2006年海南高考文科数学真题及答案

一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

1.（5分）已知向量$\vec{a}$、$\vec{b}$满足$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=4$，且$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$夹角为（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　B. $\frac{\pi}{4}$　C. $\frac{\pi}{3}$　D. $\frac{\pi}{2}$

2.（5分）设集合$M=\{x|x^2-x<0\}$，$N=\{x||x|<2\}$，则（　　）

A. $M\cap N=\varnothing$　B. $M\cap N=M$　C. $M\cup N=M$　D. $M\cup N=R$

3.（5分）已知函数$y=e^x$的图象与函数$y=f(x)$的图象关于直线$y=x$对称，则（　　）

A. $f(2x)=e^{2x}(x\in R)$　B. $f(2x)=\ln2\cdot\ln x(x>0)$

C. $f(2x)=2e^x(x\in R)$　D. $f(2x)=\ln x+\ln2(x>0)$

4.（5分）双曲线$mx^2+y^2=1$的虚轴长是实轴长的2倍，则$m=$（　　）

A. $-\frac{1}{4}$　B. -4　C. 4　D. $\frac{1}{4}$

5.（5分）设S_n是等差数列$\{a_n\}$的前n项和，若$S_7=35$，则$a_4=$（　　）

A. 8　B. 7　C. 6　D. 5

6.（5分）函数$f(x)=\tan(x+\frac{\pi}{4})$的单调增区间为（　　）

A. $(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2})$，$k\in Z$　B. $(k\pi,(k+1)\pi)$，$k\in Z$

C. $(k\pi-\frac{3\pi}{4},k\pi+\frac{\pi}{4})$，$k\in Z$　D. $(k\pi-\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{3\pi}{4})$，$k\in Z$

7.（5分）从圆$x^2-2x+y^2-2y+1=0$外一点$P(3,2)$向这个圆作两条切线，则两切线夹角的余弦值为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　B. $\frac{3}{5}$　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　D. 0

8.（5分）△ABC的内角A、B、C的对边分别为a、b、c，若a、b、c成等比数列，且$c=2a$，则$\cos B=$（　　）

A. $\frac{1}{4}$　B. $\frac{3}{4}$　C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

9.（5分）已知各顶点都在一个球面上的正四棱柱高为4，体积为16，则这个球的表面积是（　　）

A. 16π　B. 20π　C. 24π　D. 32π

10.（5 分）在 $(x-\frac{1}{2x})^{10}$的展开式中，x^4的系数为（　　）

A. ﹣120　 B. 120　C. ﹣15 D. 15

11.（5 分）抛物线 $y=-x^2$上的点到直线 $4x+3y-8=0$ 距离的最小值是（　　）

A. $\frac{1}{4}$　 B. $\frac{4}{3}$　 C. $\frac{8}{5}$　 D. 3

12.（5 分）用长度分别为 2、3、4、5、6（单位：cm）的 5 根细木棒围成一个三角形（允许连接，但不允许折断），能够得到的三角形的最大面积为（　　）

A. $8\sqrt{5}cm^2$ B. $6\sqrt{10}cm^2$　 C. $3\sqrt{55}cm^2$　 D. $20cm^2$

二、填空题（共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

13.（4 分）已知函数 $f(x)=a-\frac{1}{2^x+1}$，若 f（x）为奇函数，则 a=____.

14.（4 分）已知正四棱锥的体积为 12，底面对角线长为 $2\sqrt{6}$，则侧面与底面所成的二面角等于____°．

15.（4 分）设 $z=2y-x$，式中变量 x、y 满足下列条件：$\begin{cases}2x-y\geqslant -1\\3x+2y\leqslant 23\\y\geqslant 1\end{cases}$，则 z 的最大值为____.

16.（4 分）安排 7 位工作人员在 5 月 1 日至 5 月 7 日值班，每人值班一天，其中甲、乙二人都不安排在 5 月 1 日和 2 日．不同的安排方法共有 ____种（用数字作答）.

