

# 2014年全国统一高考数学试卷（文科）（大纲版）

参考答案与试题解析

## 一、选择题（本大题共12小题，每小题5分）

1. （5分）设集合 $M=\{1, 2, 4, 6, 8\}$ ， $N=\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$ ，则 $M \cap N$ 中元素的个数为（ ）

- A. 2                      B. 3                      C. 5                      D. 7

**【考点】** 1A：集合中元素个数的最值； 1E：交集及其运算.

**【专题】** 5J：集合.

**【分析】** 根据 $M$ 与 $N$ ，找出两集合的交集，找出交集的元素即可.

**【解答】** 解：∵ $M=\{1, 2, 4, 6, 8\}$ ， $N=\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$ ，

∴ $M \cap N=\{1, 2, 6\}$ ，即 $M \cap N$ 中元素的个数为3.

故选：B.

**【点评】** 此题考查了交集及其运算，熟练掌握交集的定义是解本题的关键.

2. （5分）已知角 $\alpha$ 的终边经过点 $(-4, 3)$ ，则 $\cos\alpha=（ ）$

- A.  $\frac{4}{5}$                       B.  $\frac{3}{5}$                       C.  $-\frac{3}{5}$                       D.  $-\frac{4}{5}$

**【考点】** G9：任意角的三角函数的定义.

**【专题】** 56：三角函数的求值.

**【分析】** 由条件直接利用任意角的三角函数的定义求得 $\cos\alpha$ 的值.

**【解答】** 解：∵角 $\alpha$ 的终边经过点 $(-4, 3)$ ，∴ $x=-4$ ， $y=3$ ， $r=\sqrt{x^2+y^2}=5$ .

∴ $\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{-4}{5}=-\frac{4}{5}$ ，

故选：D.

**【点评】** 本题主要考查任意角的三角函数的定义，两点间的距离公式的应用，属于基础题.

3. (5分) 不等式组  $\begin{cases} x(x+2) > 0 \\ |x| < 1 \end{cases}$  的解集为 ( )

- A.  $\{x | -2 < x < -1\}$                       B.  $\{x | -1 < x < 0\}$    C.  $\{x | 0 < x < 1\}$   
D.  $\{x | x > 1\}$

【考点】7E: 其他不等式的解法.

【专题】59: 不等式的解法及应用.

【分析】解一元二次不等式、绝对值不等式，分别求出不等式组中每个不等式的解集，再取交集，即得所求.

【解答】解：由不等式组  $\begin{cases} x(x+2) > 0 \\ |x| < 1 \end{cases}$  可得  $\begin{cases} x < -2, \text{ 或 } x > 0 \\ -1 < x < 1 \end{cases}$ ，解得  $0 < x < 1$ ，

故选：C.

【点评】本题主要考查一元二次不等式、绝对值不等式的解法，属于基础题.

4. (5分) 已知正四面体ABCD中，E是AB的中点，则异面直线CE与BD所成角的余弦值为 ( )

- A.  $\frac{1}{6}$                       B.  $\frac{\sqrt{3}}{6}$                       C.  $\frac{1}{3}$                       D.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【考点】LM: 异面直线及其所成的角.

【专题】5G: 空间角.

【分析】由E为AB的中点，可取AD中点F，连接EF，则 $\angle CEF$ 为异面直线CE与BD所成角，设出正四面体的棱长，求出 $\triangle CEF$ 的三边长，然后利用余弦定理求解异面直线CE与BD所成角的余弦值.

【解答】解：如图，

取AD中点F，连接EF，CF，

$\because$  E为AB的中点，

$\therefore EF \parallel DB$ ，

则 $\angle CEF$ 为异面直线BD与CE所成的角，

$\because$  ABCD为正四面体，E，F分别为AB，AD的中点，

∴CE=CF.

设正四面体的棱长为2a,

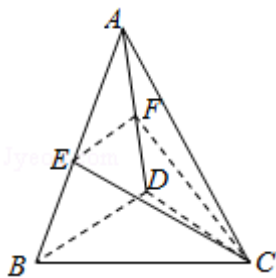
则EF=a,

$$CE=CF=\sqrt{(2a)^2-a^2}=\sqrt{3}a.$$

在△CEF中, 由余弦定理得:

$$\cos\angle CEF=\frac{CE^2+EF^2-CF^2}{2CE\cdot EF}=\frac{a^2}{2\times\sqrt{3}a^2}=\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

故选: B.



