

2015年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）

数学（理科）

一、填空题：本大题共5小题，每小题5分，共25分.

1、设全集 $U = \mathbb{R}$. 若集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x | 2 \leq x \leq 3\}$, 则 $A \cap \complement_U B =$ _____.

【答案】 $\{1, 4\}$

【解析】 因为 $\complement_U B = \{x | x > 3 \text{ 或 } x < 2\}$, 所以 $A \cap \complement_U B = \{1, 4\}$

【考点定位】 集合运算

2、若复数 z 满足 $3z + \bar{z} = 1 + i$, 其中 i 为虚数单位, 则 $z =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}i$

【解析】 设 $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$, 则 $3(a + bi) + a - bi = 1 + i \Rightarrow 4a = 1$ 且 $2b = 1 \Rightarrow z = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}i$

【考点定位】 复数相等, 共轭复数

3、若线性方程组的增广矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & c_1 \\ 0 & 1 & c_2 \end{pmatrix}$, 解为 $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$, 则 $c_1 - c_2 =$ _____.

【答案】 16

【解析】 由题意得: $c_1 = 2x + 3y = 2 \times 3 + 3 \times 5 = 21, c_2 = 0 \cdot x + y = 5, c_1 - c_2 = 21 - 5 = 16$.

【考点定位】 线性方程组的增广矩阵

4、若正三棱柱的所有棱长均为 a , 且其体积为 $16\sqrt{3}$, 则 $a =$ _____.

【答案】 4

【解析】 $a \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = 16\sqrt{3} \Rightarrow a^3 = 64 \Rightarrow a = 4$

【考点定位】 正三棱柱的体积

5、抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 上的动点 Q 到焦点的距离的最小值为1, 则 $p =$ _____.

【答案】 2

【解析】 因为抛物线上动点到焦点的距离为动点到准线的距离, 因此抛物线上动点到焦点的最短距离为顶点到准线的距离, 即 $\frac{p}{2} = 1, p = 2$. 学科网

【考点定位】抛物线定义

6、若圆锥的侧面积与过轴的截面面积之比为 2π ，则其母线与轴的夹角的大小为_____.

【答案】 $\frac{\pi}{3}$

【解析】由题意得： $\pi rl : (\frac{1}{2}h \cdot 2r) = 2\pi \Rightarrow l = 2h \Rightarrow$ 母线与轴的夹角为 $\frac{\pi}{3}$

【考点定位】圆锥轴截面

7、方程 $\log_2(9^{x-1} - 5) = \log_2(3^{x-1} - 2) + 2$ 的解为_____.

【答案】 2

【解析】设 $3^{x-1} = t, (t > 0)$ ，则 $\log_2(t^2 - 5) = \log_2(t - 2) + 2 \Rightarrow t^2 - 5 = 4(t - 2) > 0$

$\Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0, t > \sqrt{5} \Rightarrow t = 3 \Rightarrow 3^{x-1} = 3 \Rightarrow x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2$ 学科网

【考点定位】解指对数不等式

8、在报名的3名男教师和6名女教师中，选取5人参加义务献血，要求男、女教师都有，则不同的选取方式的种数为_____（结果用数值表示）.

【答案】 120

【解析】由题意得，去掉选5名女教师情况即可： $C_9^5 - C_6^5 = 126 - 6 = 120$.

【考点定位】排列组合

9、已知点P和Q的横坐标相同，P的纵坐标是Q的纵坐标的2倍，P和Q的轨迹分别为双曲线 C_1 和 C_2 . 若 C_1 的渐近线方程为 $y = \pm\sqrt{3}x$ ，则 C_2 的渐近线方程为_____.

【答案】 $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$

【解析】由题意得： $C_1: 3x^2 - y^2 = \lambda, (\lambda \neq 0)$ ，设 $Q(x, y)$ ，则 $P(x, 2y)$ ，所以 $3x^2 - 4y^2 = \lambda$ ，即 C_2 的渐近线方程为 $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$

【考点定位】双曲线渐近线

10、设 $f^{-1}(x)$ 为 $f(x) = 2^{x-2} + \frac{x}{2}$ ， $x \in [0, 2]$ 的反函数，则 $y = f(x) + f^{-1}(x)$ 的最大值为_____.

