，DC⊂平面 ABCD，

∴PC⊥DC，

∵DC⊥AC，PC∩AC=C，

∴DC⊥平面 PAC；

（2）证明：∵AB∥DC，DC⊥AC，

∴AB⊥AC，

∵PC⊥平面 ABCD，AB⊂平面 ABCD，

∴PC⊥AB，

∵PC∩AC=C，

∴AB⊥平面 PAC，

∵AB⊂平面 PAB，

∴平面 PAB⊥平面 PAC；

（3）解：在棱 PB 上存在中点 F，使得 PA∥平面 CEF．

∵点 E 为 AB 的中点，

∴EF∥PA，

∵PA⊄平面 CEF，EF⊂平面 CEF，

∴PA∥平面 CEF．

【点评】本题考查线面平行与垂直的证明，考查平面与平面垂直的证明，考查学生分析解决问题的能力，属于中档题．

19．（14 分）已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 过点 A（2，0），B（0，1）两点．

（1）求椭圆 C 的方程及离心率；

（2）设 P 为第三象限内一点且在椭圆 C 上，直线 PA 与 y 轴交于点 M，直线 PB 与 x 轴交于点 N，求证：四边形 ABNM 的面积为定值．

【考点】K3：椭圆的标准方程；KL：直线与椭圆的综合．

【专题】15：综合题；34：方程思想；49：综合法；5D：圆锥曲线的定义、性

质与方程.

【分析】(1) 由题意可得 a=2，b=1，则 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$，则椭圆 C 的方程可求，离心率为 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$；

(2) 设 P（x_0，y_0），求出 PA、PB 所在直线方程，得到 M，N 的坐标，求得 |AN|，|BM|．由 $S_{ABNM}=\frac{1}{2}\cdot|AN|\cdot|BM|$，结合 P 在椭圆上求得四边形 ABNM 的面积为定值 2.

【解答】(1) 解：∵椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 过点 A（2，0），B（0，1）两点，

∴a=2，b=1，则 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$，

∴椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$，离心率为 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$；

(2) 证明：如图，

设 P（x_0，y_0），则 $k_{PA}=\frac{y_0}{x_0-2}$，PA 所在直线方程为 $y=\frac{y_0}{x_0-2}(x-2)$，

取 x=0，得 $y_M=-\frac{2y_0}{x_0-2}$；

$k_{PB}=\frac{y_0-1}{x_0}$，PB 所在直线方程为 $y=\frac{y_0-1}{x_0}x+1$，

取 y=0，得 $x_N=\frac{x_0}{1-y_0}$.

∴ $|AN|=2-x_N=2-\frac{x_0}{1-y_0}=\frac{2-2y_0-x_0}{1-y_0}$，

$|BM|=1-x_M=1+\frac{2y_0}{x_0-2}=\frac{x_0+2y_0-2}{x_0-2}$.

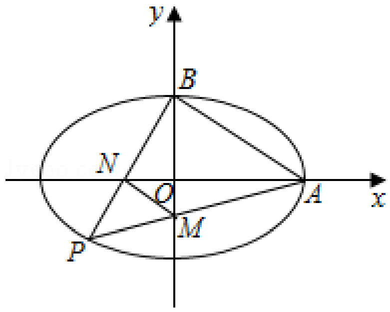
∴ $S_{ABNM}=\frac{1}{2}\cdot|AN|\cdot|BM|=\frac{1}{2}\cdot\frac{2-2y_0-x_0}{1-y_0}\cdot\frac{x_0+2y_0-2}{x_0-2}$

$=-\frac{1}{2}\frac{(x_0+2y_0-2)^2}{(1-y_0)(x_0-2)}=\frac{1}{2}\frac{(x_0+2y_0)^2-4(x_0+2y_0)+4}{x_0y_0+2-x_0-2y_0}=\frac{1}{2}$

$$\frac{x_0^2+4x_0y_0+4y_0^2-4x_0-8y_0+4}{x_0y_0+2-x_0-2y_0}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{4(x_0y_0+2-x_0-2y_0)}{x_0y_0+2-x_0-2y_0}=\frac{1}{2}\times 4=2.$$

∴四边形 ABNM 的面积为定值 2.