**【点评】** 本题考查异面直线及其所成的角, 关键是找角, 考查了余弦定理的应用, 是中档题.

5. (5分) 函数 $y=\ln(\sqrt[3]{x}+1)$  ( $x>-1$ ) 的反函数是 ( )

A.  $y=(1-e^x)^3$  ( $x>-1$ )

B.  $y=(e^x-1)^3$  ( $x>-1$ )

C.  $y=(1-e^x)^3$  ( $x\in\mathbb{R}$ )

D.  $y=(e^x-1)^3$  ( $x\in\mathbb{R}$ )

**【考点】** 4R: 反函数.

**【专题】** 51: 函数的性质及应用.

**【分析】** 由已知式子解出x, 然后互换x、y的位置即可得到反函数.

**【解答】** 解: ∵ $y=\ln(\sqrt[3]{x}+1)$ ,

$$\therefore\sqrt[3]{x}+1=e^y, \text{ 即 } \sqrt[3]{x}=e^y-1,$$

$$\therefore x=(e^y-1)^3,$$

$$\therefore\text{所求反函数为 } y=(e^x-1)^3,$$

故选: D.

**【点评】** 本题考查反函数解析式的求解，属基础题.

6. (5分) 已知 $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ 为单位向量, 其夹角为 $60^\circ$ , 则 $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b} = ( \quad )$

- A. -1                      B. 0                      C. 1                      D. 2

**【考点】** 90: 平面向量数量积的性质及其运算.

**【专题】** 5A: 平面向量及应用.

**【分析】** 由条件利用两个向量的数量积的定义, 求得 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 、 $\vec{b}^2$ 的值, 可得 $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b}$ 的值.

**【解答】** 解: 由题意可得,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 1 \times \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ ,  $\vec{b}^2 = 1$ ,

$$\therefore (2\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b} = 2\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b}^2 = 0,$$

故选: B.

**【点评】** 本题主要考查两个向量的数量积的定义, 属于基础题.

7. (5分) 有6名男医生、5名女医生, 从中选出2名男医生、1名女医生组成一个医疗小组, 则不同的选法共有 (     )

- A. 60种                      B. 70种                      C. 75种                      D. 150种

**【考点】** D9: 排列、组合及简单计数问题.

**【专题】** 50: 排列组合.

**【分析】** 根据题意, 分2步分析, 先从6名男医生中选2人, 再从5名女医生中选出1人, 由组合数公式依次求出每一步的情况数目, 由分步计数原理计算可得答案.

**【解答】** 解: 根据题意, 先从6名男医生中选2人, 有 $C_6^2 = 15$ 种选法, 再从5名女医生中选出1人, 有 $C_5^1 = 5$ 种选法, 则不同的选法共有 $15 \times 5 = 75$ 种;

故选: C.

**【点评】** 本题考查分步计数原理的应用, 注意区分排列、组合的不同.

8. (5分) 设等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ . 若  $S_2=3$ ,  $S_4=15$ , 则  $S_6=$  ( )

- A. 31                      B. 32                      C. 63                      D. 64

【考点】89: 等比数列的前  $n$  项和.

【专题】54: 等差数列与等比数列.

【分析】由等比数列的性质可得  $S_2$ ,  $S_4 - S_2$ ,  $S_6 - S_4$  成等比数列, 代入数据计算可得.

【解答】解:  $S_2=a_1+a_2$ ,  $S_4 - S_2=a_3+a_4=(a_1+a_2)q^2$ ,  $S_6 - S_4=a_5+a_6=(a_1+a_2)q^4$ , 所以  $S_2$ ,  $S_4 - S_2$ ,  $S_6 - S_4$  成等比数列,

即  $3$ ,  $12$ ,  $S_6 - 15$  成等比数列,

可得  $12^2=3(S_6 - 15)$ ,

解得  $S_6=63$

故选: C.

【点评】本题考查等比数列的性质, 得出  $S_2$ ,  $S_4 - S_2$ ,  $S_6 - S_4$  成等比数列是解决问题的关键, 属基础题.

9. (5分) 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的左、右焦点为  $F_1$ 、 $F_2$ , 离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ , 过  $F_2$  的直线  $l$  交  $C$  于  $A$ 、 $B$  两点, 若  $\triangle AF_1B$  的周长为  $4\sqrt{3}$ , 则  $C$  的方程为 ( )

- A.  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$       B.  $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$       C.  $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1$       D.  $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$

【考点】K4: 椭圆的性质.

【专题】5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】利用  $\triangle AF_1B$  的周长为  $4\sqrt{3}$ , 求出  $a=\sqrt{3}$ , 根据离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ , 可得  $c=1$ ,

求出  $b$ , 即可得出椭圆的方程.

【解答】解:  $\because \triangle AF_1B$  的周长为  $4\sqrt{3}$ ,

$$\therefore \triangle AF_1B \text{的周长} = |AF_1| + |AF_2| + |BF_1| + |BF_2| = 2a + 2a = 4a,$$

$$\therefore 4a = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore a = \sqrt{3},$$

$$\therefore \text{离心率为} \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad c = 1,$$

$$\therefore b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{2},$$

$$\therefore \text{椭圆C的方程为} \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

故选：A.

