

2010年普通高等学校招生全国统一考试（湖南卷）

数学（理工农医类）

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $M = \{1, 2, 3\}$ ,  $N = \{2, 3, 4\}$ , 则

- A.  $M \subseteq N$     B.  $N \subseteq M$     C.  $M \cap N = \{2, 3\}$     D.  $M \cup N = \{1, 4\}$

2. 下列命题中的假命题是

- A.  $\forall x \in \mathbb{R}, 2^{x-1} > 0$     B.  $\forall x \in \mathbb{N}^*, (x-1)^2 > 0$   
C.  $\exists x \in \mathbb{R}, \lg x < 1$     D.  $\exists x \in \mathbb{R}, \tan x = 2$

3. 极坐标方程  $\rho = \cos \theta$  和参数方程  $\begin{cases} x = -1-t, \\ y = 2+3t \end{cases}$  ( $t$ 为参数) 所表示的图形分别是

- A. 圆、直线    B. 直线、圆    C. 圆、圆    D. 直线、直线

4. 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $AC = 4$ , 则  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  等于

- A. -16    B. -8    C. 8    D. 16

5.  $\int_2^4 \frac{1}{x} dx$  等于    A.  $-2 \ln 2$     B.  $2 \ln 2$     C.  $-\ln 2$     D.  $\ln 2$

6. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边长分别为  $a, b, c$ . 若  $\angle C = 120^\circ$ ,  $c = \sqrt{2}a$ , 则

- A.  $a > b$     B.  $a < b$     C.  $a = b$     D.  $a$ 与 $b$ 的大小关系不能确定

7. 在某种信息传输过程中, 用4个数字的一个排列(数字允许重复)表示一个信息, 不同排列表示不同信息, 若所用数字只有0和1, 则与信息0110至多有两个对应位置上的数字相同的信息个数为

- A. 10    B. 11    C. 12    D. 15

8. 用  $\min\{a, b\}$  表示  $a, b$  两数中的最小值. 若函数  $f(x) = \min\{|x|, |x+t|\}$  的图像关于直线  $x = -\frac{1}{2}$  对称, 则  $t$  的值为    A. -2    B. 2    C. -1    D. 1

二、填空题：本大题共7小题，每小题5分，共35分。把答案填在答题卡中对应题号后的横线上。

9. 已知一种材料的最佳加入量在110g到210g之间。若用0.618法安排实验，则

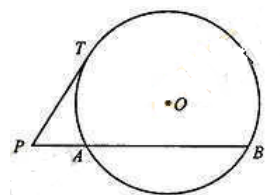


图 1

第一次试点的加入量可以是\_\_\_\_\_g.

10. 如图1所示, 过 $\odot O$ 外一点P作一条直线与 $\odot O$ 交于A,B两点. 已知PA=2, 点P到 $\odot O$ 的切线长PT=4, 则弦AB的长为\_\_\_\_\_.

11. 在区间 $[-1,2]$ 上随机取一个数 $x$ , 则 $|x| \leq 1$ 的概率为\_\_\_\_\_.

12. 图2是求 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 100^2$ 的值的程序框图, 则正整数 $n =$ \_\_\_\_\_.

13. 图3中的三个直角三角形是一个体积为 $20 \text{ cm}^3$ 的几何体的三视图, 则 $h =$ \_\_\_\_\_ cm.

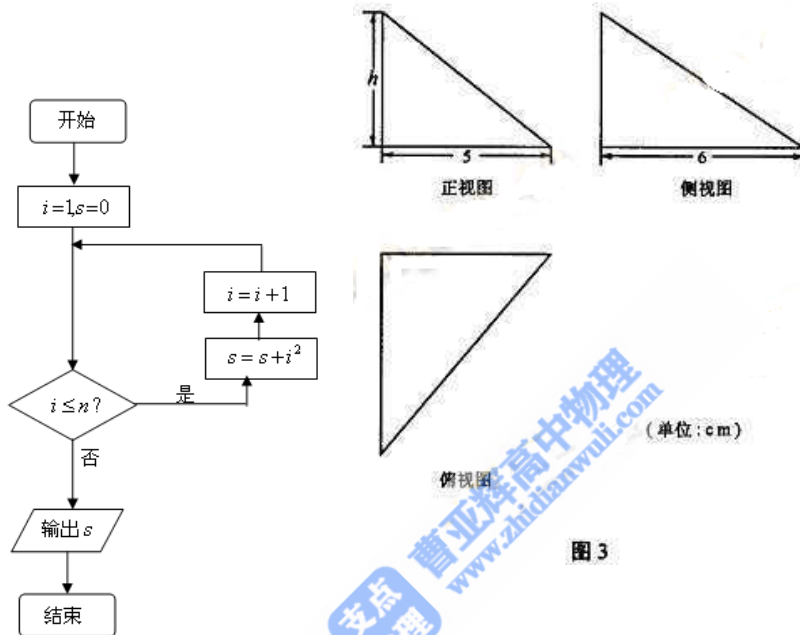


图3

14. 过抛物线 $x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点作斜率为1的直线与该抛物线交于A,B两点, A,B在x轴上的正射影分别为D,C. 若梯形ABCD的面积为 $12\sqrt{2}$ , 则 $p =$ \_\_\_\_\_.