三、解答题（共 6 小题，满分 74 分）

17.（12 分）已知$\{a_n\}$为等比数列，$a_3=2$ ，$a_2+a_4=\frac{20}{3}$，求$\{a_n\}$的通项公式.

18.（12 分）ABC 的三个内角为 A、B、C，求当 A 为何值时，$\cos A+2\cos\frac{B+C}{2}$取得最大值，并求出这个最大值.

19.（12 分）A、B 是治疗同一种疾病的两种药，用若干试验组进行对比试验．每个试验组由 4 只小白鼠组成，其中 2 只服用 A，另 2 只服用 B，然后观察疗效．若在一个试验组中，服用 A 有效的小白鼠的只数比服用 B 有效的多，就称该试验组为甲类组．设每只小白鼠服用 A 有效的概率为$\frac{2}{3}$，服用 B 有效的概率为$\frac{1}{2}$.

（Ⅰ）求一个试验组为甲类组的概率；

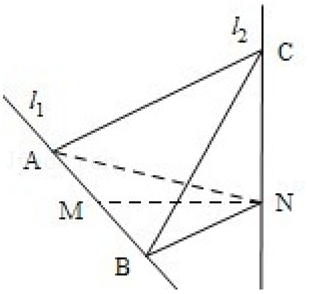
（Ⅱ）观察 3 个试验组，用 ξ 表示这 3 个试验组中甲类组的个数，求 ξ 的分布列和数学期

望.

20.（12分）如图，l_1、l_2是互相垂直的异面直线，MN是它们的公垂线段．点A、B在l_1上，C在l_2上，AM=MB=MN.

（Ⅰ）证明AC⊥NB;

（Ⅱ）若∠ACB=60°，求NB与平面ABC所成角的余弦值.



21.（12分）设P是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$（a＞1）短轴的一个端点，Q为椭圆上一个动点，求|PQ|的最大值.

22.（14分）设a为实数，函数f（x）=$x^3-ax^2+(a^2-1)x$在（－∞，0）和（1，+∞）都是增函数，求a的取值范围.

2006年海南高考文科数学真题参考答案

一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

1.（5分）（2006•全国卷Ⅰ）已知向量$\vec{a}$、$\vec{b}$满足$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=4$，且$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$夹角为（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　B. $\frac{\pi}{4}$　C. $\frac{\pi}{3}$　D. $\frac{\pi}{2}$

【分析】本题是对向量数量积的考查，根据两个向量的夹角和模之间的关系，用数量积列出等式，变化出夹角的余弦表示式，代入给出的数值，求出余弦值，注意向量夹角的范围，求出适合的角.

【解答】解：∵向量a、b满足$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=4$，且$\vec{a}.\vec{b}=2$，

设$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为θ，

则$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{1}{2}$，

∵ θ ∈【0 π】,

∴ $\theta=\frac{\pi}{3}$,

故选 C.

2.（5 分）（2006•全国卷Ⅰ）设集合 $M=\{x|x^2-x<0\}$，$N=\{x||x|<2\}$，则（　　）

A. $M\cap N=\varnothing$　B. $M\cap N=M$　C. $M\cup N=M$　D. $M\cup N=R$

【分析】M、N 分别是二次不等式和绝对值不等式的解集，分别解出再求交集合并集.

【解答】解：集合 $M=\{x|x^2-x<0\}=\{x|0<x<1\}$，$N=\{x||x|<2\}=\{x|-2<x<2\}$，∴ $M\cap N=M$,

故选：B.

3.（5 分）（2006•全国卷Ⅰ）已知函数 $y=e^x$ 的图象与函数 y=f（x）的图象关于直线 y=x 对称，则（　　）

A. f（2x）$=e^{2x}$（x∈R）　B. f（2x）=ln2•lnx（x>0）

C. f（2x）$=2e^x$（x∈R）　D. f（2x）=lnx+ln2（x>0）

【分析】本题考查反函数的概念、互为反函数的函数图象的关系、求反函数的方法等相关知识和方法.