【答案】 4

【解析】 由题意得： $f(x) = 2^{x-2} + \frac{x}{2}$ 在 $[0, 2]$ 上单调递增，值域为 $[\frac{1}{4}, 2]$ ，所以 $f^{-1}(x)$ 在 $[\frac{1}{4}, 2]$ 上单调递增，因此 $y = f(x) + f^{-1}(x)$ 在 $[\frac{1}{4}, 2]$ 上单调递增，其最大值为 $f(2) + f^{-1}(2) = 2 + 2 = 4$.

【考点定位】 反函数性质

11、在 $\left(1 + x + \frac{1}{x^{2015}}\right)^{10}$ 的展开式中， x^2 项的系数为_____（结果用数值表示）.

【答案】 45

【解析】 因为 $\left(1 + x + \frac{1}{x^{2015}}\right)^{10} = \left((1+x) + \frac{1}{x^{2015}}\right)^{10} = (1+x)^{10} + C_{10}^1(1+x)^9 \frac{1}{x^{2015}} + \dots$ ，所以 x^2 项只能在 $(1+x)^{10}$ 展开式中，即为 $C_{10}^2 x^2$ ，系数为 $C_{10}^2 = 45$.

【考点定位】 二项展开式

12、赌博有陷阱. 某种赌博每局的规则是：赌客先在标记有1, 2, 3, 4, 5的卡片中随机摸取一张，将卡片上的数字作为其赌金（单位：元）；随后放回该卡片，再随机摸取两张，将这两张卡片上数字之差的绝对值的1.4倍作为其奖金（单位：元）. 若随机变量 ξ_1 和 ξ_2 分别表示赌客在一局赌博中的赌金和奖金，则 $E\xi_1 - E\xi_2 =$ _____（元）.

【答案】 0.2

【解析】赌金的分布列为

ξ_1	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

所以 $E\xi_1 = \frac{1}{5}(1+2+3+4+5) = 3$

奖金的分布列为

ξ_2	1.4	2.8	4.2	5.6
P	$\frac{4}{C_5^2} = \frac{2}{5}$	$\frac{3}{C_5^2} = \frac{3}{10}$	$\frac{2}{C_5^2} = \frac{1}{5}$	$\frac{1}{C_5^2} = \frac{1}{10}$

所以 $E\xi_2 = 1.4 \times (\frac{2}{5} \times 1 + \frac{3}{10} \times 2 + \frac{1}{5} \times 3 + \frac{1}{10} \times 4) = 2.8$

$$E\xi_1 - E\xi_2 = 0.2$$

13、已知函数 $f(x) = \sin x$. 若存在 x_1, x_2, \dots, x_m 满足 $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_m \leq 6\pi$,

且

$$|f(x_1) - f(x_2)| + |f(x_2) - f(x_3)| + \dots + |f(x_{n-1}) - f(x_n)| = 12 \quad (m \geq 2, m \in \mathbb{N}^*),$$
 则

m 的最小值

为_____.

【答案】8

【解析】因为 $f(x) = \sin x$, 所以 $|f(x_m) - f(x_n)| \leq f(x)_{\max} - f(x)_{\min} = 2$, 因此要使得满足条件

$$|f(x_1) - f(x_2)| + |f(x_2) - f(x_3)| + \dots + |f(x_{n-1}) - f(x_n)| = 12$$
 的 m 最小, 须取

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{\pi}{2}, x_3 = \frac{3\pi}{2}, x_4 = \frac{5\pi}{2}, x_5 = \frac{7\pi}{2}, x_6 = \frac{9\pi}{2}, x_7 = \frac{11\pi}{2}, x_8 = 6\pi, \text{即 } m = 8.$$

【考点定位】三角函数性质

14、在锐角三角形 ABC 中, $\tan A = \frac{1}{2}$, D 为边 BC 上的点, $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 的面积

分别为 2 和 4. 过 D 作 $DE \perp AB$ 于 E, $DF \perp AC$ 于 F, 则 $\overline{DE} \cdot \overline{DF} =$ _____.