**【点评】** 本题考查椭圆的定义与方程，考查椭圆的几何性质，考查学生的计算能力，属于基础题.

10. (5分) 正四棱锥的顶点都在同一球面上，若该棱锥的高为4，底面边长为2，则该球的表面积为 ( )

A.  $\frac{81\pi}{4}$

B.  $16\pi$

C.  $9\pi$

D.  $\frac{27\pi}{4}$

**【考点】** LG: 球的体积和表面积; LR: 球内接多面体.

**【专题】** 11: 计算题; 5F: 空间位置关系与距离.

**【分析】** 正四棱锥P - ABCD的外接球的球心在它的高PO<sub>1</sub>上，记为O，求出PO<sub>1</sub>，OO<sub>1</sub>，解出球的半径，求出球的表面积.

**【解答】** 解：设球的半径为R，则

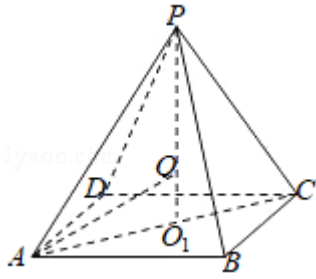
$\therefore$  棱锥的高为4，底面边长为2，

$$\therefore R^2 = (4 - R)^2 + (\sqrt{2})^2,$$

$$\therefore R = \frac{9}{4},$$

$$\therefore \text{球的表面积为} 4\pi \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{81\pi}{4}.$$

故选：A.



**【点评】** 本题考查球的表面积，球的内接几何体问题，考查计算能力，是基础题.

11. (5分) 双曲线C:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的离心率为2, 焦点到渐近线的

的距离为 $\sqrt{3}$ , 则C的焦距等于 ( )

- A. 2                      B.  $2\sqrt{2}$                       C. 4                      D.  $4\sqrt{2}$

**【考点】** KC: 双曲线的性质.

**【专题】** 5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

**【分析】** 根据双曲线的离心率以及焦点到直线的距离公式, 建立方程组即可得到结论.

**【解答】** 解:  $\because \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的离心率为2,

$\therefore e = \frac{c}{a} = 2$ , 双曲线的渐近线方程为  $y = \pm \frac{b}{a}x$ , 不妨取  $y = \frac{b}{a}x$ , 即  $bx - ay = 0$ ,

则  $c = 2a$ ,  $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{3}a$ ,

$\therefore$  焦点  $F(c, 0)$  到渐近线  $bx - ay = 0$  的距离为  $\sqrt{3}$ ,

$$\therefore d = \frac{bc}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{3},$$

$$\text{即 } \frac{\sqrt{3}a \cdot c}{\sqrt{a^2 + 3a^2}} = \frac{\sqrt{3}ac}{2a} = \frac{\sqrt{3}c}{2} = \sqrt{3},$$

解得  $c = 2$ ,

则焦距为  $2c = 4$ ,

故选: C.

**【点评】** 本题主要考查是双曲线的基本运算，利用双曲线的离心率以及焦点到直线的距离公式，建立方程组是解决本题的关键，比较基础.

12. (5分) 奇函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，若 $f(x+2)$ 为偶函数，且 $f(1)=1$ ，则 $f(8)+f(9)=$  ( )
- A. -2                      B. -1                      C. 0                      D. 1

**【考点】** 3K: 函数奇偶性的性质与判断.

**【专题】** 51: 函数的性质及应用.

**【分析】** 根据函数的奇偶性的性质，得到 $f(x+8)=f(x)$ ，即可得到结论.

**【解答】** 解:  $\because f(x+2)$ 为偶函数， $f(x)$ 是奇函数，

$\therefore$  设 $g(x)=f(x+2)$ ，

则 $g(-x)=g(x)$ ，

即 $f(-x+2)=f(x+2)$ ，

$\because f(x)$ 是奇函数，

$\therefore f(-x+2)=f(x+2)=-f(x-2)$ ，

即 $f(x+4)=-f(x)$ ， $f(x+8)=f(x+4+4)=-f(x+4)=f(x)$ ，

则 $f(8)=f(0)=0$ ， $f(9)=f(1)=1$ ，

$\therefore f(8)+f(9)=0+1=1$ ，

故选: D.