根据函数 $y=e^x$ 的图象与函数 y=f（x）的图象关于直线 y=x 对称可知 f（x）是 $y=e^x$ 的反函数，由此可得 f（x）的解析式，进而获得 f（2x）.

【解答】解：函数 $y=e^x$ 的图象与函数 y=f（x）的图象关于直线 y=x 对称，

所以 f（x）是 $y=e^x$ 的反函数，即 f（x）=lnx,

∴f（2x）=ln2x=lnx+ln2（x>0),

选 D.

4.（5 分）（2006•全国卷Ⅰ）双曲线 $mx^2+y^2=1$ 的虚轴长是实轴长的 2 倍，则 m=（　　）

A. $-\frac{1}{4}$ B. －4　C. 4　D. $\frac{1}{4}$

【分析】由双曲线 $mx^2+y^2=1$ 的虚轴长是实轴长的 2 倍，可求出该双曲线的方程，从而求出 m 的值.

【解答】解：双曲线 $mx^2+y^2=1$ 的虚轴长是实轴长的 2 倍,

∴m<0，且双曲线方程为 $-\frac{x^2}{4}+y^2=1$，

∴m= $-\frac{1}{4}$,

故选：A.

5.（5分）（2006•全国卷Ⅰ）设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $S_7=35$，则 $a_4=$（　　）

A. 8　B. 7　C. 6　D. 5

【分析】充分运用等差数列前 n 项和与某些特殊项之间的关系解题.

【解答】解：S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $S_7=\frac{a_1+a_7}{2}\times 7=7a_4=35$，

∴$a_4=5$，

故选 D.

6.（5分）（2006•全国卷Ⅰ）函数 $f(x)=\tan(x+\frac{\pi}{4})$ 的单调增区间为（　　）

A. $(k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\pi+\frac{\pi}{2})$，$k\in Z$ B.（kπ，(k+1)π），k∈Z

C. $(k\pi-\frac{3\pi}{4},\ k\pi+\frac{\pi}{4})$，$k\in Z$　D. $(k\pi-\frac{\pi}{4},\ k\pi+\frac{3\pi}{4})$，$k\in Z$

【分析】先利用正切函数的单调性求出函数单调增时 $x+\frac{\pi}{4}$ 的范围 i，进而求得 x 的范围.

【解答】解：函数 $f(x)=\tan(x+\frac{\pi}{4})$ 的单调增区间满足 $k\pi-\frac{\pi}{2}<x+\frac{\pi}{4}<k\pi+\frac{\pi}{2}$，

∴单调增区间为 $(k\pi-\frac{3\pi}{4},\ k\pi+\frac{\pi}{4})$，$k\in Z$，

故选 C

7.（5分）（2006•全国卷Ⅰ）从圆 $x^2-2x+y^2-2y+1=0$ 外一点 P（3，2）向这个圆作两条切线，则两切线夹角的余弦值为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　B. $\frac{3}{5}$　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　D. 0

【分析】先求圆心到 P 的距离，再求两切线夹角一半的三角函数值，然后求出结果.

【解答】解：圆 $x^2-2x+y^2-2y+1=0$ 的圆心为 M（1，1），半径为 1，从外一点 P（3，2）向这个圆作两条切线，

则点 P 到圆心 M 的距离等于 $\sqrt{5}$，每条切线与 PM 的夹角的正切值等于 $\frac{1}{2}$，

所以两切线夹角的正切值为$\tan\theta=\dfrac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{4}{3}$，该角的余弦值等于$\dfrac{3}{5}$，

故选 B.

8．（5 分）（2006•全国卷Ⅰ）△ABC 的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，若 a、b、c 成等比数列，且 c=2a，则 cosB=（　　）

A．$\dfrac{1}{4}$　B．$\dfrac{3}{4}$　C．$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　D．$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

【分析】根据等比数列的性质，可得 $b=\sqrt{2}a$，将 c、b 与 a 的关系结合余弦定理分析可得答案.