【答案】 $\frac{16}{15}$

③无实根的是 ()

- A. 方程①有实根, 且②有实根
B. 方程①有实根, 且②无实根
C. 方程①无实根, 且②有实根
D. 方程①无实根, 且②无实根

【答案】B

【解析】当方程①有实根, 且②无实根时, $a_1^2 \geq 4, a_2^2 < 8$, 从而 $a_3^2 = \frac{a_2^4}{a_1^2} < \frac{8^2}{4} = 16$, 即方程

③: $x^2 + a_3x + 4 = 0$ 无实根, 选B. 而A,D由于不等式方向不一致, 不可推; C推出③有实根

【考点定位】不等式性质

18、设 $P_n(x_n, y_n)$ 是直线 $2x - y = \frac{n}{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) 与圆 $x^2 + y^2 = 2$ 在第一象限的交点,

则极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - 1}{x_n - 1} = ()$

- A. -1
B. $-\frac{1}{2}$
C. 1
D. 2

【答案】A

【解析】学科网由题意得: 因为 $2x - y = 1$ 与圆 $x^2 + y^2 = 2$ 在第一象限的交点为(1,1), 所以

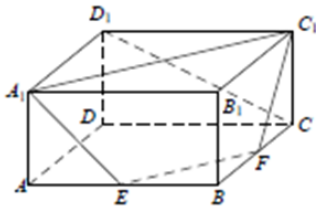
$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 1, \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - 1}{x_n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y'_n}{x'_n}$, 又由 $x_n^2 + y_n^2 = 2$ 得

$2x_n x'_n + 2y_n y'_n = 0 \Rightarrow \frac{y'_n}{x'_n} = -\frac{x_n}{y_n} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - 1}{x_n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y'_n}{x'_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{x_n}{y_n}\right) = -\frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} = -1$. 选 A.

【考点定位】极限

三、解答题: 本大题共6小题, 共75分, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤。

19、(本题满分12分) 如图, 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1 = 1, AB = AD = 2$, E、F分别是AB、BC的中点. 证明 $A_1、C_1、F、E$ 四点共面, 并求直线 CD_1 与平面 A_1C_1FE 所成的角的大小.



【答案】 $\arcsin \frac{\sqrt{15}}{15}$

【解析】解：如图，以 D 为原点建立空间直角坐标系，可得有关点的坐标为 $A_1(2, 0, 1)$ 、 $C_1(0, 2, 1)$ 、 $E(2, 1, 0)$ 、 $F(1, 2, 0)$ 、 $C(0, 2, 0)$ 、 $D_1(0, 0, 1)$ 。

因为 $\overrightarrow{A_1C_1} = (-2, 2, 0)$ ， $\overrightarrow{EF} = (-1, 1, 0)$ ，

所以 $\overrightarrow{A_1C_1} // \overrightarrow{EF}$ ，因此直线 A_1C_1 与 EF 共面，

即 A_1 、 C_1 、 F 、 E 共面。

设平面 A_1C_1EF 的法向量为 $\vec{n} = (u, y, w)$ ，则 $\vec{n} \perp \overrightarrow{EF}$ ， $\vec{n} \perp \overrightarrow{FC_1}$ ，

又 $\overrightarrow{EF} = (-1, 1, 0)$ ， $\overrightarrow{FC_1} = (-1, 0, 1)$ ，

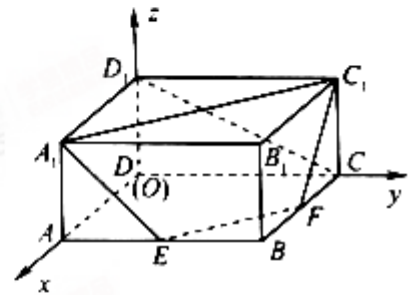
$$\text{故} \begin{cases} -u + v = 0 \\ -u + w = 0 \end{cases}, \text{解得 } u = v = w.$$

取 $u = 1$ ，得平面 A_1C_1FE 的一个法向量 $\vec{n} = (1, 1, 1)$ 。又 $\overrightarrow{CD_1} = (0, -2, 1)$ ，

$$\text{故} \frac{\overrightarrow{CD_1} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{CD_1}| |\vec{n}|} = -\frac{\sqrt{15}}{15}.$$

因此直线 CD_1 与平面 A_1C_1FE 所成的角的大小为 $\arcsin \frac{\sqrt{15}}{15}$ 。

【考点定位】空间向量求线面角



20、（本题满分14分）本题共有2小题，第小题满分6分，第小题满分8分

如图， A ， B ， C 三地有直道相通， $AB = 5$ 千米， $AC = 3$ 千米， $BC = 4$ 千米。现甲、

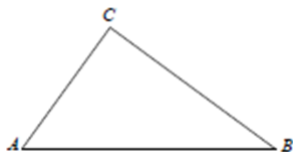
乙两警员同时从 A 地出发匀速前往 B 地，经过 t 小时，他们之间的距离为 $f(t)$ （单位：