**【点评】** 本题主要考查函数值的计算，利用函数奇偶性的性质，得到函数的对称轴是解决本题的关键.

## 二、填空题(本大题共4小题，每小题5分)

13. (5分)  $(x-2)^6$ 的展开式中 $x^3$ 的系数是 -160. (用数字作答)

**【考点】** DA: 二项式定理.

**【专题】** 11: 计算题.

**【分析】** 根据题意，由二项式定理可得 $(x-2)^6$ 的展开式的通项，令 $x$ 的系数

为3，可得 $r=3$ ，将 $r=3$ 代入通项，计算可得 $T_4 = -160x^3$ ，即可得答案.

**【解答】**解：根据题意， $(x-2)^6$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_6^r x^{6-r} (-2)^r = (-1)^r \cdot 2^r \cdot C_6^r x^{6-r}$ ,

令 $6-r=3$ 可得 $r=3$ ,

此时 $T_4 = (-1)^3 \cdot 2^3 \cdot C_6^3 x^3 = -160x^3$ ，即 $x^3$ 的系数是 $-160$ ;

故答案为 $-160$ .

**【点评】**本题考查二项式定理的应用，关键要得到 $(x-2)^6$ 的展开式的通项.

14. (5分) 函数 $y = \cos 2x + 2\sin x$ 的最大值是  $\frac{3}{2}$ .

**【考点】**HW: 三角函数的最值.

**【专题】**11: 计算题.

**【分析】**利用二倍角公式对函数化简可得 $y = \cos 2x + 2\sin x = 1 - 2\sin^2 x + 2\sin x =$

$-2(\sin x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{2}$ ，结合 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 及二次函数的性质可求函数有最大值

**【解答】**解： $\because y = \cos 2x + 2\sin x = 1 - 2\sin^2 x + 2\sin x = -2(\sin x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{2}$

又 $\because -1 \leq \sin x \leq 1$

当 $\sin x = \frac{1}{2}$ 时，函数有最大值 $\frac{3}{2}$

故答案为： $\frac{3}{2}$

**【点评】**本题主要考查了利用二倍角度公式对三角函数进行化简，二次函数在闭区间上的最值的求解，解题中要注意 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 的条件.

15. (5分) 设 $x, y$ 满足约束条件 $\begin{cases} x-y \geq 0 \\ x+2y \leq 3 \\ x-2y \leq 1 \end{cases}$ ，则 $z=x+4y$ 的最大值为  $5$ .

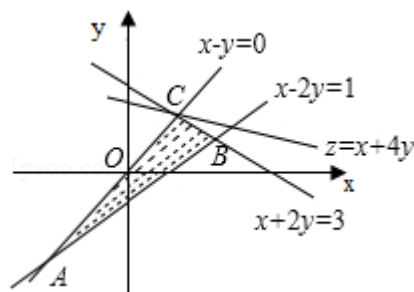
**【考点】**7C: 简单线性规划.

**【专题】**31: 数形结合.

**【分析】**由约束条件作出可行域，化目标函数为直线方程的斜截式，由图得到

最优解，联立方程组求出最优解的坐标，代入目标函数得答案.

**【解答】**解：由约束条件 
$$\begin{cases} x-y \geq 0 \\ x+2y \leq 3 \\ x-2y \leq 1 \end{cases}$$
 作出可行域如图，



联立 
$$\begin{cases} x-y=0 \\ x+2y=3 \end{cases}$$
，解得  $C(1, 1)$ 。

化目标函数  $z=x+4y$  为直线方程的斜截式，得  $y=-\frac{1}{4}x+\frac{z}{4}$ 。

由图可知，当直线  $y=-\frac{1}{4}x+\frac{z}{4}$  过  $C$  点时，直线在  $y$  轴上的截距最大， $z$  最大。

此时  $z_{\max}=1+4 \times 1=5$ 。

故答案为：5。

**【点评】** 本题考查简单的线性规划，考查了数形结合的解题思想方法，是中档题。

16. (5分) 直线  $l_1$  和  $l_2$  是圆  $x^2+y^2=2$  的两条切线，若  $l_1$  与  $l_2$  的交点为  $(1, 3)$ ，则  $l_1$  与  $l_2$  的夹角的正切值等于  $\frac{4}{3}$ 。

**【考点】** IV：两直线的夹角与到角问题。

**【专题】** 5B：直线与圆。

**【分析】** 设  $l_1$  与  $l_2$  的夹角为  $2\theta$ ，由于  $l_1$  与  $l_2$  的交点  $A(1, 3)$  在圆的外部，由直角三角形中的边角关系求得  $\sin\theta=\frac{r}{OA}$  的值，可得  $\cos\theta$ 、 $\tan\theta$  的值，再根据  $\tan 2\theta=\frac{2 \tan \theta}{1-\tan ^2 \theta}$ ，计算求得结果。

**【解答】** 解：设  $l_1$  与  $l_2$  的夹角为  $2\theta$ ，由于  $l_1$  与  $l_2$  的交点  $A(1, 3)$  在圆的外部，且点  $A$  与圆心  $O$  之间的距离为  $OA=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$ ，

圆的半径为 $r=\sqrt{2}$ ,

$$\therefore \sin\theta = \frac{r}{OA} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}},$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{10}}, \quad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3},$$

故答案为:  $\frac{4}{3}$ .