【解答】解：△ABC 中，a、b、c 成等比数列，则 $b^2=ac$，

由 c=2a，则 $b=\sqrt{2}a$，

$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{a^2+4a^2-2a^2}{4a^2}=\dfrac{3}{4}$，

故选 B.

9．（5 分）（2006•全国卷Ⅰ）已知各顶点都在一个球面上的正四棱柱高为 4，体积为 16，则这个球的表面积是（　　）

A．16π　B．20π　C．24π　D．32π

【分析】先求正四棱柱的底面边长，然后求其对角线，就是球的直径，再求其表面积.

【解答】解：正四棱柱高为 4，体积为 16，底面积为 4，正方形边长为 2，

正四棱柱的对角线长即球的直径为 $2\sqrt{6}$，

∴球的半径为 $\sqrt{6}$，球的表面积是 24π，

故选 C.

10．（5 分）（2006•全国卷Ⅰ）在 $(x-\dfrac{1}{2x})^{10}$ 的展开式中，x^4 的系数为（　　）

A．－120　B．120　C．－15　D．15

【分析】利用二项展开式的通项公式求出第 r+1 项，令 x 的指数为 4 求出 x^4 的系数

【解答】解：在 $(x-\dfrac{1}{2x})^{10}$ 的展开式中

x^4项是$C_{10}^{3}(x)^{7}\left(-\frac{1}{2x}\right)^{3}=-15x^4$，

故选项为C.

11．（5分）（2006•全国卷Ⅰ）抛物线$y=-x^2$上的点到直线$4x+3y-8=0$距离的最小值是（　　）

A．$\frac{1}{4}$　B．$\frac{4}{3}$　C．$\frac{8}{5}$　D．3

【分析】设抛物线$y=-x^2$上一点为（m，$-m^2$），该点到直线$4x+3y-8=0$的距离为$\frac{|4m-3m^2-8|}{5}$，由此能够得到所求距离的最小值.

【解答】解：设抛物线$y=-x^2$上一点为（m，$-m^2$），

该点到直线$4x+3y-8=0$的距离为$\frac{|4m-3m^2-8|}{5}$，

分析可得，当$m=\frac{2}{3}$时，取得最小值为$\frac{4}{3}$，

故选B.

12．（5分）（2006•全国卷Ⅰ）用长度分别为2、3、4、5、6（单位：cm）的5根细木棒围成一个三角形（允许连接，但不允许折断），能够得到的三角形的最大面积为（　　）

A．$8\sqrt{5}cm^2$ B．$6\sqrt{10}cm^2$　C．$3\sqrt{55}cm^2$　D．$20cm^2$

【分析】设三角形的三边分别为a，b，c，令$p=\frac{a+b+c}{2}$，则p=10．海伦公式$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\leq\sqrt{10\left[\frac{(10-a)+(10-b)+(10-c)}{3}\right]^3}=\frac{100\sqrt{3}}{9}$故排除C，D，由于等号成立的条件为$10-a=10-b=10-c$，故“=”不成立，推测当三边长相等时面积最大，故考虑当a，b，c三边长最接近时面积最大，进而得到答案.

【解答】解：设三角形的三边分别为a，b，c，

令$p=\frac{a+b+c}{2}$，则p=10．由海伦公式$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

知$S=\sqrt{10(10-a)(10-b)(10-c)}\leq\sqrt{10\left[\frac{(10-a)+(10-b)+(10-c)}{3}\right]^3}=\frac{100\sqrt{3}}{9}<20<3\sqrt{55}$

由于等号成立的条件为 10 - a=10 - b=10 - c，故“=”不成立，

∴S＜20＜$\sqrt[3]{55}$.

排除 C，D.