【点评】本题考查椭圆的标准方程，考查了椭圆的简单性质，考查计算能力与推理论证能力，是中档题.

20.（13 分）设函数 f（x）$=x^3+ax^2+bx+c$.

（1）求曲线 y=f（x）在点（0，f（0））处的切线方程；

（2）设 a=b=4，若函数 f（x）有三个不同零点，求 c 的取值范围；

（3）求证：$a^2-3b>0$ 是 f（x）有三个不同零点的必要而不充分条件.

【考点】52：函数零点的判定定理；6H：利用导数研究曲线上某点切线方程.

【专题】34：方程思想；48：分析法；51：函数的性质及应用；52：导数的概念及应用.

【分析】（1）求出 f（x）的导数，求得切线的斜率和切点，进而得到所求切线的方程；

（2）由 f（x）=0，可得 $-c=x^3+4x^2+4x$，由 g（x）$=x^3+4x^2+4x$，求得导数，单调区间和极值，由 $-c$ 介于极值之间，解不等式即可得到所求范围；

（3）先证若 f（x）有三个不同零点，令 f（x）=0，可得单调区间有 3 个，求出导数，由导数的图象与 x 轴有两个不同的交点，运用判别式大于 0，可得 $a^2-3b>0$；再由 a=b=4，c=0，可得若 $a^2-3b>0$，不能推出 f（x）有 3 个零点.

【解答】解：（1）函数 f（x）$=x^3+ax^2+bx+c$ 的导数为 f′（x）$=3x^2+2ax+b$，

可得 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线斜率为 $k=f'(0)=b$，

切点为 $(0, c)$，可得切线的方程为 $y=bx+c$；

（2）设 $a=b=4$，即有 $f(x)=x^3+4x^2+4x+c$，

由 $f(x)=0$，可得 $-c=x^3+4x^2+4x$，

由 $g(x)=x^3+4x^2+4x$ 的导数 $g'(x)=3x^2+8x+4=(x+2)(3x+2)$，

当 $x>-\frac{2}{3}$ 或 $x<-2$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 递增；

当 $-2<x<-\frac{2}{3}$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 递减.

即有 $g(x)$ 在 $x=-2$ 处取得极大值，且为 0；

$g(x)$ 在 $x=-\frac{2}{3}$ 处取得极小值，且为 $-\frac{32}{27}$.

由函数 $f(x)$ 有三个不同零点，可得 $-\frac{32}{27}<-c<0$，

解得 $0<c<\frac{32}{27}$，

则 c 的取值范围是 $(0, \frac{32}{27})$；

（3）证明：若 $f(x)$ 有三个不同零点，令 $f(x)=0$，

可得 $f(x)$ 的图象与 x 轴有三个不同的交点.

即有 $f(x)$ 有 3 个单调区间，

即为导数 $f'(x)=3x^2+2ax+b$ 的图象与 x 轴有两个交点，

可得 $\triangle>0$，即 $4a^2-12b>0$，即为 $a^2-3b>0$；

若 $a^2-3b>0$，即有导数 $f'(x)=3x^2+2ax+b$ 的图象与 x 轴有两个交点，

当 $c=0$，$a=b=4$ 时，满足 $a^2-3b>0$，

即有 $f(x)=x(x+2)^2$，图象与 x 轴交于 $(0, 0)$，$(-2, 0)$，则 $f(x)$ 的零点为 2 个.

故 $a^2-3b>0$ 是 $f(x)$ 有三个不同零点的必要而不充分条件.

【点评】本题考查导数的运用：求切线的方程和单调区间、极值，考查函数的零点的判断，注意运用导数求得极值，考考查化简整理的能力，属于中档题.