**【点评】** 本题主要考查直线和圆相切的性质, 直角三角形中的变角关系, 同角三角函数的基本关系、二倍角的正切公式的应用, 属于中档题.

### 三、解答题

17. (10分) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$ ,  $a_2=2$ ,  $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2$ .

(I) 设 $b_n=a_{n+1}-a_n$ , 证明 $\{b_n\}$ 是等差数列;

(II) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

**【考点】** 83: 等差数列的性质; 84: 等差数列的通项公式; 8H: 数列递推式.

**【专题】** 54: 等差数列与等比数列.

**【分析】** (I) 将 $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2$ 变形为:  $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n+2$ , 再由条件得 $b_{n+1}=b_n+2$ , 根据条件求出 $b_1$ , 由等差数列的定义证明 $\{b_n\}$ 是等差数列;

(II) 由(I)和等差数列的通项公式求出 $b_n$ , 代入 $b_n=a_{n+1}-a_n$ 并令 $n$ 从1开始取值, 依次得 $(n-1)$ 个式子, 然后相加, 利用等差数列的前 $n$ 项和公式求出 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n$ .

**【解答】** 解: (I) 由 $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2$ 得,

$$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n+2,$$

$$\text{由 } b_n=a_{n+1}-a_n \text{ 得, } b_{n+1}=b_n+2,$$

$$\text{即 } b_{n+1}-b_n=2,$$

$$\text{又 } b_1=a_2-a_1=1,$$

所以 $\{b_n\}$ 是首项为1, 公差为2的等差数列.

(II) 由(I)得,  $b_n=1+2(n-1)=2n-1$ ,

由 $b_n = a_{n+1} - a_n$ 得,  $a_{n+1} - a_n = 2n - 1$ ,

则 $a_2 - a_1 = 1$ ,  $a_3 - a_2 = 3$ ,  $a_4 - a_3 = 5$ , ...,  $a_n - a_{n-1} = 2(n-1) - 1$ ,

所以,  $a_n - a_1 = 1 + 3 + 5 + \dots + 2(n-1) - 1$

$$= \frac{(n-1)(1+2n-3)}{2} = (n-1)^2,$$

又 $a_1 = 1$ ,

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = (n-1)^2 + 1 = n^2 - 2n + 2$ .

**【点评】** 本题考查了等差数列的定义、通项公式、前 $n$ 项和公式, 及累加法求数列的通项公式和转化思想, 属于中档题.

18. (12分)  $\triangle ABC$ 的内角 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 的对边分别为 $a$ 、 $b$ 、 $c$ , 已知 $3a\cos C = 2c\cos A$ ,  $\tan A = \frac{1}{3}$ , 求 $B$ .

**【考点】** GL: 三角函数中的恒等变换应用; HP: 正弦定理.

**【专题】** 58: 解三角形.

**【分析】** 由 $3a\cos C = 2c\cos A$ , 利用正弦定理可得 $3\sin A\cos C = 2\sin C\cos A$ , 再利用同角的三角函数基本关系式可得 $\tan C$ , 利用 $\tan B = \tan[\pi - (A+C)] = -\tan(A+C)$ 即可得出.

**【解答】** 解:  $\because 3a\cos C = 2c\cos A$ ,

由正弦定理可得 $3\sin A\cos C = 2\sin C\cos A$ ,

$$\therefore 3\tan A = 2\tan C,$$

$$\because \tan A = \frac{1}{3},$$

$$\therefore 2\tan C = 3 \times \frac{1}{3} = 1, \text{ 解得 } \tan C = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore \tan B = \tan[\pi - (A+C)] = -\tan(A+C) = -\frac{\tan A + \tan C}{1 - \tan A \tan C} = -\frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}} = -1,$$

$\because B \in (0, \pi)$ ,

$$\therefore B = \frac{3\pi}{4}$$

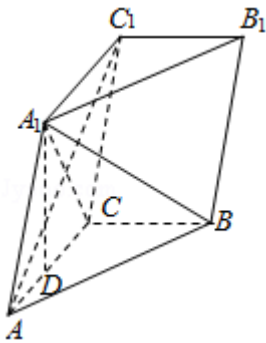
**【点评】** 本题考查了正弦定理、同角的三角函数基本关系式、两角和差的正切

公式、诱导公式等基础知识与基本技能方法，考查了推理能力和计算能力，属于中档题.