由以上不等式推测，当三边长相等时面积最大，故考虑当 a，b，c 三边长最接近时面积最大，此时三边长为 7，7，6，用 2、5 连接，3、4 连接各为一边，第三边长为 7 组成三角形，此三角形面积最大，面积为 $6\sqrt{10}cm^2$，

故选 B.

二、填空题（共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

13．（4 分）（2006•全国卷Ⅰ）已知函数 f（x）=a - $\frac{1}{2^x+1}$，若 f（x）为奇函数，则 a=__$\frac{1}{2}$__.

【分析】因为 f（x）为奇函数，而在 x=0 时，f（x）有意义，利用 f（0）=0 建立方程，求出参数 a 的值.

【解答】解：函数 $f(x)=a-\frac{1}{2^x+1}$. 若 f（x）为奇函数，

则 f（0）=0，

即 $a-\frac{1}{2^0+1}=0$，a=$\frac{1}{2}$.

故答案为$\frac{1}{2}$

14．（4 分）（2006•全国卷Ⅰ）已知正四棱锥的体积为 12，底面对角线长为 $2\sqrt{6}$，则侧面与底面所成的二面角等于__60__°．

【分析】先根据底面对角线长求出边长，从而求出底面积，再由体积求出正四棱锥的高，求出侧面与底面所成的二面角的平面角的正切值即可.

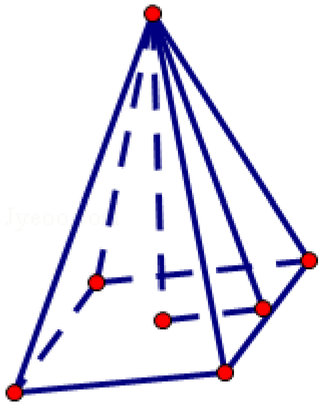
【解答】解：正四棱锥的体积为 12，底面对角线的长为 $2\sqrt{6}$，底面边长为 $2\sqrt{3}$，底面积为 12，

所以正四棱锥的高为 3，

则侧面与底面所成的二面角的正切 tanα=$\sqrt{3}$，

∴二面角等于 60°，

故答案为 60°



15．（4 分）（2006•全国卷Ⅰ）设 z=2y﹣x，式中变量 x、y 满足下列条件：$\begin{cases}2x-y\geqslant -1\\3x+2y\leqslant 23\\y\geqslant 1\end{cases}$，

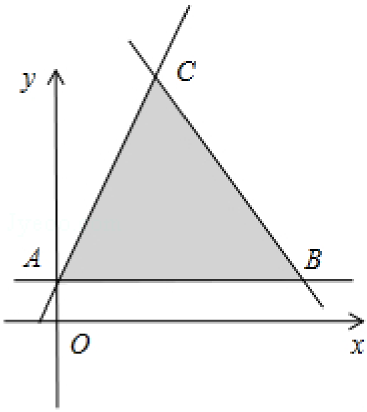
则 z 的最大值为__11__．

【分析】先根据约束条件画出可行域，再利用几何意义求最值，z=2y﹣x 表示直线在 y 轴上的截距，只需求出可行域直线在 y 轴上的截距最大值即可．

【解答】解：$\begin{cases}2x-y\geqslant -1\\3x+2y\leqslant 23\\y\geqslant 1\end{cases}$，在坐标系中画出图象，

三条线的交点分别是 A（0，1），B（7，1），C（3，7），

在△ABC 中满足 z=2y﹣x 的最大值是点 C，代入得最大值等于 11．



故填：11．

16．（4 分）（2006•全国卷Ⅰ）安排 7 位工作人员在 5 月 1 日至 5 月 7 日值班，每人值班一天，其中甲、乙二人都不安排在 5 月 1 日和 2 日．不同的安排方法共有__2400__种（用数字作答）．

【分析】本题是一个分步计数问题，先安排甲、乙两人在假期的后 5 天值班，有 A_5^2 种排法，其余 5 人再进行排列，有 A_5^5 种排法，根据分步计数原理得到结果.