千米）。甲的路线是 AB ，速度为 5 千米/小时，乙的路线是 ACB ，速度为 8 千米/小时。乙

到达 B 地后原地等待。设 $t = t_1$ 时乙到达 C 地。

(1) 求 t_1 与 $f(t_1)$ 的值;

(2) 已知警员的对讲机的有效通话距离是3千米. 当 $t_1 \leq t \leq 1$ 时, 求 $f(t)$ 的表达式, 并判断 $f(t)$ 在 $[t_1, 1]$ 上得最大值是否超过3? 说明理由.



【答案】 (1) $t_1 = \frac{3}{8}$, $f(t_1) = \frac{3}{8}\sqrt{41}$ (2) $f(t) = \begin{cases} \sqrt{25t^2 - 42t + 18}, & \frac{3}{8} \leq t \leq \frac{7}{8} \\ 5 - 5t, & \frac{7}{8} < t \leq 1 \end{cases}$ 不超过

3.

【解析】解: (1) $t_1 = \frac{3}{8}$.

记乙到C时甲所在地为D, 则 $AD = \frac{15}{8}$ 千米.

在 $\triangle ACD$ 中, $CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD \cos A$,

所以 $f(t_1) = CD = \frac{3}{8}\sqrt{41}$ (千米).

(2) 甲到达B用时1小时; 乙到达C用时 $\frac{3}{8}$ 小时, 从A到B总用时 $\frac{7}{8}$ 小时.

当 $t_1 = \frac{3}{8} \leq t \leq \frac{7}{8}$ 时,

$$f(t) = \sqrt{(7-8t)^2 + (5-5t)^2 - 2(7-8t)(5-5t) \cdot \frac{4}{5}} = \sqrt{25t^2 - 42t + 18};$$

当 $\frac{7}{8} \leq t \leq 1$ 时, $f(t) = 5 - 5t$.

$$\text{所以 } f(t) = \begin{cases} \sqrt{25t^2 - 42t + 18}, & \frac{3}{8} \leq t \leq \frac{7}{8} \\ 5 - 5t, & \frac{7}{8} < t \leq 1 \end{cases}$$

因为 $f(t)$ 在 $[\frac{3}{8}, \frac{7}{8}]$ 上的最大值是 $f(\frac{3}{8}) = \frac{3\sqrt{41}}{8}$, $f(t)$ 在 $[\frac{7}{8}, 1]$ 上的最大值是

$f\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{5}{8}$, 所以 $f(t)$ 在 $\left[\frac{3}{8}, 1\right]$ 上的最大值是 $\frac{3\sqrt{41}}{8}$, 不超过 3.

【考点定位】余弦定理

21、(本题满分14分) 本题共有2个小题, 第1小题6分, 第2小题8分.

已知椭圆 $x^2 + 2y^2 = 1$, 过原点的两条直线 l_1 和 l_2 分别于椭圆交于 A、B 和 C、D, 记得到的平行四边形 ABCD 的面积为 S .

(1) 设 $A(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$, 用 A、C 的坐标表示点 C 到直线 l_1 的距离, 并证明

$$S = 2|x_1y_1 - x_2y_2|;$$

(2) 设 l_1 与 l_2 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$, 求面积 S 的值.

【答案】(1) 详见解析 (2) $S = \sqrt{2}$

【解析】证明: (1) 直线 $l_1: y_1x - x_1y = 0$, 点 C 到 l_1 的距离 $d = \frac{|y_1x_2 - x_1y_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$.

$$|AB| = 2|OA| = 2\sqrt{x_1^2 + y_1^2},$$

$$\text{所以 } S = 2S_{\triangle ABC} = 2 \times \frac{1}{2} |AB| \cdot d = 2|x_1y_2 - x_2y_1|.$$