19. (12分) 如图，三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，点 $A_1$ 在平面 $ABC$ 内的射影 $D$ 在 $AC$ 上， $\angle ACB=90^\circ$ ， $BC=1$ ， $AC=CC_1=2$ .

(I) 证明： $AC_1 \perp A_1B$ ;

(II) 设直线 $AA_1$ 与平面 $BCC_1B_1$ 的距离为 $\sqrt{3}$ ，求二面角 $A_1 - AB - C$ 的大小.



**【考点】** LW: 直线与平面垂直; MJ: 二面角的平面角及求法.

**【专题】** 5F: 空间位置关系与距离.

**【分析】** (I) 由已知数据结合线面垂直的判定和性质可得;

(II) 作辅助线可证 $\angle A_1FD$ 为二面角 $A_1 - AB - C$ 的平面角，解三角形由反三角函数可得.

**【解答】** 解: (I)  $\because A_1D \perp$  平面 $ABC$ ,  $A_1D \subset$  平面 $AA_1C_1C$ ,

$\therefore$  平面 $AA_1C_1C \perp$  平面 $ABC$ , 又 $BC \perp AC$

$\therefore BC \perp$  平面 $AA_1C_1C$ , 连结 $A_1C$ ,

由侧面 $AA_1C_1C$ 为菱形可得 $AC_1 \perp A_1C$ ,

又 $AC_1 \perp BC$ ,  $A_1C \cap BC = C$ ,

$\therefore AC_1 \perp$  平面 $A_1BC$ ,  $AB_1 \subset$  平面 $A_1BC$ ,

$\therefore AC_1 \perp A_1B$ ;

(II)  $\because BC \perp$  平面 $AA_1C_1C$ ,  $BC \subset$  平面 $BCC_1B_1$ ,

$\therefore$  平面 $AA_1C_1C \perp$  平面 $BCC_1B_1$ ,

作 $A_1E \perp CC_1$ ,  $E$ 为垂足, 可得 $A_1E \perp$  平面 $BCC_1B_1$ ,

又直线 $AA_1 \parallel$ 平面 $BCC_1B_1$ ,

$\therefore A_1E$ 为直线 $AA_1$ 与平面 $BCC_1B_1$ 的距离, 即 $A_1E = \sqrt{3}$ ,

$\therefore A_1C$ 为 $\angle ACC_1$ 的平分线,  $\therefore A_1D = A_1E = \sqrt{3}$ ,

作 $DF \perp AB$ ,  $F$ 为垂足, 连结 $A_1F$ ,

又可得 $AB \perp A_1D$ ,  $A_1F \cap A_1D = A_1$ ,

$\therefore AB \perp$ 平面 $A_1DF$ ,  $\therefore A_1F \subset$ 平面 $A_1DF$

$\therefore A_1F \perp AB$ ,

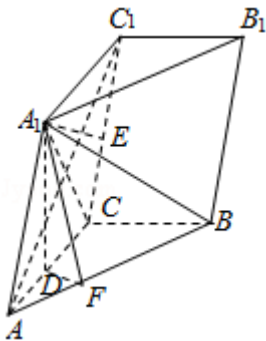
$\therefore \angle A_1FD$ 为二面角 $A_1 - AB - C$ 的平面角,

由 $AD = \sqrt{AA_1^2 - A_1D^2} = 1$ 可知 $D$ 为 $AC$ 中点,

$$\therefore DF = \frac{1}{2} \times \frac{AC \times BC}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore \tan \angle A_1FD = \frac{A_1D}{DF} = \sqrt{15},$$

$\therefore$ 二面角 $A_1 - AB - C$ 的大小为 $\arctan \sqrt{15}$



**【点评】** 本题考查二面角的求解, 作出并证明二面角的平面角是解决问题的关键, 属中档题.

20. (12分) 设每个工作日甲, 乙, 丙, 丁4人需使用某种设备的概率分别为0.

6, 0.5, 0.5, 0.4, 各人是否需使用设备相互独立.

(I) 求同一工作日至少3人需使用设备的概率;

(II) 实验室计划购买 $k$ 台设备供甲, 乙, 丙, 丁使用, 若要求“同一工作日需使用设备的人数大于 $k$ ”的概率小于0.1, 求 $k$ 的最小值.

**【考点】** C8: 相互独立事件和相互独立事件的概率乘法公式.

**【专题】** 51: 概率与统计.

**【分析】** (I) 把4个人都需使用设备的概率、4个人中有3个人使用设备的概率相加, 即得所求.

(II) 由(I)可得若 $k=2$ , 不满足条件. 若 $k=3$ , 求得“同一工作日需使用设备的人数大于3”的概率为 $0.06 < 0.1$ , 满足条件, 从而得出结论.