【解答】解：由题意知本题是一个分步计数问题，

首先安排甲、乙两人在假期的后 5 天值班，有 $A_5^2=20$ 种排法，

其余 5 人再进行排列，有 $A_5^5=120$ 种排法，

∴根据分步计数原理知共有 $20\times120=2400$ 种安排方法.

故答案为：2400

三、解答题（共 6 小题，满分 74 分）

17.（12 分）（2006•全国卷Ⅰ）已知 $\{a_n\}$ 为等比数列，$a_3=2$，$a_2+a_4=\frac{20}{3}$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【分析】首先设出等比数列的公比为 q，表示出 a_2，a_4，利用两者之和为 $\frac{20}{3}$，求出公比 q 的两个值，利用其两个值分别求出对应的首项 a_1，最后利用等比数列的通项公式得到即可.

【解答】解：设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，则 $q\neq0$，$a_2=\frac{a_3}{q}=\frac{2}{q}$，$a_4=a_3q=2q$

所以 $\frac{2}{q}+2q=\frac{20}{3}$，

解得 $q_1=\frac{1}{3}$，$q_2=3$，

当 $q_1=\frac{1}{3}$，$a_1=18$.

所以 $a_n=18\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{18}{3^{n-1}}=2\times3^{3-n}$.

当 q=3 时，$a_1=\frac{2}{9}$，

所以 $a_n=\frac{2}{9}\times3n-1=2\times3^{n-3}$.

18．（12 分）（2006•全国卷Ⅰ）ABC 的三个内角为 A、B、C，求当 A 为何值时，$\cos A+2\cos\frac{B+C}{2}$ 取得最大值，并求出这个最大值.

【分析】利用三角形中内角和为 π，将三角函数变成只含角 A，再利用三角函数的二倍角公

式将函数化为只含角$\frac{A}{2}$，利用二次函数的最值求出最大值

【解答】解：由 A+B+C=π，得$\frac{B+C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}$,

所以有 $\cos\frac{B+C}{2}=\sin\frac{A}{2}$.

$\cos A+2\cos\frac{B+C}{2}=\cos A+2\sin\frac{A}{2}=1-2\sin^2\frac{A}{2}+2\sin\frac{A}{2}$

$=-2(\sin\frac{A}{2}-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{2}$

当 $\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}$，即 $A=\frac{\pi}{3}$时，$\cos A+2\cos\frac{B+C}{2}$取得最大值为$\frac{3}{2}$

故最大值为$\frac{3}{2}$

19.（12 分）（2006•全国卷Ⅰ）A、B 是治疗同一种疾病的两种药，用若干试验组进行对比试验．每个试验组由 4 只小白鼠组成，其中 2 只服用 A，另 2 只服用 B，然后观察疗效．若在一个试验组中，服用 A 有效的小白鼠的只数比服用 B 有效的多，就称该试验组为甲类组．设每只小白鼠服用 A 有效的概率为$\frac{2}{3}$，服用 B 有效的概率为$\frac{1}{2}$.

（Ⅰ）求一个试验组为甲类组的概率；

（Ⅱ）观察 3 个试验组，用 ξ 表示这 3 个试验组中甲类组的个数，求 ξ 的分布列和数学期望．

【分析】(1）由题意知本题是一个独立重复试验，根据所给的两种药物对小白鼠有效的概率，计算出小白鼠有效的只数的概率，对两种药物有效的小白鼠进行比较，得到甲类组的概率．

（2）由题意知本试验是一个甲类组的概率不变，实验的条件不变，可以看做是一个独立重复试验，所以变量服从二项分布，根据二项分布的性质写出分布列和期望．

【解答】解：(1）设 A_i表示事件“一个试验组中，服用 A 有效的小鼠有 i 只“，i=0，1，2，

B_i表示事件“一个试验组中，服用 B 有效的小鼠有 i 只“，i=0，1，2，

依题意有：$P(A_1)=2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$，$P(A_2)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$．$P(B_0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$,

$P(B_1)=2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，所求概率为：

$P=P(B_0\bullet A_1)+P(B_0\bullet A_2)+P(B_1\bullet A_2)$

$=\frac{1}{4}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{4}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{9}=\frac{4}{9}$

（Ⅱ）ξ 的可能值为 0，1，2，3 且 ξ～B（3，$\frac{4}{9}$）.