15. 若数列 $\{a_n\}$ 满足: 对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$ , 只有有限个正整数 $m$ 使得 $a_m < n$ 成立, 记这样的 $m$ 的个数为 $(a_n)^*$ , 则得到一个新数列 $\{(a_n)^*\}$ . 例如, 若数列 $\{a_n\}$ 是 $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ , 则数列 $\{(a_n)^*\}$ 是 $0, 1, 2, \dots, n-1, \dots$ . 已知对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_n = n^2$ , 则 $(a_5)^* =$ \_\_\_\_\_.

,  
 $((a_n)^*)^* =$ \_\_\_\_\_.

三、解答题: 本大题共6小题, 共75分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

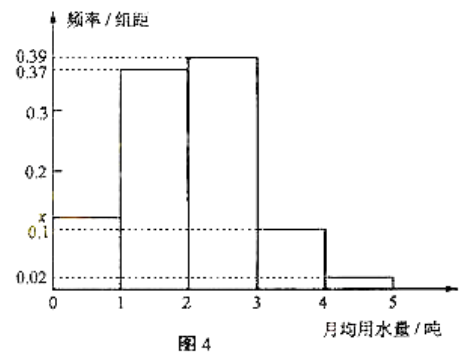
16. (本小题满分12分)

已知函数  $f(x) = \sqrt{3} \sin 2x - 2 \sin^2 x$ .

- (I) 求函数  $f(x)$  的最大值; (II) 求函数  $f(x)$  的零点的集合.

17. (本小题满分12分)

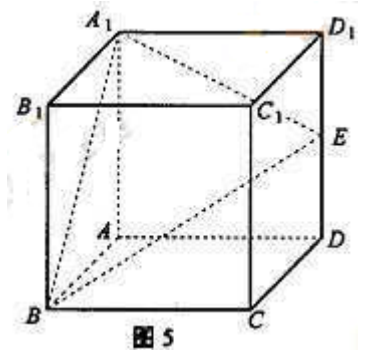
图4是某城市通过抽样得到的居民某年的月均用水量(单位:吨)的频率分布直方图.



- (I) 求直方图中  $x$  的值.  
 (II) 若将频率视为概率, 从这个城市随机抽取3位居民(看作有放回抽样), 求月均用水量在3至4吨的居民数  $X$  的分布列和数学期望.

18. (本小题满分12分)

如图5所示, 在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $E$  是棱  $DD_1$  的中点.



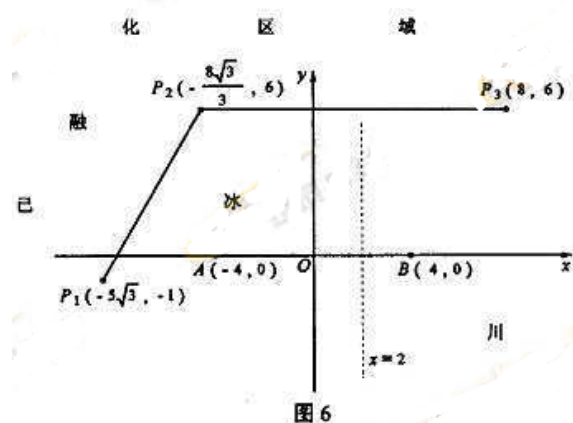
- (I) 求直线  $BE$  的平面  $ABB_1A_1$  所成的角的正弦值;  
 (II) 在棱  $C_1D_1$  上是否存在一点  $F$ , 使  $B_1F \parallel$  平面  $A_1BE$ ? 证明你的结论.

19. (本小题满分13分)

为了考察冰川的融化状况, 一支科考队在某冰川上相距8km的  $A, B$  两点各建一个考察基地. 视冰川面为平面形, 以过  $A, B$  两点的直线为  $x$  轴, 线段  $AB$  的垂直平分线为  $y$  轴建立平面直角

坐标系(图6). 在直线  $x=2$  的右侧, 考察范围为到点  $B$  的距离不超过  $\frac{6\sqrt{5}}{5}$  km 的区域; 在

直线  $x=2$  的左侧, 考察范围为到  $A, B$  两点的距离之和不超过  $4\sqrt{5}$  km 的区域.



- (I) 求考察区域边界曲线的方程;  
 (II) 如图6所示, 设线段  $P_1P_2, P_2P_3$  是冰川的部分边界线(不考虑其他边界), 当冰川融化时, 边界线沿与其垂直的方向朝考察区域平行移动, 第一年移动0.2km, 以后每年移动的距离为前一年的2倍, 求冰川边界线移动到考察区域所需的最短时间.

20. (本小题满分13分)

已知函数  $f(x) = x^2 + bx + c (b, c \in R)$ , 对任意的  $x \in R$ , 恒有  $f'(x) \leq f(x)$ .

(I) 证明: 当  $x \geq 0$  时,  $f(x) \leq (x+c)^2$ ;

(II) 若对满足题设条件的任意  $b, c$ , 不等式  $f(c) - f(b) \leq M(c^2 - b^2)$  恒成立, 求  $M$  的最小值.

**21. (本小题满分13分)**

数列  $\{a_n\} (n \in N^*)$  中,  $a_1 = a, a_{n+1}$  是函数  $f_n(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(3a_n + n^2)x^2 + 3n^2 a_n x$  的极小值点.

(I) 当  $a = 0$  时, 求通项  $a_n$ ;

(II) 是否存在  $a$ , 使数列  $\{a_n\}$  是等比数列? 若存在, 求  $a$  的取值范围; 若不存在, 请说明理由.