**【解答】** 解: (I) 由题意可得“同一工作日至少3人需使用设备”的概率为 $0.6 \times 0.5 \times 0.5 \times 0.4 + (1 - 0.6) \times 0.5 \times 0.5 \times 0.4 + 0.6 \times (1 - 0.5) \times 0.5 \times 0.4 + 0.6 \times 0.5 \times (1 - 0.5) \times 0.4 + 0.6 \times 0.5 \times 0.5 \times (1 - 0.4) = 0.31$ .

(II) 由(I)可得若 $k=2$ , 则“同一工作日需使用设备的人数大于2”的概率为 $0.31 > 0.1$ , 不满足条件.

若 $k=3$ , 则“同一工作日需使用设备的人数大于3”的概率为

$0.6 \times 0.5 \times 0.5 \times 0.4 = 0.06 < 0.1$ , 满足条件.

故 $k$ 的最小值为3.

**【点评】** 本题主要考查相互独立事件的概率乘法公式, 体现了分类讨论的数学思想, 属于中档题.

21. (12分) 函数 $f(x) = ax^3 + 3x^2 + 3x$  ( $a \neq 0$ ).

(I) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(II) 若 $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 是增函数, 求 $a$ 的取值范围.

**【考点】** 6B: 利用导数研究函数的单调性; 6D: 利用导数研究函数的极值.

**【专题】** 53: 导数的综合应用.

**【分析】** (I) 求出函数的导数, 通过导数为0, 利用二次函数的根, 通过 $a$ 的范围讨论 $f(x)$ 的单调性;

(II) 当 $a > 0$ ,  $x > 0$ 时,  $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 是增函数, 当 $a < 0$ 时,  $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 是增函数, 推出 $f'(1) \geq 0$ 且 $f'(2) \geq 0$ , 即可求 $a$ 的取值范围.

**【解答】** 解: (I) 函数 $f(x) = ax^3 + 3x^2 + 3x$ ,

$\therefore f'(x) = 3ax^2 + 6x + 3$ ,

令 $f'(x) = 0$ , 即 $3ax^2 + 6x + 3 = 0$ , 则 $\Delta = 36(1 - a)$ ,

①若 $a \geq 1$ 时, 则 $\Delta \leq 0$ ,  $f'(x) \geq 0$ ,  $\therefore f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是增函数;

②因为 $a \neq 0$ ,  $\therefore a \leq 1$ 且 $a \neq 0$ 时,  $\Delta > 0$ ,  $f'(x) = 0$ 方程有两个根,  $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1-a}}{a}$ ,  $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{1-a}}{a}$ ,

当 $0 < a < 1$ 时, 则当 $x \in (-\infty, x_2)$ 或 $(x_1, +\infty)$ 时,  $f'(x) > 0$ , 故函数在 $(-\infty, x_2)$ 或 $(x_1, +\infty)$ 是增函数; 在 $(x_2, x_1)$ 是减函数;

当 $a < 0$ 时, 则当 $x \in (-\infty, x_1)$ 或 $(x_2, +\infty)$ ,  $f'(x) < 0$ , 故函数在 $(-\infty, x_1)$ 或 $(x_2, +\infty)$ 是减函数; 在 $(x_1, x_2)$ 是增函数;

(II) 当 $a > 0$ ,  $x > 0$ 时,  $f'(x) = 3ax^2 + 6x + 3 > 0$

故 $a > 0$ 时,  $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 是增函数,

当 $a < 0$ 时,  $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 是增函数,

当且仅当:  $f'(1) \geq 0$ 且 $f'(2) \geq 0$ , 解得  $-\frac{5}{4} \leq a < 0$ ,

$a$ 的取值范围  $[-\frac{5}{4}, 0) \cup (0, +\infty)$ .

**【点评】** 本题考查函数的导数的应用, 判断函数的单调性以及已知单调性求解函数中的变量的范围, 考查分类讨论思想的应用.

22. (12分) 已知抛物线 $C: y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 的焦点为 $F$ , 直线 $y = 4$ 与 $y$ 轴的交点为 $P$ , 与 $C$ 的交点为 $Q$ , 且 $|QF| = \frac{5}{4}|PQ|$ .

(I) 求 $C$ 的方程;

(II) 过 $F$ 的直线 $l$ 与 $C$ 相交于 $A$ 、 $B$ 两点, 若 $AB$ 的垂直平分线 $l'$ 与 $C$ 相交于 $M$ 、 $N$ 两点, 且 $A$ 、 $M$ 、 $B$ 、 $N$ 四点在同一圆上, 求 $l$ 的方程.