P（ξ=0）=（$\frac{5}{9}$）$^3=\frac{125}{729}$，

P（ξ=1）=$C_3^1\times\frac{4}{9}\times$（$\frac{5}{9}$）$^2=\frac{100}{243}$，

P（ξ=2）=$C_3^2\times$（$\frac{4}{9}$）$^2\times\frac{5}{9}=\frac{80}{243}$，

P（ξ=3）=（$\frac{4}{9}$）$^3=\frac{64}{729}$

∴ξ 的分布列为：

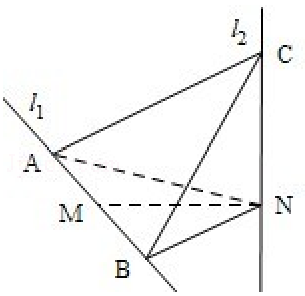
ξ	0	1	2	3
P	$\frac{125}{729}$	$\frac{100}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{64}{729}$

∴数学期望 Eξ=3$\times\frac{4}{9}=\frac{4}{3}$.

20．（12 分）（2006•全国卷Ⅰ）如图，l_1、l_2是互相垂直的异面直线，MN 是它们的公垂线段．点 A、B 在 l_1上，C 在 l_2上，AM=MB=MN．

（Ⅰ）证明 AC⊥NB；

（Ⅱ）若∠ACB=60°，求 NB 与平面 ABC 所成角的余弦值．



【分析】(1)欲证 AC⊥NB，可先证 BN⊥面 ACN，根据线面垂直的判定定理只需证 AN⊥BN，CN⊥BN 即可；

(2)易证 N 在平面 ABC 内的射影 H 是正三角形 ABC 的中心，连接 BH，∠NBH 为 NB 与平面 ABC 所成的角，在 Rt△NHB 中求出此角即可．

【解答】解：（Ⅰ）由已知 l_2⊥MN，l_2⊥l_1，MN∩l_1=M，可得 l_2⊥平面 ABN．

由已知 MN⊥l_1，AM=MB=MN，

可知 AN=NB 且 AN⊥NB．

又 AN 为 AC 在平面 ABN 内的射影.

∴AC⊥NB

（Ⅱ）∵AM=MB=MN，MN 是它们的公垂线段，

由中垂线的性质可得 AN=BN，

∴Rt△CAN≌Rt△CNB，

∴AC=BC，又已知∠ACB=60°，

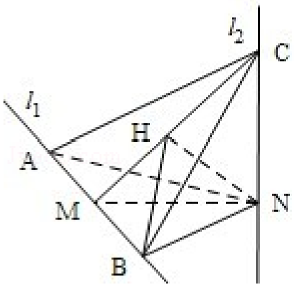
因此△ABC 为正三角形.

∵Rt△ANB≌Rt△CNB，

∴NC=NA=NB，因此 N 在平面 ABC 内的射影 H 是正三角形 ABC 的中心，

连接 BH，∠NBH 为 NB 与平面 ABC 所成的角.

在 Rt△NHB 中，$\cos\angle NBH=\frac{HB}{NB}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}AB}{\frac{\sqrt{2}}{2}AB}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.



21.（12 分）（2006•全国卷Ⅰ）设 P 是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$（a＞1）短轴的一个端点，Q 为椭圆上一个动点，求|PQ|的最大值.

【分析】依题意可知$|PQ|=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$，因为 Q 在椭圆上，所以 $x^2=a^2(1-y^2)$，$|PQ|^2=a^2(1-y^2)+y^2-2y+1=(1-a^2)y^2-2y+1+a^2$

$=(1-a^2)(y-\frac{1}{1-a^2})^2-\frac{1}{1-a^2}+1+a^2$. 由此分类讨论进行求解.