解: (2) 设 $l_1: y = kx$, 则 $l_2: y = -\frac{1}{2k}x$. 设

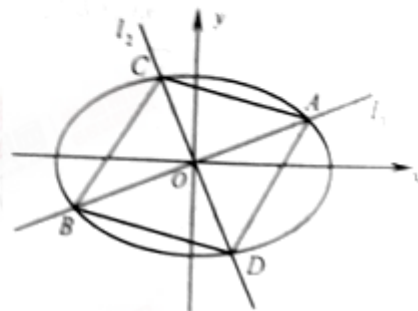
$$A(x_1, y_1), C(x_2, y_2).$$

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}, \text{ 得 } x_1^2 = \frac{1}{1+2k^2}.$$

$$\text{同理 } x_2^2 = \frac{1}{1+2\left(-\frac{1}{2k}\right)^2} = \frac{2k^2}{2k^2+1}.$$

$$\text{由 (1), } S = 2|x_1y_2 - x_2y_1| = 2\left|\frac{x_1 \cdot x_2}{2k} + x_2 \cdot kx_1\right| = \frac{2k^2+1}{|k|} \cdot |x_1x_2| = \frac{(2k^2+1)\sqrt{2}|k|}{|k|\sqrt{1+2k^2} \cdot \sqrt{2k^2+1}},$$

整理得 $S = \sqrt{2}$.



22、(本题满分16分) 本题共有3个小题. 第1小题满分4分, 第2小题满分6分, 第3小题满分6分.

已知数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 满足 $a_{n+1} - a_n = 2(b_{n+1} - b_n)$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 若 $b_n = 3n + 5$, 且 $a_1 = 1$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $\{a_n\}$ 的第 n_0 项是最大项, 即 $a_{n_0} > a_n$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 求证: 数列 $\{b_n\}$ 的第 n_0 项是最大项;

(3) 设 $a_1 = \lambda < 0$, $b_n = \lambda^n$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 求 λ 的取值范围, 使得 $\{a_n\}$ 有最大值 M 与最小值 m , 且 $\frac{M}{m} \in (-2, 2)$.

【答案】 (1) $a_n = 6n - 5$ (2) 详见解析 (3) $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

【解析】 解: (1) 由 $b_{n+1} - b_n = 3$, 得 $a_{n+1} - a_n = 6$,

所以 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公差为 6 的等差数列,

故 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 6n - 5$, $n \in \mathbf{N}^*$.

证明: (2) 由 $a_{n+1} - a_n = 2(b_{n+1} - b_n)$, 得 $a_{n+1} - 2b_{n+1} = a_n - 2b_n$.

所以 $\{a_n - 2b_n\}$ 为常数列, $a_n - 2b_n = a_1 - 2b_1$, 即 $a_n = 2b_n + a_1 - 2b_1$.

因为 $a_{n_0} \geq a_n$, $n \in \mathbf{N}^*$, 所以 $2b_{n_0} + a_1 - 2b_1 \geq 2b_n + a_1 - 2b_1$, 即 $b_{n_0} \geq b_n$.

故 $\{b_n\}$ 的第 n_0 项是最大项. 学科网

解: (3) 因为 $b_n = \lambda^n$, 所以 $a_{n+1} - a_n = 2(\lambda^{n+1} - \lambda^n)$,

$$\begin{aligned} \text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n &= (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1 \\ &= 2(\lambda^n - \lambda^{n-1}) + 2(\lambda^{n-1} - \lambda^{n-2}) + \cdots + 2(\lambda^2 - \lambda) + \lambda \\ &= 2\lambda^n - \lambda. \end{aligned}$$

当 $n = 1$ 时, $a_1 = \lambda$, 符合上式.

所以 $a_n = 2\lambda^n - \lambda$.

因为 $\lambda > 0$, 所以 $a_{2n} = 2|\lambda|^{2n} - \lambda > -\lambda$, $a_{2n-1} = 2|\lambda|^{2n-1} - \lambda < -\lambda$.

① 当 $\lambda < -1$ 时, 由指数函数的单调性知, $\{a_n\}$ 不存在最大、最小值;

②当 $\lambda = -1$ 时, $\{a_n\}$ 的最大值为 3, 最小值为 -1 , 而 $\frac{3}{-1} \notin (-2, 2)$;

③当 $-1 < \lambda < 0$ 时, 由指数函数的单调性知, $\{a_n\}$ 的最大值 $M = a_2 = 2\lambda^2 - \lambda$, 最小值

$m = a_1 = \lambda$, 由 $-2 < \frac{2\lambda^2 - \lambda}{\lambda} < 2$ 及 $-1 < \lambda < 0$, 得 $-\frac{1}{2} < \lambda < 0$.

综上, λ 的取值范围是 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

【考点定位】 等差数列, 数列单调性

23、(本题满分18分) 本题共有3个小题, 第1小题满分4分, 第2小题满分6分, 第3小题满分8分.