**【考点】** KH: 直线与圆锥曲线的综合.

**【专题】** 5E: 圆锥曲线中的最值与范围问题.

**【分析】** (I) 设点 $Q$ 的坐标为 $(x_0, 4)$ , 把点 $Q$ 的坐标代入抛物线 $C$ 的方程,

求得 $x_0 = \frac{8}{p}$ , 根据 $|QF| = \frac{5}{4}|PQ|$ 求得 $p$ 的值, 可得 $C$ 的方程.

(II) 设 $l$ 的方程为

$$x = my + 1$$

( $m \neq 0$ )，代入抛物线方程化简，利用韦达定理、中点公式、弦长公式求得弦长 $|AB|$ 。把直线 $l'$ 的方程代入抛物线方程化简，利用韦达定理、弦长公式求得 $|MN|$ 。由于 $MN$ 垂直平分线段 $AB$ ，故 $AMBN$ 四点共圆等价于 $|AE|=|BE|=\frac{1}{2}|MN|$ ，由此求得 $m$ 的值，可得直线 $l$ 的方程。

**【解答】**解：（I）设点 $Q$ 的坐标为 $(x_0, 4)$ ，把点 $Q$ 的坐标代入抛物线 $C: y^2=2px$  ( $p>0$ )，

$$\text{可得 } x_0 = \frac{8}{p}, \because \text{点 } P(0, 4), \therefore |PQ| = \frac{8}{p}.$$

$$\text{又 } |QF| = x_0 + \frac{p}{2} = \frac{8}{p} + \frac{p}{2}, \quad |QF| = \frac{5}{4}|PQ|,$$

$$\therefore \frac{8}{p} + \frac{p}{2} = \frac{5}{4} \times \frac{8}{p}, \text{ 求得 } p=2, \text{ 或 } p=-2 \text{ (舍去).}$$

故 $C$ 的方程为 $y^2=4x$ 。

（II）由题意可得，直线 $l$ 和坐标轴不垂直， $y^2=4x$ 的焦点 $F(1, 0)$ ，

设 $l$ 的方程为 $x=my+1$  ( $m \neq 0$ )，

代入抛物线方程可得 $y^2 - 4my - 4=0$ ，显然判别式 $\Delta=16m^2+16>0$ ， $y_1+y_2=4m$ ， $y_1$

$$\bullet y_2 = -4.$$

$\therefore AB$ 的中点坐标为 $D(2m^2+1, 2m)$ ，弦长 $|AB| = \sqrt{m^2+1}|y_1 - y_2| = \sqrt{m^2+1}$

$$\sqrt{(y_1+y_2)^2 - 4y_1y_2} = 4(m^2+1).$$

又直线 $l'$ 的斜率为 $-m$ ， $\therefore$ 直线 $l'$ 的方程为 $x = -\frac{1}{m}y + 2m^2 + 3$ 。

过 $F$ 的直线 $l$ 与 $C$ 相交于 $A$ 、 $B$ 两点，若 $AB$ 的垂直平分线 $l'$ 与 $C$ 相交于 $M$ 、 $N$ 两点，

把线 $l'$ 的方程代入抛物线方程可得

$$y^2 + \frac{4}{m}y - 4(2m^2+3) = 0, \therefore y_3+y_4 = \frac{-4}{m}, y_3 \bullet y_4 = -4(2m^2+3).$$

故线段 $MN$ 的中点 $E$ 的坐标为 $(\frac{2}{m^2} + 2m^2 + 3, \frac{-2}{m})$ ， $\therefore |MN| = \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}}|y_3 - y_4| =$

$$\frac{4(m^2+1) \bullet \sqrt{2m^2+1}}{m^2},$$

$\therefore MN$ 垂直平分线段 $AB$ ，故 $AMBN$ 四点共圆等价于 $|AE|=|BE|=\frac{1}{2}|MN|$ ，

$$\therefore \frac{1}{4} \bullet AB^2 + DE^2 = \frac{1}{4}MN^2,$$

$$\therefore 4(m^2+1)^2 + \left(2m + \frac{2}{m}\right)^2 + \left(\frac{2}{m^2} + 2\right)^2 = \frac{1}{4} \times \frac{16 \cdot (m^2+1)^2 \cdot (2m^2+1)}{m^4}, \text{ 化简可得}$$

$$m^2 - 1 = 0,$$

$\therefore m = \pm 1$ ,  $\therefore$  直线  $l$  的方程为  $x - y - 1 = 0$ , 或  $x + y - 1 = 0$ .

**【点评】** 本题主要考查求抛物线的标准方程, 直线和圆锥曲线的位置关系的应用, 韦达定理、弦长公式的应用, 体现了转化的数学思想, 属于难题.