【解答】解：由已知得到 P（0，1）或 P（0，－1）

由于对称性，不妨取 P（0，1）

设 Q（x，y）是椭圆上的任一点，

则$|PQ|=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$，①

又因为Q在椭圆上，

所以，$x^2=a^2(1-y^2)$，

$|PQ|^2=a^2(1-y^2)+y^2-2y+1=(1-a^2)y^2-2y+1+a^2$

$=(1-a^2)(y-\frac{1}{1-a^2})^2-\frac{1}{1-a^2}+1+a^2$. ②

因为$|y|\leqslant1$，$a>1$，若$a\geqslant\sqrt{2}$，则$|\frac{1}{1-a^2}|\leqslant1$，

所以如果它包括对称轴的x的取值，那么就是顶点上取得最大值，

即当$-1\leqslant\frac{1}{1-a^2}<0$时，

在$y=\frac{1}{1-a^2}$时，$|PQ|$取最大值$\frac{a^2\sqrt{a^2-1}}{a^2-1}$；

如果对称轴不在y的取值范围内的话，那么根据图象给出的单调性来求解.

即当$\frac{1}{1-a^2}<-1$时，则当$y=-1$时，$|PQ|$取最大值2.

22.（14分）（2006•全国卷Ⅰ）设a为实数，函数$f(x)=x^3-ax^2+(a^2-1)x$在$(-\infty,0)$和$(1,+\infty)$都是增函数，求a的取值范围.

【分析】先对函数f（x）进行求导得到一个二次函数，根据二次函数的图象和性质令$f'(x)\geqslant0$在$(-\infty,0)$和$(1,+\infty)$成立，解出a的值.

【解答】解：$f'(x)=3x^2-2ax+(a^2-1)$，其判别式$\triangle=4a^2-12a^2+12=12-8a^2$.

（i）若$\triangle=12-8a^2=0$，即$a=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$，当$x\in(-\infty,\frac{a}{3})$，或$x\in(\frac{a}{3},+\infty)$时，

$f'(x)>0$，f（x）在$(-\infty,+\infty)$为增函数.

所以$a=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$.

（ii）若$\triangle=12-8a^2<0$，恒有$f'(x)>0$，f（x）在$(-\infty,+\infty)$为增函数，

所以$a^2>\frac{3}{2}$，

即$a\in(-\infty,-\frac{\sqrt{6}}{2})\cup(\frac{\sqrt{6}}{2},+\infty)$

（iii）若$\triangle12-8a^2>0$，即$-\frac{\sqrt{6}}{2}<a<\frac{\sqrt{6}}{2}$，

令 $f'(x)=0$，

解得 $x_1=\frac{a-\sqrt{3-2a^2}}{3}$，$x_2=\frac{a+\sqrt{3-2a^2}}{3}$.

当 $x\in(-\infty, x_1)$，或 $x\in(x_2, +\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 为增函数；

当 $x\in(x_1, x_2)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 为减函数．依题意 $x_1\geqslant 0$ 且 $x_2\leqslant 1$.

由 $x_1\geqslant 0$ 得 $a\geqslant\sqrt{3-2a^2}$，解得 $1\leqslant a<\frac{\sqrt{6}}{2}$

由 $x_2\leqslant 1$ 得 $\sqrt{3-2a^2}\leqslant 3-a$，解得 $-\frac{\sqrt{6}}{2}<a<\frac{\sqrt{6}}{2}$，从而 $a\in[1, \frac{\sqrt{6}}{2})$

综上，a 的取值范围为 $(-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{2}]\cup[\frac{\sqrt{6}}{2}, +\infty)\cup[1, \frac{\sqrt{6}}{2})$，

即 $a\in(-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{2}]\cup[1, +\infty)$.