对于定义域为 \mathbf{R} 的函数 $g(x)$, 若存在正常数 T , 使得 $\cos g(x)$ 是以 T 为周期的函数, 则称 $g(x)$ 为余弦周期函数, 且称 T 为其余弦周期. 已知 $f(x)$ 是以 T 为余弦周期的余弦周期函数, 其值域为 \mathbf{R} . 设 $f(x)$ 单调递增, $f(0) = 0$, $f(T) = 4\pi$.

(1) 验证 $h(x) = x + \sin \frac{x}{3}$ 是以 6π 为周期的余弦周期函数;

(2) 设 $a < b$. 证明对任意 $c \in [f(a), f(b)]$, 存在 $x_0 \in [a, b]$, 使得 $f(x_0) = c$;

(3) 证明: “ u_0 为方程 $\cos f(x) = 1$ 在 $[0, T]$ 上得解”的充要条件是“ $u_0 + T$ 为方程 $\cos f(x) = 1$ 在 $[T, 2T]$ 上有解”, 并证明对任意 $x \in [0, T]$ 都有 $f(x+T) = f(x) + f(T)$.

【答案】 (1) 详见解析 (2) 详见解析 (3) 详见解析

【解析】证明：(1) 易见 $h(x) = x + \sin \frac{x}{3}$ 的定义域为 \mathbb{R} ，

对任意 $x \in \mathbb{R}$ ， $h(x+6\pi) = x+6\pi + \sin \frac{x+6\pi}{3} = h(x) + 6\pi$ ，

所以 $\cos h(x+6\pi) = \cos(h(x)+6\pi) = \cos h(x)$ ，

即 $h(x)$ 是以 6π 为余弦周期的余弦周期函数. 学科网

(2) 由于 $f(x)$ 的值域为 \mathbb{R} ，所以对任意 $c \in [f(a), f(b)]$ ， c 都是一个函数值，即有 $x_0 \in \mathbb{R}$ ，使得

$f(x_0) = c$ 。

若 $x_0 < a$ ，则由 $f(x)$ 单调递增得到 $c = f(x_0) < f(a)$ ，与 $c \in [f(a), f(b)]$ 矛盾，所以 $x_0 \geq a$ 。同理可

证 $x_0 \leq b$ 。故存在 $x_0 \in [a, b]$ 使得 $f(x_0) = c$ 。

(3) 若 u_0 为 $\cos f(x) = 1$ 在 $[0, T]$ 上的解，则 $\cos f(u_0) = 1$ ，且 $u_0 + T \in [T, 2T]$ ，

$\cos f(u_0 + T) = \cos f(u_0) = 1$ ，即 $u_0 + T$ 为方程 $\cos f(x) = 1$ 在 $[T, 2T]$ 上的解

同理，若 $u_0 + T$ 为方程 $\cos f(x) = 1$ 在 $[T, 2T]$ 上的解，则 u_0 为该方程在 $[0, T]$ 上的解。

以下证明最后一部分结论. 学科网

由 (2) 所证知存在 $0 = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 = T$ ，使得 $f(x_i) = i\pi$ ， $i = 0, 1, 2, 3, 4$ 。

而 $[x_i, x_{i+1}]$ 是函数 $\cos f(x)$ 的单调区间， $i = 0, 1, 2, 3$ 。

与之前类似地可以证明： u_0 是 $\cos f(x) = -1$ 在 $[0, T]$ 上的解当且仅当 $u_0 + T$ 是 $\cos f(x) = -1$ 在 $[T, 2T]$ 上

的解。从而 $\cos f(x) = \pm 1$ 在 $[0, T]$ 与 $[T, 2T]$ 上的解的个数相同。

故 $f(x_i + T) = f(x_i) + 4\pi$ ， $i = 0, 1, 2, 3, 4$ 。

对于 $x \in [0, x_1]$ ， $f(x) \in [0, \pi]$ ， $f(x+T) \in [4\pi, 5\pi]$ ，

而 $\cos f(x+T) = \cos f(x)$ ，故 $f(x+T) = f(x) + 4\pi = f(x) + f(T)$ 。

类似地，当 $x \in [x_i, x_{i+1}]$ ， $i = 1, 2, 3$ 时，有 $f(x+T) = f(x) + f(T)$ 。

结论成立。

【考点定位】新定义问题

